

и объекты по стереотипам. Система разбита на подсистемы с указанием количественных связей между ними. Модули, функционирование которых зависит от состояния, отражены в диаграммах состояний. Для прецедентов на диаграммах кооперации указано взаимодействие объектов во времени и по порядку поступления событий. Таким образом, в полученных моделях отражены все аспекты, которые необходимо исследовать и учесть при проектировании системы документооборота.



Рис. 7. Диаграмма кооперации для подсистемы приказов по прецеденту «Перевести студентов на следующий курс»

Выводы

Показано аналитическое моделирование методом COMET системы документооборота высшего учебного заведения. Научная новизна данного исследования состоит в получении модели, которая позволяет провести дальнейшее имитационное моделирование для оценки параметров реальной системы и определения участков, требующих оптимизации путем введения электронной системы документооборота. Для проектирования электронной системы удобно воспользоваться тем же методом, которым выполнялся анализ.

Такая модель представляет практическую значимость как для дальнейших исследований и расширения функциональности системы, так и для обучения персонала высшего учебного заведения. По результатам моделирования к настоящему моменту введена в эксплуатацию система ввода, обработки и хранения данных образовательного процесса в центре обучения студентов на иностранных языках. Проектируемая электронная система документооборота, как и существующая система сбора данных в деканате, предназначены для решения задач надежности сбора данных, обеспечения их доступности и информационной безопасности.

Литература: 1. ISO/IEC 12207:1995. 2. Goma H. Designing Concurrent, Distributed, and Real-time Applications with UML, Addison-Wesley, 2000. 3. Jacobson I. Object-Oriented Software Engineering. S.1.: ASM press., 1992. 528p. 4. Вендров А. М. CASE-технологии: современные методы и средства проектирования информационных систем. М.: Финансы и статистика, 1998. 175с.

Поступила в редколлегию 05.12.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руденко О.Г.

Горбачёв Валерий Александрович, канд. техн. наук, профессор каф. ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: моделирование и проектирование систем. Увлечения и хобби: музыка, волейбол, автомобили. Адрес: Украина, 61166, Харьков, просп. Ленина, 14, тел. 8 (057) 702-14-27.

Островерхая Наталья Николаевна, ведущий инженер ЦОСИЯ, ХНУРЭ. Научные интересы: моделирование систем. Увлечения и хобби: книги, английский язык, ландшафтный дизайн. Адрес: Украина, 61166, Харьков, просп. Ленина, 14, тел. 8 (057) 702-14-27.

УДК519.85

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

НОВОЖИЛОВА М.В., ЧУБ И.А., МУРИН М.Н.

Рассматривается оптимизационная задача размещения прямоугольных объектов с переменными метрическими характеристиками в заданной области. Предлагаются методы решения задачи. Проводится сравнительный анализ методов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим класс задач оптимизационного геометрического проектирования [1], состоящих в поиске оптимального размещения конечного набора $T = \{T_i\}$, $i = 1, 2, \dots, I$ геометрических объектов произвольной пространственной формы ($\text{int } T_i \neq \emptyset$) в заданной области T_0 при наличии различных ограничений и критериев качества размещения.

В общем случае геометрическая информация g_i об объекте T_i состоит из:

– совокупности пространственных форм $\{s_i\}$, составляющей объект T_i ;

– набора метрических характеристик $\{m_i\}$, которые определяют размеры точечных множеств, имеющих пространственную форму $\{s_i\}$;

– параметров размещения $\{u_i\}$ объекта T_i в T_0 [1].

Во многих областях человеческой деятельности – оптимальное распределение ресурсов проекта, задачи энергосбережения, собственно задачи раскроя материалов [1-3] и др. возникают оптимизационные задачи, допускающие постановку в виде задач размещения объектов $T = \{T_i\}$ с переменными метрическими характеристиками m_i , $i = 1, 2, \dots, I$.

2. Анализ предыдущих исследований

Анализ отечественных и зарубежных публикаций, посвященных постановке и решению оптимизационных задач геометрического проектирования [1, 2, 4-7] и задач теории исследования операций, которые могут быть сформулированы в терминах теории оптимизационного геометрического проектирования, показал, что, несмотря на несомненный научный и практический интерес, задачи, в которых метрические характеристики объектов размещения – переменные величины, недостаточно изучены. Подавляющее число научных работ посвящено решению задач размещения, в которых эндогенными переменными являются метрические характеристики только области размещения. В [6] предложена математическая модель одной задачи оптимизационного геометрического проектирования, в которой предполагается, что не только параметры размещения u_i , но и метрические характеристики m_i объектов $T = \{T_i\}$, $i = 1, 2, \dots, I$, связанные функциональными зависимостями, являются эндогенными переменными задачи. Исследованы свойства области допустимых решений и функции цели задачи, позволяющие представить ее как набор задач выпуклого программирования.

