Математична Модель та Оптимізація для Задач Покриття Області Рівними Кругами

Олексій Антошкін
Кафедра автоматичних систем безпеки та інформаційних технологій
Національний університет цивільного захисту України
Харків, Україна
antoshkin@nuczu.edu.ua

Олександр Панкратов
Відділ математичного моделювання
Інститут проблем машинобудування НАНУ ім. А.М. Підгорного
Харків, Україна
pankratov2001@yahoo.com

Mathematical Model and optimization for Problems Covering the Area with Equal Circles

Oleksiy Antoshkin
Department of automated security systems and information technologies
National University of Civil Protection of Ukraine
Kharkiv, Ukraine
antoshkin@nuczu.edu.ua

Alexander Pankratov
Department for Mathematical Modeling
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine
Kharkiv, Ukraine
pankratov2001@yahoo.com

***Анотація*— Дослідження присвячено задачі покриття області складної форми за допомогою рівних кругів. Покриваючі обмеження описуються за допомогою фі-функцій та функцій належності. Побудована математична модель у вигляді негладкої задачі оптимізації. Заропонована стратегія рішення задачі та розроблен метод її рішення.**

***Abstract*—The research is devoted to the problem of covering an area of complex shape by equal radius circles. Covering constraints are described by means of fi-functions and belonging functions. A mathematical model is constructed in the form of a nonsmooth optimization problem. The strategy of solving the problem is proposed and the method of its solution is developed.**

Ключові слова—покриття; математична модель; нелінійне программування; оптимізація

Keywords— covering; mathematical model; non-linear programming; optimization

I. Вступ

Задачі покриття є предметом дослідження обчислювальної геометрії, а методи їх вирішення – новим напрямком теорії дослідження операцій. На сучасному етапі стрімко зростає інтерес до ефективного вирішення задач оптимального покриття кругами областей різноманітних форм. Це пояснюється різноманітністю практичних застосувань і надзвичайною складністю математичних моделей і методів їх вирішення.

Одна з основних областей застосування завдань покриття, сенсорні мережі, є відносно новою сферою, де технологія швидко розвивається в останні роки, і використовуються для вирішення завдань в самих різних областях, які варіюються від безпеки музеїв до завдань захисту дикої природи.

II. Аналіз літературних джерел

Останнім часом у зв'язку з розвитком різного виду сенсорних мереж дослідження задач кругового покриття стає все більш перспективним [1]. До таких задач відносяться: захист лісових масивів від пожеж [2], визначення необхідної кількості і розміщення станцій стільникового зв'язку; визначення радіуса дії і розміщення поливальних установок; побудова мережі призначених для контролювання діапазону кругових орбіт штучних супутників Землі [3]. До задач оптимального покриття також зводяться вибір оптимальної потужності двигунів малої тяги [4], і теоретичні завдання відновлення функцій, глобальної оптимізації та побудови оптимальних квадратур [5].

Незважаючи на дуже активний розвиток теорії сенсорних мереж, практично всі роботи присвячені бездротових мереж. У даній статті розглядається клас задач побудови оптимальних провідних сенсорних мереж для областей складної форми, що представляють інтерес, наприклад, при забезпеченні протипожежного захисту приміщень.

Для побудови покриттів авторами запропоновано кілька підходів. Один з них – розміщення датчиків в детермінованих вузлах. Доведено [6], що правильна трикутна тесселяція є оптимальною з точки зору мінімальної кількості вузлів, необхідних для повного охоплення області. Деякі дослідники [7] досліджують використання шаблону у вигляді смуги. Ефективним варіантом такого підходу є запропонований в [8] метод секційно-регулярного покриття.

Другий підхід заснований на випадковому розміщенні сенсорних датчиків в [9]. В роботі [10] пропонується оригінальний стохастичний алгоритм генерації покриттів багатокутної області однаковими колами, заснований на перетвореннях гомотетії.

В роботі [11] розглядається безперервна задача покриття множини як задачу квазідиференційованої оптимізації і наводиться алгоритм її рішення. Для безперервної завдання оптимального кульового покриття компактної множини в [12] запропоновано і обґрунтовано алгоритм, заснований на використанні теорії оптимального розбиття множин та застосуванні алгоритму Шора для вирішення отриманої задачі оптимізації недиференційованої функції.

