УДК 514.18

**В.М. Комяк, О.М. Соболь, Ю.С. Чапля**
**Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)**

# МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ ПЛОСКИХ НЕОРІЄНТОВАНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З КУСОЧНО-НЕЛІНІЙНИМИ ГРАНИЦЯМИ У ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ ЗМІННОЇ ДОВЖИНИ

***У роботі розроблено модель та метод оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній області змінної довжини. Розглянуто особливості запропонованого методу та визначено шляхи подальших наукових досліджень.***

***Ключові слова:*** *оптимізація, розміщення, неорієнтований об'єкт з кусочно-нелінійною границею.*

**В.М. Комяк, А.Н. Соболь, Ю.С. Чапля**
**Национальный университет гражданской защиты Украины (г. Харьков)**

## МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПЛОСКИХ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С КУСОЧНО-НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

***В работе разработаны модель и метод оптимизации размещения плоских неориентированных геометрических объектов с кусочно-нелинейными границами в прямоугольной области переменной длины. Рассмотрены особенности предложенного метода и определены пути дальнейших научных исследований.***

***Ключевые слова:*** *оптимизация, размещение, неориентированный объект с кусочно-нелинейной границей.*

**V.M. Komyak, O.M. Sobol, Yu.S. Chaplya**
**National university of civil defense of Ukraine (Kharkiv)**

## THE METHOD OF OPTIMUM PLACEMENT NOT ORIENTED PLANE GEOMETRIC OBJECTS WITH SECTIONAL NONLINEAR FRONTIERS IN RECTANGULAR AREA WITH VARYING LENGTH

***In this paper the model and method of optimum placement not oriented plane geometric objects with sectional nonlinear frontiers in rectangular area with varying length are developed. Features of the proposed method are considered and the ways of further research are defined.***

***Keywords:*** *optimization, placement, not oriented object with sectional nonlinear frontier.*

**Постановка проблеми**. На теперішній час у різних галузях діяльності людини виникають оптимізаційні задачі розміщення об'єктів, що мають велике теоретичне та прикладне значення. Якщо розглянути задачі оптимізаційного розміщення двовимірних об'єктів, то до даного класу можуть бути зведеними у своїх постановках практичні задачі, що виникають у легкій промисловості, машинобудуванні, електроніці, транспортній галузі тощо.

Слід відзначити, що серед задач розглянутого вище класу існують такі, що до теперішнього часу не були розв'язаними. Саме до таких відносяться задачі оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями. Дані задачі мають важливе значення, наприклад, для швейної промисловості, оскільки при розкрою матеріалів є необхідність у максимально повному використанні матеріалу. Якщо не існує технологічних обмежень на орієнтацію викройок відносно тканини, то представлення їх за допомогою неорієнтованих об'єктів, які можуть здійснювати поворот відносно власної системи координат, дозволить збільшити коефіцієнт заповнення, тобто більш економно використовувати матеріал. Таким чином, існує актуальна науково-прикладна проблема оптимального розміщення неорієнтованих геометричних об'єктів з нелінійними границями у заданих областях. Однією із задач, що сприятиме вирішенню вказаної проблеми, є задача оптимального розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній області змінної довжини.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Огляд класу задач оптимізаційного геометричного проектування, до яких відноситься задача оптимального розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями, наведено у роботі [1]. У роботі [2] здійснено постановку задачі оптимального розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями. Роботу [3] присвячено розробці загальної моделі оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у заданих областях та дослідженню особливостей зазначеної моделі, що дозволить створити обґрунтований метод розв'язання поставленої задачі. Моделям та методам розв'язання класу задач оптимізаційного геометричного проектування присвячено, наприклад, роботи [4-6].

**Формулювання цілей статті.** У даній роботі, на підставі створеної загальної моделі [3], необхідно розробити метод оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями у прямокутній області змінної довжини.