3. Цель и задачи исследования

Цель исследования – построение оптимизационного метода решения задачи размещения геометрических объектов с переменными метрическими характеристиками.

Задачи исследования: анализ основных свойств области допустимых решений рассматриваемой задачи, позволяющих осуществить ее представление как набор задач известной структуры; определение метода кусочно-линейной аппроксимации области допустимых решений задачи, позволяющего с наперед заданной точностью представить исходную задачу с нелинейными ограничениями как задачу линейного программирования; построение итерационного метода поиска локального минимума рассматриваемой задачи.

4. Математическая модель задачи

Пусть задана область размещения – полубесконечная полоса – $T_0 \subset R^2$, $s_0 =$ «прямоугольник»,

$m_0 = (W, Z)$, причем $W = \text{const}$, $Z = \text{var}$. Пусть также задан набор $T = \{T_i\}$, $i = 1, 2, \dots, I$ объектов размещения. В пространстве R^2 компонента $\{s_i\}$ геометрической информации об объекте T_i – прямоугольник.

Свяжем с каждым T_i собственную систему координат $X_i O_i Y_i$, начало которой – левая нижняя вершина T_i – полюс объекта с параметрами размещения $u_i = (x_i, y_i)$ в общей системе координат XOY : $T_i = T_i(x_i, y_i)$ (рис.1).

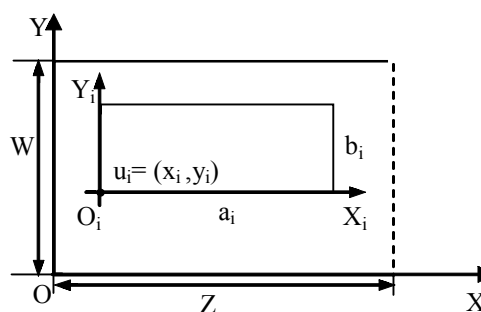


Рис.1. Постановка задачи

Необходимо разместить набор объектов T в полубесконечной полосе T_0 без наложений друг на друга так, чтобы величина Z была минимальной.

Пусть метрические характеристики (a_i, b_i) $i = 1, 2, \dots, I$ удовлетворяют условию:

$$a_i \in [a_{i \min}, a_{i \max}], \quad b_i \in [b_{i \min}, b_{i \max}], \quad (1)$$

$$a_{i \min} > 0, \quad b_{i \min} > 0.$$

Пусть площадь S_i объекта T_j при изменении метрических характеристик остается неизменной:

$$S_i = a_{i \min} \times b_{i \max} = a_{i \max} \times b_{i \min}, \quad \text{т.е.}$$

$$b_i = \frac{S}{a_i}. \quad (2)$$

Тогда вектор независимых переменных задачи имеет вид: $\omega = (x_1, y_1, a_1, x_2, y_2, a_2, \dots, x_I, y_I, a_I)$.

Итак, необходимо определить

$$\min_{\omega \in D} Z, \quad (3)$$

где область допустимых решений $D = D_1 \cap D_2$ определяется условиями вида

$$D_1 : \text{int } T_i(x_i, y_i, a_i) \cap \text{int } T_j(x_j, y_j, a_j) = \emptyset, \quad (4)$$

$$D_2 : T_i(x_i, y_i, a_i) \subset T_0, \quad i, j = 1, 2, \dots, I, \quad i \neq j. \quad (5)$$

5. Формализация геометрических ограничений задачи

Аналитическое описание условий (4) взаимного попарного непересечения объектов размещения, а также их принадлежность заданной области размещения (5) осуществляется с помощью аппарата Φ -функций [1].

Многочисленные исследования посвящены построению и исследованию Φ -функций пары объектов с постоянными метрическими характеристиками [3, 4, 7] различных типов пространственных форм. И только в некоторых работах [5,6] был предложен подход к учету возможности изменения метрических характеристик объектов и их пространственной формы при построении Φ -функции.

Пусть $\mathbf{m}_i = \text{var}$, $i = 1, 2, \dots, I$, и выполнены условия (1)-(2). Любое сечение данного множества $T_i^3(x_i, y_i, a_i) \subset R^3$ плоскостью $a_i = a_{i \text{ const}}$, $a_{i \text{ const}} \in \{a_{i \text{ min}}, a_{i \text{ max}}\}$ имеет пространственную форму прямоугольник (рис. 2).