В роботі [13] запропоновано чисельні методи побудови покриттів, що базуються на розбитті множини на області Діріхле і знаходженні так званих характерних точок. Одним з ключових елементів методів є побудова чебишевского центру компактного опуклого безлічі. Особливістю приведеної модифікації методу є можливість вирішення задачі покриття для довільних областей з криволінійної кордоном.

В роботі [14] пропонується математична модель задачі покриття опуклою багатокутної області колами з урахуванням похибок вихідних даних в інтервальному вигляді с використанням класу інтервальних функцій, проте поки не пропонується метод її вирішення.

З аналізу літературних джерел можна зробити висновок, що переважна більшість робіт, що мають відношення до задач кругового покриття, присвячена дослідженню евристичних методів їх вирішення. Наявні аналітичні моделі і методи рішення мають, як правило, недоліки і обмежену сферу застосування, що не дозволяє використовувати їх для вирішення задач кругового покриття складних областей R^2, тим більше вирішити за їх допомогою задачі побудови оптимальної провідний сенсорної мережі, якій і присвячено дане дослідження.

III. Математична постановка задачі

Нехай задані замкнута обмежена область W M R^2 з кусково-гладкою границею, сформованою L фрагментами аналітично описаних кривих (наприклад, відрізками прямих і дугами кіл), і множина кругів $C = \{C_i, i = 1,2,...,n\}$. Кількість L фрагментів може бути рівним одиниці (а W являти собою, наприклад, круг). Далі вважається, що $C_i = C_i(u_i) = C_i(x_i, y_i)$, де точка u_i збігається з центром круга C_i. Вектор u_i називається вектором трансляції або вектором параметрів розміщення круга C_i.

Побудуємо об'єднання $Ў = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Множина Ў називається круговим покриттям області W, якщо W H Ў.

Постановка задачі. Знайти покриття Ў області W, оптимальне відповідно до деякого критерію якості $F(u), u = (u_1, u_2, ..., u_n)$.

В роботі [2] на основі ідей з дослідження [10] сформульовано критерій кругового покриття довільного багатокутника, який може бути узагальнений на випадок покриття довільної множини W.

Для того, щоб множина $Ў = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ була не виродженим круговим покриттям множини W, необхідно і достатньо, щоб:

1) для кожної точки p_k О P знайшовся хоча б один круг C_i, i О I_n такий, що p_k О intC_i;

2) для будь-якої точки t^*_{ik} О frC_i I frW, i О I_n, k О {1,2} знайшовся хоча б один круг C_{j_k}, j О I_n, i № j, такий, що t^*_{ik} О intC_{j_k} і, отже, точка t_{ijk} О frC_i I frC_j належить W̃* = R^2 \ int W;

3) для будь-якої точки, t_{ijk} О frC_i I frC_j, i, j О I_n, i № j, t_{ijk} О int W, k О {1,2}, існує круг C_{s_k}, s № i, s № j, такий, що t_{ijk} О intC_{s_k}.

При побудові математичної моделі виконання першого критерію забезпечується додаванням в систему обмежень задачі нерівностей виду $j^{p_k C_i}$ і 0, другого критерію – нерівностей виду j^{tC_j} і 0, третього критерію – нерівностей виду $j^{t\tilde{C}_s}$ і 0. Тут $j^{p_k C_i}$ і 0, j^{tC_j} і 0 і $j^{t\tilde{C}_s}$ і 0 – функції належності.

Нехай дано невироджене покриття Ў області W кругами однакового рівного радіусу і необхідно оптимізувати деякий критерій якості.

Побудуємо для покриття Ў індексні множини:

– множину X_1, елементами якої є пари чисел: номера точок з множини P і кругів, які відповідають умовам пункту 1 критерію покриття області;

– множину X_2, елементами якої є трійки чисел: номера пар кругів і точок перетину, які відповідають умовам пункту 2 критерію покриття області кругами;

– множину X_3, елементами якої є четвірки чисел: номера трійок кругів і точок перетину, які відповідають умовам пункту 3 критерію покриття області кругами.