**Основна частина.** Розглянемо постановку задачі. Нехай у двовимірному просторі задано об'єкти розміщення $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$, $i=1,2,\ldots,N$, з кусочно-нелінійними границями. Дані об'єкти є неорієнтованими і задаються послідовністю своїх вершин $\left\{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{im_i}\right\}$, $v_{id}=\left(x_{id}\left(\theta_i\right), y_{id}\left(\theta_i\right)\right)$, $d=1,2,\ldots,m_i$, у локальній системі координат, причому нумерація вершин здійснюється проти годинникової стрілки. Кожна пара вершин $\left(v_{id}, v_{id+1}\right)$ з'єднується фрагментом кривої 2-го порядку:

$$\begin{aligned}&a_{i,dd+1,1}\left(\theta_i\right)x_i^2+a_{i,dd+1,2}\left(\theta_i\right)x_iy_i+a_{i,dd+1,3}\left(\theta_i\right)y_i^2+a_{i,dd+1,4}\left(\theta_i\right)x_i+\\&+a_{i,dd+1,5}\left(\theta_i\right)y_i+a_{i,dd+1,6}\left(\theta_i\right)=0,\end{aligned} \qquad (1)$$

де $a_{i,dd+1,c}\left(\theta_i\right)$, $c=1,\ldots,6$ – параметри квадратичної форми, що описує фрагмент границі між вершинами $v_{id}$ та $v_{id+1}$ об'єкта $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$.

Необхідно розмістити об'єкти $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$, $i=1,\ldots,N$, у прямокутній області $S_0\left(l,b\right)$ таким чином, щоб довжина $l$ була мінімальною і при цьому виконувались обмеження на:

– взаємний неперетин об'єктів $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$ та $S_j\left(x_j, y_j, \theta_j\right)$, $i=1,\ldots,N$, $j=i+1,\ldots,N$;

– належність об'єктів $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$ області $S_0\left(l,b\right)$.

Введемо вектор параметрів $u=\left(u_1,u_2,\ldots,u_N\right)$, $u_i=\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$, $i=1,\ldots,N$, $u\in R^q$, $q=3N$. Вектор всіх змінних задачі позначимо $Z=Z\left(u,l\right)\in R^{q+1}$. Тоді загальна модель оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об'єктів з кусочно-нелінійними границями має наступний вигляд:

$$l^*=\arg\min_{u\in W} Z\left(u,l\right), \qquad (2)$$

де $W$:

$$\Phi\left(x_i, y_i, \theta_i, x_j, y_j, \theta_j\right)\geq 0,\ i=1,\ldots,N-1,\ j=i+1,\ldots,N; \qquad (3)$$

$$\Phi_{cS_0}\left(x_i, y_i, \theta_i, 0, 0\right)\geq 0,\ i=1,\ldots,N. \qquad (4)$$

В моделі (2)÷(4) вираз (2) являє собою цільову функцію задачі; вираз (3) – умову взаємного неперетину об'єктів розміщення; вираз (4) – умову належності об'єктів області розміщення, причому $cS_0$ – доповнення $S_0$ до двовимірного простору. Слід відзначити, що для формалізації обмежень (3) і (4) використано апарат Ф-функцій, введений в роботах Ю.Г. Стояна [4].

Розглянемо метод знаходження локально-оптимальних розв’язків задачі (2)÷(4), основою якого є метод оптимізації за групами змінних. Для випадкової перестановки номерів об’єктів $\{i_1, i_2, \ldots, i_N\} \in \{1, \ldots, N\}$ в межах оптимізаційної серії, кількість яких дорівнює $N_s$, здійснюється послідовне розміщення заданих геометричних об’єктів. Так, приклад розміщення геометричного об’єкта $S_{i_1}\left(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}\right)$ наведено на рис. 1.