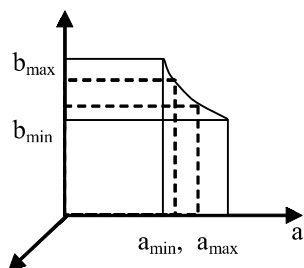


Рис. 2. Сечение множества $T_i^3(x_i, y_i, a_i) \subset R^3$

Φ -функция [1,3], задающая условие взаимного непересечения объектов $T_i(x_i, y_i, a_i)$ и $T_j(x_j, y_j, a_j)$, удовлетворяет условию:

$$\Phi_{ij}(x_i, y_i, a_i, x_j, y_j, a_j) \geq 0$$

и задается набором [4,6] неравенств вида

$$F_n(u_i, u_j, a_i, a_j) = \begin{cases} \langle f_k^n(u_i, u_j, a_i, a_j) \geq 0, k = 1, \dots, 4, \\ f_9(a_i) \geq 0, \\ f_{10}(a_i) \geq 0, l = i, j, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$f_9(a_i) = -a_i + a_{i \text{ max}}, \quad f_{10}(a_i) = a_i - a_{i \text{ min}},$$

$$f_1^n(u_i, u_j, a_i, a_j) = x_j - x_i - a_i,$$

$$f_2^n(u_i, u_j, a_i, a_j) = x_i - x_j - a_j,$$

$$f_3^n(u_i, u_j, a_i, a_j) = y_j - y_i - S_i / a_i,$$

$$f_4^n(u_i, u_j, a_i, a_j) = y_i - y_j - S_j / a_j.$$

$\Phi_{ij}(x_i, y_i, a_i, x_j, y_j, a_j)$ – функция в данном случае задается выражением:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(u_i, a_i, u_j, a_j) = \\ = \min \left\{ \max_{k \in \{1, 2, 3, 4\}} f_k^n(u_i, u_j, a_i, a_j), f_9(a_i), f_{10}(a_i), f_9(a_j), f_{10}(a_j) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

$\Phi_{i0}(x_i, y_i, a_i, m_0)$ – функция, описывающая ограничение на размещение в полосе T_0 , имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{i0}(x_i, y_i, a_i, m_0) = \\ = \min \{ f_5(x_i), f_6(x_i), f_7(y_i), f_8(y_i), f_9(a_i), f_{10}(a_i) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Иначе говоря, условие $\Phi_{i0}(x_i, y_i, a_i, m_0) \geq 0$ описывается системой вида

$$\begin{cases} F_h^n(u_i, a_i, m_0) \geq 0, h = 1, 2, 3, 4, \\ f_9(a_i) \geq 0, \\ f_{10}(a_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, I, \end{cases} \quad (9)$$

$$F_1^n(u_i, a_i, m_0) = -x_i, \quad F_2^n(u_i, a_i, m_0) = z - x_i - a_i,$$

$$F_3^n(u_i, a_i, m_0) = -y_i, \quad F_4^n(u_i, a_i, m_0) = W - y_i - \frac{S_i}{a_i}.$$

Если метрические характеристики объектов $T_i(x_i, y_i, a_i)$ связаны соответствующими функциональными зависимостями вида (2), то $\Phi_{ij}(x_i, y_i, a_i, x_j, y_j, a_j)$ – функция принадлежит пространству R^6 , а ее уровни являются кусочно-гладкими гиперповерхностями.

Тогда задача (3)-(5) формулируется следующим образом:

Найти:

$$\min_{\omega \in D \subset R^{3I+1}} Z, \quad (10)$$

где область допустимых решений D представляется в виде набора неравенств

$$\begin{cases} F^n(u_i, a_i, m_0) \geq 0, \\ \langle f_k^n(u_i, u_j, a_i, a_j) \geq 0, k = 1, 2, \dots, 4, \\ f_9^n(a_i) \geq 0, \\ f_{10}^n(a_i) \geq 0, i, j = 1, 2, \dots, I, i \neq j, \end{cases} \quad (11)$$