Тоді досить загальна математична модель задачі покриття може бути записана у вигляді

$$\min_{u \in W \subset R^d} F(u), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} W = \{u \in R^d : \varphi^{p_k C_i} \geq 0 \ \forall (k,i) \in X_1, \varphi^{t_{ijk} \Omega} \geq 0, \\ \Phi_{-}^{C_i C_j} \geq 0 \ \forall (i,j,k) \in X_2, \varphi^{t_{ijk} C_{s_k}} \geq 0, \\ \Phi_{-}^{C_i C_j} \geq 0 \ \forall (i,j,s) \in X_3, k = 1,2, \Upsilon \geq 0\}, \end{aligned} \tag{2}$$

де

$s = 2n + l$,

$u = (u_1, u_2, ..., u_n, t)$,

$u_i = (x_i, y_i)$, $i = 1,2,...,n$ – параметри розміщення i-го сенсора,

$\varphi^{p_k C_i}, \varphi^{t_{ik} \Omega}, \varphi^{t_{ijk} C_{s_k}}$ – функції належності,

t_{ijk} – точка перетину кіл C_i і C_i.

$f(u_i, u_j, k)$ – функція, що обчислює координати точок перетину кіл C_i и C_i,

$\Phi_{-}^{C_i C_j} = 4r^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2$ – пседонормалізована phi-функція, що формалізує умови розміщення пари кругів на максимально допустимій відстані $r = 0$,

t – вектор допоміжних змінних задачі розмірності l,

$\Upsilon(u)$ – система допоміжних обмежень (наприклад, умов належності центрів кругів області Ω).

IV. Пошук локального екстремуму

У загальному випадку задача (1)-(2) являє собою задачу негладкої оптимізації. Це пояснюється тим, що функція $\varphi^{t_{ijk} \Omega}$ в загальному випадку є мінімаксною.

Для моделювання задачі побудови провідної сенсорної мережі в модель (1)-(2) необхідно внести такі зміни:

– функція цілі є довжина траси (сума відстаней між центрами сенсорів, заданих в певному порядку);

– в систему додаткових обмежень вносяться умови належності сенсорів області з урахуванням мінімально допустимих відстаней до границі області (в загальному випадку описуються за допомогою мінімаксних функцій);

– в систему додаткових обмежень вносяться умови неналежності центрів сенсорів областям заборони (в загальному випадку описуються за допомогою мінімаксних функцій);

– в систему додаткових обмежень задачі вносяться мінімально допустимі відстані між центрами сенсорів (описуються за допомогою усюди гладкою phi-функції).

З урахуванням особливостей математичної моделі задачі покриття, пропонується використовувати стратегію вирішення задачі, що складається з наступних кроків:

1. Генеруємо набір стартових точок з області допустимих рішень задачі (1)-(2);

2. Для кожної з стартових точок будуємо модель виду (4) - (5) ;

3. Шукаємо локальний мінімум функції цілі задачі (1)-(2), стартуючи з точок, отриманих на кроці 1 і застосовуючи процедуру локальної оптимізації;

4. Вибираємо найкраще з отриманих на кроці 3 локальних рішень, як наближення до глобального вирішення задачі (1)-(2).

Для побудови стартового покриття в залежності від особливостей постановки задачі застосовувалися методи регулярного покриття на основі решіток, стохастичні зі зміною коефіцієнта гомотетії і оптимізації за групами змінних, т.зв. "послідовно-одиночного покриття". При застосуванні останнього методу результат істотно залежить від використовуваного локального критерію якості покриття. Порівняно непогані результати виходять, якщо при обчисленні локального критерію якості враховується зв'язність залишилася області і кількість кіл, необхідних для покриття решти області в околиці розміщується круги.

Слід зазначити, що побудована стартова точка часто не належить області допустимих рішень задачі (наприклад, круги мають більший радіус після збільшення коефіцієнта гомотетії) або її можна поліпшити, видаливши деякі з кругів (така ситуація часто виникає при використанні регулярного розміщення). Це можна зробити, вирішивши допоміжні завдання виду (1)-(2). Так, наприклад, для мінімізації радіусу покривають кругів (однакового для всіх об'єктів) можна прийняти його в якості додаткової змінної і мінімізувати цю змінну.

При трасуванні дротових з'єднань дуже важливим є врахування технологічних обмежень, бо використовуються два основних види дротяних з'єднань: кільцеве з великою кількістю сенсорів і шлейфове, коли з однієї точки може виходити кілька шлейфів з обмеженою кількістю датчиків на кожному. Бажано отримати мінімальну довжину дротових з'єднань.

Якщо перша задача є класичною задачею комівояжера, то другу можна представити у вигляді модифікованої задачі маршрутизації (без повернення в стартову точку).