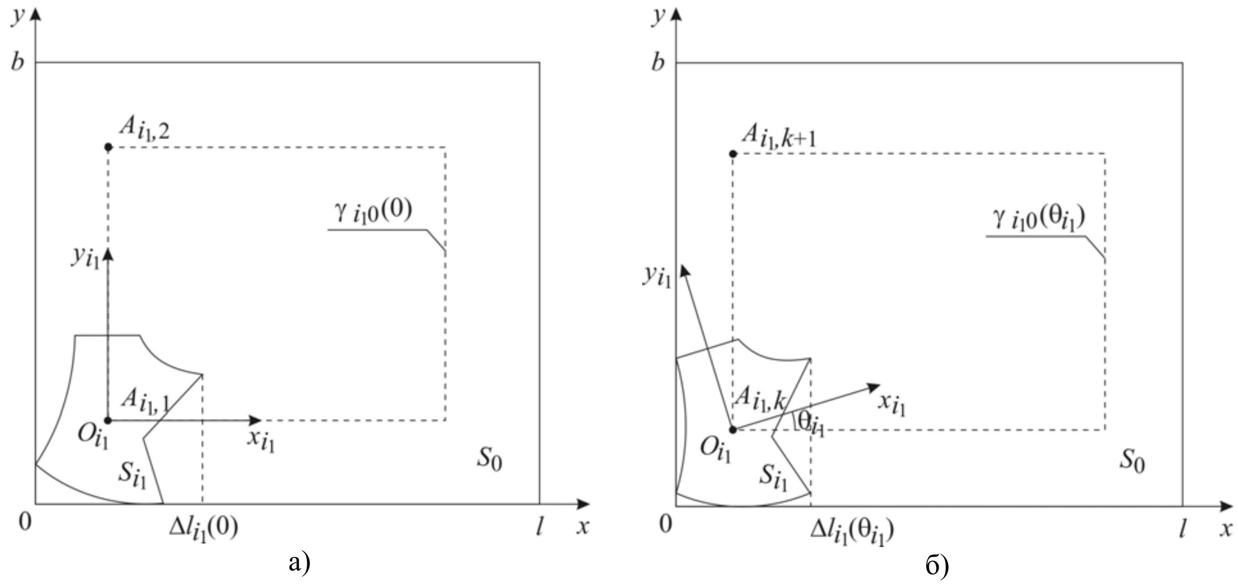


*Рис. 1.* **Розміщення геометричного об’єкта** $S_{i_1}\left(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}\right)$

Введемо параметр дискретизації $n_{i_1}$ кута повороту $\theta_{i_1}$ об’єкта $S_{i_1}\left(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}\right)$. Тоді $\Delta\theta_i = \dfrac{2\pi}{n_{i_1}}$, $\theta_{i_1} = k \cdot \Delta\theta_{i_1}$, $k = 0, 1, \ldots, n_{i_1} - 1$. Для кожного значення $k$ здійснюється побудова контуру дотику $\gamma_{i_1 0}\left(\theta_{i_1}\right)$, при цьому здійснюється аналіз припустимих точок розміщення $A_{i_1,1}, A_{i_1,2}, \ldots, A_{i_1,k}, A_{i_1,k+1}, \ldots$ початку локальної системи координат об’єкта $S_{i_1}\left(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}\right)$. Координати даних точок визначаються за допомогою розв’язання лінійної системи рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_{i_1 0,p}\left(\theta_{i_1}\right)x + b_{i_1 0,p}\left(\theta_{i_1}\right)y + c_{i_1 0,p}\left(\theta_{i_1}\right) = 0; \\ a_{i_1 0,q}\left(\theta_{i_1}\right)x + b_{i_1 0,q}\left(\theta_{i_1}\right)y + c_{i_1 0,q}\left(\theta_{i_1}\right) = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$p = 1, 2, 3$; $q = p + 1, \ldots, 4$. Дані рівняння описують елементи контуру дотику $\gamma_{i_1 0}\left(\theta_{i_1}\right)$ об’єкта $S_{i_1}\left(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}\right)$ та доповнення області $S_0$ до двовимірного простору і розв’язуються для фіксованого $\theta_{i_1}$.

Для приклада, що наведений на рис. 1, цільова функція (2) приймає однакові значення при розміщенні початку локальної системи координат об’єкта $S_{i_1}\left(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}\right)$ у т. $A_{i_1,k}$ і $A_{i_1,k+1}$. Виходячи із технологічних вимог обираємо т. $A_{i_1,k}$ і фіксуємо параметри розміщення $x_{i_1}$, $y_{i_1}$, $\theta_{i_1}$.

На рис. 2 наведено приклад розміщення об’єкта $S_{i_2}\left(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}\right)$.