Далее удобно рассматривать описание области допустимых решений $D \subset R^{3I+1}$ в следующем эквивалентном виде:

$$\langle f_k(u_i, u_j, a_i, a_j) \leq 0, k = 1, 2, \dots, 4, \quad (12)$$

$$\begin{cases} F(u_i, a_i, m_0) \leq 0, \\ f_9(a_i) \leq 0, \\ f_{10}(a_i) \leq 0, i, j = 1, 2, \dots, I, i \neq j, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$f_9(a_i) = a_i - a_{i \text{ max}}, \quad f_{10}(a_i) = -a_i + a_{i \text{ min}},$$

$$f_1(u_i, u_j, a_i, a_j) = -x_j + x_i + a_i,$$

$$f_2(u_i, u_j, a_i, a_j) = -x_i + x_j + a_j,$$

$$f_3(u_i, u_j, a_i, a_j) = -y_j + y_i + S_i/a_i,$$

$$f_4(u_i, u_j, a_i, a_j) = -y_i + y_j + S_j/a_j.$$

Отметим основные свойства оптимизационной задачи (10)-(12)-(13), вытекающие из ее математической постановки.

Свойство 1. Функция цели Z является линейной. При этом

$$Z \in \left[\min_{i \in N} a_{i \min}, \sum_{i=1}^I a_{i \max} \right].$$

Свойство 2. Пространство параметров, в котором ищется экстремум функции цели, имеет размерность $3I + 1$, где I – число размещаемых объектов.

Свойство 3. Число ограничений, описывающих область D допустимых решений задачи (10)-(12)-(13), квадратично зависит от числа размещаемых объектов и равно $12I(I - 1) + 6I$.

Свойство 4. Область $D \subset R^{3I+1}$ – невыпуклое, несвязное ограниченное точечное множество, имеющее кусочно-гладкую границу $\Psi = FrD$, $\Psi \subset R^{3I}$. Каждая компонента связности области допустимых решений является многосвязной.

Свойство 5. Область $D \subset R^{3I+1}$ допускает представление в виде объединения конечного числа подобластей $D_g \subset R^{3I+1}$ вида

$$D = \bigcup_{g=1}^G D_g, \quad (14)$$

где $G = O(4^{I(I-1)})$.

При этом компонента связности $D_g \subset R^{3I+1}$ описывается системой I систем нелинейных неравенств вида (13) и $I(I-1)/2$ неравенств – по одному из каждого набора неравенств вида $\langle f_k^n(u_i, u_j, a_i, a_j) \leq 0$ для каждой пары объектов.

Свойство 6 [6]. Функции вида

$$f_3(u_i, u_j, a_i) = -y_i + y_j + \frac{S_j}{a_i}$$

и
$$f_4(u_i, u_j, a_j) = y_i - y_j + \frac{S_i}{a_j}$$

являются выпуклыми.

Следствие. Функции

$$F_4(u_i, a_i, m_0) = y_i - W + \frac{S_i}{a_i}, i = 1, 2, \dots, I$$

являются выпуклыми.

Свойство 7 [6]. Область D_g является выпуклой подобластью области допустимых решений D . При этом область D_g является выпуклым компактом.

Свойство 8 [7]. Покрывание (14) не является разбиением, поэтому для некоторых точек ω области D имеет место такое соотношение:

$$\omega \in D_{G_1} = \bigcap_{g=1}^{G_1} D_g, \quad G_1 < G. \quad (15)$$

В силу выделенных особенностей функции цели и области допустимых решений данная задача сводится к решению конечного множества задач выпуклого программирования [8] вида

$$\omega^* = \arg \min_{\omega \in D_g \subset D} Z, \quad (16)$$

D_g :

$$\begin{cases} \langle f_k(u_i, u_j, a_i, a_j) \leq 0, k \in \{1, \dots, 4\}, i, j \in \{1, \dots, I\}, i \neq j, \\ F(u_i, a_i, m_0) \leq 0, \\ f_\mu(a_i) \leq 0, \mu = 1, 2, i = 1, 2, \dots, I. \end{cases} \quad (17)$$

Согласно [8] существует теоретическая возможность определения глобального минимума функции цели задачи (16)-(17), который является ее локальным минимумом.

Замечание 1. Для определения глобального минимума функции цели необходимо решить $4^{I(I-1)}$ задач вида (16)-(17).