Для вирішення цих задач була використана написана на C ++ бібліотека VPRH [15] з відкритим вихідним кодом, що реалізує набір евристичних методів для вирішення і оптимізації існуючих рішень задачі маршрутизації (і, як окремого випадку, задачі комівояжера). Бібліотека була ретельно перевірена багатьма дослідниками на тестових завданнях і в середньому генерує рішення в межах 3% від оптимального. Бібліотека VPRH легко модифікується для включення додаткових обмежень. Так, в даній роботі була здійснена модифікація, що дозволяє вибрати переважний напрямок для трас, що дозволяє підвищити технологічність рішення.

У загальному випадку пропонується вирішувати завдання (1)-(2) у вигляді послідовності підзадач нелінійного програмування.

Навіть якщо модель (1)-(2) описує задачу нелінійного програмування, то після процесу локальної оптимізації може виявитися, що, наприклад, деякі з функцій $\mathrm{F}_{-}^{C_iC_j}$ і 0 в точці локального екстремуму дорівнюють нулю. Це може свідчити про те, що локальний екстремум вихідної задачі не досягнуть і необхідно перебудувати індексні множини для нової точки і продовжити процес вирішення задачі.

Якщо (1)-(2) описує завдання недиференційованої оптимізації, то область рішення W вихідної задачі представляється у вигляді об'єднання підобластей $\bigcup_{g=1}^{G} W_g$, вибирається одна з підгалузей, що містять стартову точку u^0, і здійснюється пошук локального екстремуму на обраній підобласті стартуючи з точки. Отримана в результаті рішення підзадачі точка оголошується стартовою, і процес повторюється до тих пір, поки відбувається поліпшення функції мети.

Пошук локальних екстремумів здійснюється за допомогою програми IPOPT [16], яка знаходиться на відкритому некомерційному ресурсі (https://projects.coin-or.org/Ipopt).

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] B. Wang. Coverage problems in sensor networks: A survey. ACM Comput. Surv. – 2011. – 43. – P. 1–56.

[2] V. Komyak, A. Pankratov, V. Patsuk, A. Prikhodko. The problem of covering the fields by the circles in the task of optimization of observation points for ground video monitoring systems of forest fires. Econtechmod. An international quarterly journal – 2016. – Vol.5. No.2. – P. 133-138.

[3] С.А. Пиявский. Об оптимизации сетей. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1968. — № 1. С. 68-80.

[4] В.С. Брусов. С.А. Пиявский Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости. Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1971. — 11, № 2. — С. 304-312.

[5] А.Г. Сухарев. Минимаксные алгоритмы в задачах целочисленного анализа. — М.: Наука, 1989. — 300 с.

[6] R. Kershner. The number of circles covering a set. Amer. J. Math. – 1939. –61. –3. – P. 665–671.

[7] R. Lyengar, K. Kar, S. Banerjer. Low-Coordination topologies for redundancy in sensor networks. In Proc. 6th ACM MobiHoc. – 2005. – P. 332–342.

[8] А. В. Панкратов, В. Н. Пацук, Т.Е. Романова. Метод регулярного покрытия прямоугольной области кругами заданного радиуса. Радиоэлектроника и информатика № 1 (18). 2002, — С. 50-52.

[9] L. Lazos, R. Poovendran Stochastic coverage in heterogeneous sensor networks. ACM Trans. Sensor Netw. 2006. 2,3, – P. 325–358.

[10] Ю.Г. Стоян, В.Н. Пацук. Покрытие многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса. Доп. НАН України. — 2006. — № 3. — С. 74-77.

[11] H. Jandl, K. Wieder A continuous set covering problem as a quasidifferentiable optimization problem. Optimization. – 1988. – 19. – № 6. – P. 781-802.

[12] Е. М. Киселева, Л. И. Лозовская, Е. В. Тимошенко. Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств. Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 98-117.

[13] В. Н. Ушаков, П. Д. Лебедев, Алгоритмы оптимального покрытия множеств на плоскости R^2. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 26:2 (2016), 258–270.

[14] А.А. Антошкин, Т.Е. Романова Математическая модель задачи покрытия выпуклой многоугольной области кругами с учетом погрешностей исходных данных // Пробл. машиностроения. — 2002. — 5, № 1. — С. 56-60 .

[15] C. Groër, B. Golden, E. Wasil. A library of local search heuristics for the vehicle routing problem. Mathematical Programming Computation. – 2010. –2. –2. – P. 79-101.

[16] A. Wachter, L. T.Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. Mathematical Programming. – 2006. – V. 106. – Issue 1. – P. 25–57.