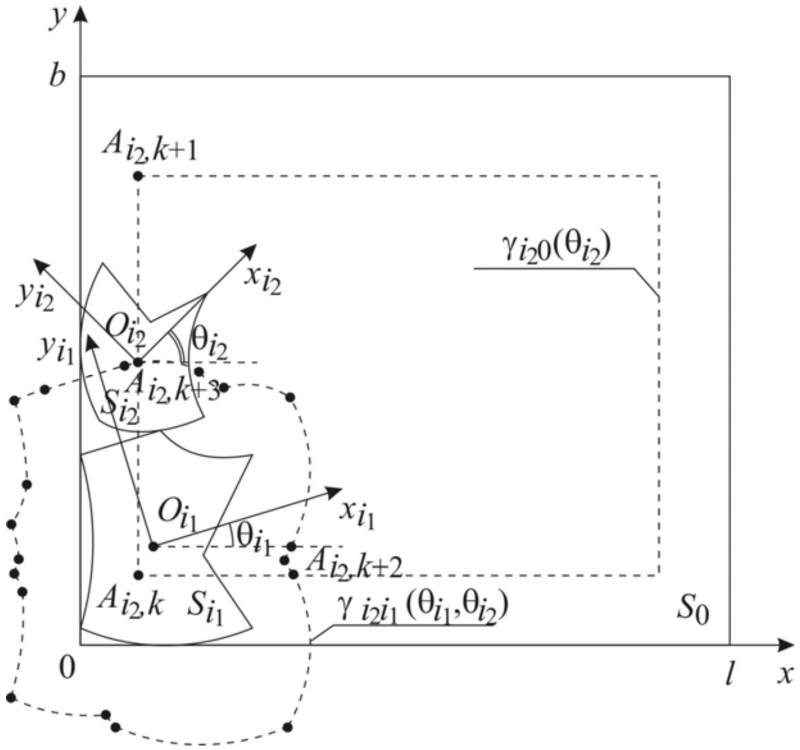


*Рис. 2*. **Розміщення геометричного об'єкта** $S_{i_2}\left(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}\right)$

Так, координати т. $A_{i_2,k}$ і $A_{i_2,k+1}$ визначаються за допомогою системи рівнянь виду (5), причому т. $A_{i_2,k}$ є неприпустимою, оскільки при розміщенні у ній початку локальної системи координат об'єкта $S_{i_2}\left(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}\right)$ відбудеться перетин з об'єктом $S_{i_1}\left(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}\right)$. Що стосується т. $A_{i_2,k+2}$ і $A_{i_2,k+3}$, то їх координати можуть бути знайдені шляхом розв'язання наступної системи рівнянь при фіксованому $\theta_{i_2}$ :

$$\begin{cases} a_{i_2 i_1, pp+1,1}\left(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}\right) x^2 + a_{i_2 i_1, pp+1,2}\left(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}\right) xy + a_{i_2 i_1, pp+1,3}\left(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}\right) y^2 + \\ + a_{i_2 i_1, pp+1,4}\left(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}\right) x + a_{i_2 i_1, pp+1,5}\left(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}\right) y + a_{i_2 i_1, pp+1,6}\left(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}\right) = 0; \\ a_{i_2 0,q}\left(\theta_{i_2}\right) x + b_{i_2 0,q}\left(\theta_{i_2}\right) y + c_{i_2 0,q}\left(\theta_{i_2}\right) = 0; \end{cases} \tag{6}$$

де $a_{i_2 i_1, pp+1,r}\left(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}\right)$, $r = 1, \ldots, 6$ – параметри квадратичної форми, що описує фрагмент між $p$ та $(p+1)$ вершинами контуру $\gamma_{i_2 i_1}\left(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}\right)$ дотику об'єктів $S_{i_2}\left(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}\right)$ та $S_{i_1}\left(x_{i_1}, y_{i_1}, \theta_{i_1}\right)$;

$a_{i_2 0,q}\left(\theta_{i_2}\right)$, $b_{i_2 0,q}\left(\theta_{i_2}\right)$, $c_{i_2 0,q}\left(\theta_{i_2}\right)$ – параметри $q$-го ($q = 1, \ldots, 4$) фрагменту контуру $\gamma_{i_2 0}\left(\theta_{i_2}\right)$.