Рассмотрим задачу поиска локального минимума функции цели рассматриваемой задачи на множестве $D_{G_1} \subset D$ вида:

$$\omega^* = \arg \min_{\omega \in D_{G_1} \subset D} Z, \quad (18)$$

$$D_{G_1} = \bigcup_g^{G_1} D_g :$$

$$\begin{cases} \langle f_k(u_i, u_j, a_i, a_j) \leq 0, k \in \{1, 2, \dots, 4\}, i, j \in \{1, 2, \dots, I\}, \\ F(u_i, a_i, m_0) \leq 0, \\ f_\mu(a_i) \leq 0, \mu = 1, 2, i = 1, 2, \dots, I, i \neq j, g = 1, 2, \dots, G_1. \end{cases}$$

Метод локальной оптимизации, рассматриваемый далее, действует на компоненте связности $D_g \subset D_{G_1}$. Итерация метода состоит из двух этапов:

- Определение экстремума функции цели ω^* на текущем множестве D_g .
- Организация перехода от текущей подобласти D_g к смежной области D_{g+1} , такой, что $\omega^* \in D_{g+1}$.

6. Представление (16)-(17) как задачи сепарабельного программирования

Определение [8]. Функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется сепарабельной, если она может быть представлена в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i). \quad (19)$$

Отметим следующее важное свойство задачи (15)-(16).

Свойство 9. Задача (16)-(17) принадлежит к классу задач сепарабельного программирования.

Это свойство действительно справедливо, так как функция цели и все функции ограничений (17) являются линейными, кроме функций $f_k(u_i, u_j, a_i, a_j)$, которые удовлетворяют условию (19).

Если целевая функция и функции ограничений являются сепарабельными, то приближенное решение такой задачи можно найти с использованием метода кусочно-линейной аппроксимации [8].

Классический метод кусочно-линейной аппроксимации предполагает следующий подход.

Пусть $x_i \in [0, \alpha_i]$. Промежуток $[0, \alpha_i]$ разбивают на r_i промежутков обычно равной длины с помощью $r_i + 1$ точек так, что $x_{0i} = 0$, $x_{r_i i} = \alpha_i$. Тогда кусочно-линейная аппроксимация функции F_k имеет вид

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (20)$$

$$\text{где } f_i(x_i) = \sum_{v=1}^{r_i} \lambda_{vi} f_i(x_v), \quad x_k = \sum_{v=0}^{r_k} \lambda_{vk} x_{vk},$$

$$\sum_{v=0}^{r_i} \lambda_{vi} = 1, \quad \lambda_{vi} \geq 0 \quad (21)$$

для всех k и i , причем не более двух чисел λ_{ki} могут быть положительными и должны быть соседними.

Для рассматриваемой задачи метод кусочно-линейной аппроксимации необходимо применять только для функций ограничений задачи. Другими словами, преобразование \mathfrak{Z} имеет вид:

$$D_g \xrightarrow{\mathfrak{Z}} D_g^L, \quad (22)$$

где область D_g^L – результат применения метода кусочно-линейной аппроксимации (преобразования \mathfrak{Z}) к нелинейным ограничениям области D_g .

В системе (17) неравенства вида

$$f_k(u_i, u_j, a_i, a_j) \leq 0, \quad k=3,4, \text{ и } F_4(u_i, a_i, m_0)$$

содержат нелинейные функции.

Функция $f_3(u_1, u_3, a_1)$ представляется в виде

$$y_1 - y_3 + S_1/a_1 = \sum_{i=1}^3 f_{i3}, \quad f_{13} = -y_3, \quad f_{23} = y_1,$$

$f_{33} = S_1/a_1$, где только одна функция – f_{33} – нелинейная.

Функции $F_4(u_i, a_i, m_0)$ представляются в виде

$$y_i - W + \frac{S_i}{a_i} = \sum_{s=1}^2 F_{s4}, \quad F_{13} = y_i - W, \quad F_{23} = S_i/a_i,$$

где только одна функция – F_{23} – нелинейная.

Тогда задача (16)-(17) преобразуется к виду

$$\min_{\omega \in D_g \subset D} Z, \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_h(u_i, a_i, m_0) \leq 0, \quad h=1,2,3, \\ y_i - W + \sum_{v=1}^{r_k} \lambda_{vk} F_{4k}(a_{iv}) \leq 0, \\ f_\mu(a_i) \leq 0, \quad \mu=9,10, \quad i=1,2,\dots,N, \\ f_l(u_i, u_j, a_i, a_j) \leq 0, \quad l \in \{1,2\}, \\ f_{1k} + f_{2k} + \sum_{v=1}^{r_k} \lambda_{vk} f_{3k}(a_v) \leq 0, \quad k \in \{3,4\}, \\ \sum_{v=0}^{r_k} \lambda_{vk} = 1, \\ -\lambda_{vk} \leq 0, \quad v=1,2,\dots,r_k, \quad i, j \in \{1,2,\dots,N\}, \quad i \neq j. \end{array} \right. \quad (24)$$

Рассмотрим **пример**. Задано множество объектов размещения: $T = \{T_1, T_2, T_3\}$. Метрические характеристики (a_i, b_i) , $i=1,2,3$ изменяются в диапазоне

$$a_1 \in [2,4], \quad b_1 \in [4,8], \quad a_2 \in [2,4], \quad b_2 \in [2,4], \quad a_3 \in [3,6], \quad b_3 \in [2,4].$$

При этом $S_1 = 16, S_2 = 8, S_3 = 12$. Область размещения – $T_0 = (x, y | 0 \leq x \leq z, 0 \leq y \leq 8)$.

Начальное размещение (рис. 3) характеризуется вектором параметров размещения $u_0 = (0, 0, 4, 0, 0, 4)$.

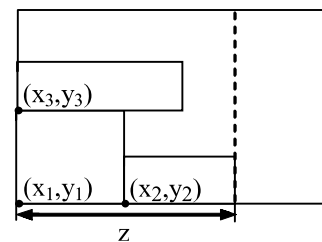


Рис. 3. Начальное размещение

Вектор начальных значений метрических характеристик $\{m_i\}$ имеет вид:

$$(a_{1\max}, b_{1\min}, a_{2\max}, b_{2\min}, a_{3\max}, b_{3\min}) = (4, 4, 4, 2, 6, 2).$$

Система ограничений, описывающая выпуклую подобласть $D_g \subset R^{10}$ области допустимых решений D данной задачи, которая содержит точку u_0 , имеет вид:

$$\begin{cases} -x_i \leq 0, \\ -y_i \leq 0, \\ x_i + a_i - z \leq 0, \\ a_i \leq a_{i\max}, \\ -a_i \leq -a_{i\min}, i = 1, \dots, 3, \\ x_1 - x_2 + a_1 \leq 0, \\ y_i - 8 + S_i/a_i \leq 0, i = 1, \dots, 3, \\ y_1 - y_3 + S_1/a_1 \leq 0, \\ y_2 - y_3 + S_2/a_2 \leq 0, \end{cases} \quad (25)$$

Система ограничений (25) состоит из 21 неравенства, пять последних содержат в качестве левых частей сепарабельные функции.

Функция $f_3(u_1, u_3, a_1) = y_1 - y_3 + S_1/a_1 = \sum_{i=1}^3 f_{i3}$, где $f_{13} = -y_3$, $f_{23} = y_1$, $f_{33} = S_1/a_1$, содержит только одну нелинейную функцию: $f_{33} = S_1/a_1$. Так как переменная $a_1 \in [2, 4]$, положим $a_{01} = 2$, $a_{02} = 3$, $a_{03} = 4$.

Значения функции $f_{33}(a_{01}) = 8$, $f_{33}(a_{02}) = 5.33$, $f_{33}(a_{03}) = 4$.

Используя формулы (20)-(21), определяем

$$\hat{f}_3(u_1, u_3, a_1) = y_1 - y_3 + 8\lambda_{31} + 5.33\lambda_{32} + 4\lambda_{33}, \quad (26)$$

$$a_1 = 2 \cdot \lambda_{31} + 3 \cdot \lambda_{32} + 4 \cdot \lambda_{33}.$$

Аналогично, функция $f_2(u_2, u_3, a_2) = \sum_{i=1}^3 f_{i2}$ содержит только одну нелинейную функцию: $f_{32} = S_2/a_2$.

Так как $a_2 \in [2, 4]$, положим $a_{01} = 2$, $a_{02} = 3$, $a_{03} = 4$.

Тогда $f_{32}(a_{01}) = 2$, $f_{32}(a_{02}) = 2.67$, $f_{32}(a_{03}) = 4$. Используя формулы (20)-(21), определяем

$$\hat{f}_2(u_2, u_3, a_2) = y_2 - y_3 + 4\lambda_{21} + 2.67\lambda_{22} + 2\lambda_{23}, \quad (27)$$

$$a_2 = 2 \cdot \lambda_{21} + 3 \cdot \lambda_{22} + 4 \cdot \lambda_{23}.$$

Функции $F_4(y_i, a_i) = y_i - 8 + S_i/a_i = \sum_{j=1}^2 F_{4j}$, где $F_{41} = -y_i - 8$, $F_{42} = S_i/a_i$, содержат только одну нелинейную функцию: $F_{42} = S_i/a_i$, $i = 1, 2, 3$.