Очевидно, що для розміщення початку локальної системи координат об'єкта $S_{i_2}\left(x_{i_2}, y_{i_2}, \theta_{i_2}\right)$ обираємо т. $A_{i_2,k+3}$.

Аналогічний підхід застосовується для розміщення об'єктів $S_{i_3}\left(x_{i_3}, y_{i_3}, \theta_{i_3}\right)$, …, $S_{i_N}\left(x_{i_N}, y_{i_N}, \theta_{i_N}\right)$. Наступний крок – упорядкування об'єктів за параметром $\Delta l_{i_j}\left(\theta_{i_j}\right)$, $j = 1, \ldots, N$ (приріст цільової функції (2) при розміщенні геометричного об'єкта) і наступне їх розміщення відповідно до глибини оптимізації $N_d$.

Таким чином, застосування даного методу дозволить визначити локальний екстремум цільової функції (2) шляхом послідовного розв’язання систем рівнянь виду (5), (6), а також систем нелінійних рівнянь, які описують фрагменти контуру дотику відповідних геометричних об’єктів. Верхня оцінка складності даного методу має вигляд:

$$O = N_s \cdot N_d \cdot \sum_{i=1}^{N} n_i \cdot \left( 2 + 3 \cdot \sum_{k=1}^{i-1} n_{\gamma_{ik}} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^{i-1} n_{\gamma_{ij}} \cdot n_{\gamma_{ik}} \right); \tag{7}$$

де $n_i$ – параметр дискретизації кута повороту $i$-го об’єкта;

$n_{\gamma_{ij}}$ – кількість фрагментів контуру, що описує дотик об’єктів $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$ та $S_j\left(x_j, y_j, \theta_j\right)$;

$n_{\gamma_{ik}}$ – кількість фрагментів контуру, що описує дотик об’єктів $S_i\left(x_i, y_i, \theta_i\right)$ та $S_k\left(x_k, y_k, \theta_k\right)$.

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** В даній роботі розроблено модель та удосконалений метод оптимізації за групами змінних для розв’язання задач нерегулярного розміщення плоских неорієнтованих геометричних об’єктів у прямокутній області змінної довжини. Одержана верхня оцінка складності даного методу свідчить про доцільність його застосування до розв’язання практичних задач оптимізації. Подальші дослідження будуть спрямовані на здійснення комп’ютерного моделювання нерегулярного розміщення плоских неорієнтованих геометричних об’єктів у заданих областях.


1. Problems of geometric design: placement, coverage, partition and defining optimal routes / [Andronov V.A., Komyak V.M., Sobol A.N., Komyak V.V., Popova A.V.] // Годишник на технически университет във Варна – Варна: Технически ун.-т, 2013. – Т. 3. – С. 9-13.
2. Комяк В.М. Постановка задачі оптимального розміщення неорієнтованих плоских геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями / В.М. Комяк, О.М. Соболь, Ю.С. Чапля // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 91. – К.: КНУБА, 2013. – С. 127-130.
3. Комяк В.М. Математична модель оптимізації розміщення плоских неорієнтованих геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями / В.М. Комяк, О.М. Соболь, Ю.С. Чапля // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2014. – Вып. 3(50). – С. 300-305.
4. Стоян Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – К.: Наукова думка, 1986. – 268 с.
5. Модель та метод оптимізації розміщення плоских орієнтованих геометричних об’єктів з кусочно-нелінійними границями / А.В. Попова // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Вип. 2. – С. 88-93.
6. Romanova T. Optimal clustering of a pair of irregular objects bounded by arcs and line segments / T. Romanova, J. Bennell, G. Scheithauer, Y. Stoyan, A. Pankratov // Proc. 10th ESICUP Meeting. – Lille (France). – 2013. – P. 22.



**Рецензенти:**

1. Шатохін Володимир Михайлович, завідувач кафедри теоретичної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури, доктор технічних наук, професор.

2. Росоха Сергій Володимирович, професор кафедри пожежної тактики та аварійно-рятувальних робіт Національного університету цивільного захисту України, доктор технічних наук, доцент.