Используя аппроксимацию (20)-(21) для переменной a_1 , получаем

$$\hat{F}_{41}(y_1, a_1) = y_1 - 8 + 8\lambda_{11} + 5.33\lambda_{12} + 4\lambda_{13}. \quad (28)$$

Аналогично, для переменной a_2 получаем

$$\hat{F}_{41}(y_2, a_2) = y_2 - 8 + 4\lambda_{21} + 2.67\lambda_{22} + 2\lambda_{23}. \quad (29)$$

Кусочно-линейная аппроксимация функции

$$F_{42}(y_3, a_3) = y_3 - 8 + S_3/a_3 = \sum_{j=1}^2 F_{4j} \text{ имеет вид:}$$

$$\hat{F}_{42}(y_3, a_3) = y_3 - 8 + 4\lambda_{31} + 2.66\lambda_{32} + 2\lambda_{33}, \quad (30)$$

$$a_3 = 3 \cdot \lambda_{21} + 4.5 \cdot \lambda_{22} + 6 \cdot \lambda_{23}.$$

Подставив найденные значения в систему (25), получим

$$\begin{cases} -x_i \leq 0, \\ -y_i \leq 0, \\ x_i + a_i - z \leq 0, \\ a_i \leq a_{i\max}, \\ -a_i \leq -a_{i\min}, i = 1, \dots, 3, \\ x_2 - x_1 + a_2 \leq 0, \\ y_1 - y_3 + 8\lambda_{31} + 5.33\lambda_{32} + 4\lambda_{33} \leq 0, \\ y_2 - y_3 + 2\lambda_{31} + 2.67\lambda_{32} + 4\lambda_{33} \leq 0, \\ y_1 - 8 + 8\lambda_{11} + 5.33\lambda_{12} + 4\lambda_{13} \leq 0, \\ y_2 - 8 + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{22} + 4\lambda_{23} \leq 0, \\ y_3 - 8 + 4\lambda_{31} + 2.66\lambda_{32} + 2\lambda_{33} \leq 0, \\ -\lambda_{vj} \leq 0, v = 1, 2; j = 1, 2, 3, \\ \lambda_{v1} + \lambda_{v2} + \lambda_{v3} = 1, v = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (31)$$

После проведения данного преобразования количество ограничений системы (25), описывающей выпуклую подобласть $D_g^L \subset R^{16}$, равно 30.

7. Метод решения задачи (16)-(17)

Процесс определения решения задачи выпуклого программирования методом кусочно-линейной аппроксимации включает следующие этапы:

1. Кусочно-линейная аппроксимация вида (16)-(17) каждой из сепарабельных функций ограничений.
2. Построение соответствующей задачи линейного программирования.
3. Решение задачи линейного программирования симплекс-методом или методом активного набора [9].

Замечание 2. Точность решения зависит от точности аппроксимации (количества промежутков τ_i) сепарабельных функций ограничений.

Замечание 3. Размерность пространства переменных задачи возрастает в зависимости от точности аппроксимации сепарабельных функций ограничений.

Замечание 4. Количество ограничений задачи возрастает в зависимости от количества ограничений, содержащих сепарабельные функции.

Замечание 5. Оценка точности аппроксимации не известна.

Метод решения задачи (16)-(17), представленный ниже, позволяет провести аппроксимацию задачи с любой заранее заданной точностью без увеличения размерности пространства переменных, которому принадлежит область допустимых решений задачи.

8. Метод глобальной линейризации задачи (16)-(17)

Рассмотрим иной подход к построению преобразования \mathfrak{Z} вида (22), которое назовем преобразованием \mathfrak{Z}^* :

$$D_g \xrightarrow{\mathfrak{Z}^*} D_g^{L^*}. \quad (32)$$

Рассмотрим гиперболическую поверхность вида:

$$f_3(u_i, u_j, a_i) := a_i(y_i - u_j) + S_i = 0.$$

Пусть $Y_{ji} = y_j - u_i$. В пространстве переменных (a_i, Y_{ji}) поверхность $f_3(u_i, u_j, a_i) = 0$ имеет вид гиперболы, проходящей через точки $(a_{i \min}, b_{i \max})$, $(a_{i \max}, b_{i \min})$.

Назовем данные точки крайними точками гиперболы.

Линеаризуем функцию $a_i Y_{ji} - S_i$.

Замечание 6. Примем в рассмотрение только тот участок Γ гиперболы $f_3(a_i, Y_{ji}) := a_i Y_{ji} - S_i = 0$, который расположен между крайними точками гиперболы, так как только этот участок формирует область допустимых решений задачи D_g .

Прежде всего, построим уравнение прямой Π : $f_{3_лин}(a_i, Y_{ji}) = 0$, проходящее через крайние точки гиперболы (рис. 4).

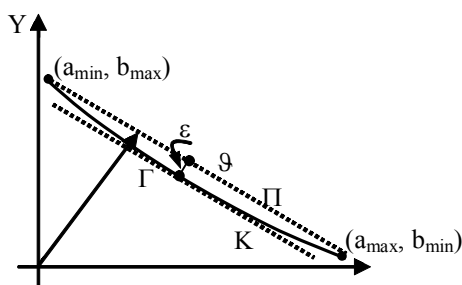


Рис. 4. Начальная аппроксимация

Уравнение прямой Π имеет вид:

$$\frac{a - a_{i \max}}{a_{i \min} - a_{i \max}} = \frac{Y - b_{i \min}}{b_{i \max} - b_{i \min}},$$

или $A \times a + B \times Y + d = 0, \quad (33)$

где

$$A = (b_{i \max} - b_{i \min}), \quad B = (a_{i \min} - a_{i \max}), \\ d = a_{i \max} \times A - b_{i \min} \times B.$$

В нормальном виде уравнение (33) имеет вид:

$$\alpha \times a + \beta \times Y + d^n = 0, \quad (34)$$

где $\alpha = A / \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \beta = B / \sqrt{A^2 + B^2}, \\ d^n = d / \sqrt{A^2 + B^2}.$

Назовем погрешностью линеаризации ϵ величину вида

$$\epsilon = \max_{(a, Y) \in \Gamma} |\vartheta(a, Y)|, \quad (35)$$

где $\vartheta(a, Y)$ – расстояние от точки (a, Y) кривой Γ до прямой Π .

Проведем оценку погрешности линеаризации ϵ . Данную задачу можно рассматривать как задачу условной минимизации двумерной функции $\epsilon = \vartheta(a, Y)$ на множестве G вида:

$$(a^*, Y^*) = \arg \max_{(a, Y) \in \Gamma} |\vartheta(a, Y)|. \quad (36)$$

Задача (36) допускает естественное геометрическое толкование. Для определения ее точного решения предлагается следующий метод.

9. Алгоритм вычисления начальной оценки аппроксимации ϵ

1. Построим касательную K к кривой G такую, что $K \parallel \Pi$. Уравнение прямой K имеет вид:

$$\alpha \times a + \beta \times Y + d_k = 0.$$

2. Определим координаты (e_1, e_2) точки касания E (см. рис.4):

$$E = G \cap K.$$

Очевидно, координаты (e_1, e_2) точки E удовлетворяют системе уравнений вида:

$$\begin{cases} \alpha \times e_1 + \beta \times e_2 + d_k = 0, \\ e_1 e_2 = S. \end{cases} \quad (37)$$

Выражая, например, переменную e_2 из первого уравнения системы (37) и подставляя во второе, получаем квадратное уравнение вида

$$e_1(-d_k - \alpha \times e_1) = S\beta,$$

или $\alpha \times e_1^2 + d_k \times e_1 - S\beta = 0. \quad (38)$

Уравнение (38) имеет единственное решение, если его дискриминант $D = d_k^2 - 4S\beta$ равен нулю. Другими словами, если параметр d_k имеет вид: $d_k = 2\sqrt{S\beta}$,

то система нелинейных уравнений (37) имеет единственное решение, а именно, координаты точки E .

3. Опустим перпендикуляр из точки E на прямую Π . Расстояние $\epsilon = |E - J|$ является искомым (см. рис 4) погрешностью аппроксимации: $\epsilon = d^n - d_k^n$.

Очевидно, точность начальной аппроксимации ϵ является функцией количества K точек разбиения: $\epsilon = \varphi(K)$.

Пусть точность ϵ удовлетворяет исследователя.

Тогда достаточно заменить функцию $f_3(u_i, u_j, a_i) = a_i(y_i - u_j) + S_i$ на ее линейную аппроксимацию $f_3^{лин} = \alpha \times a + \beta \times (y_i - u_j) + d^n$.

Продолжение **примера**. Преобразование \mathfrak{Z}^* (38) для данной задачи состоит лишь в замене нелинейных функций двух последних неравенств системы (33) соответствующими линейными функциями.

Функции $y_2 - y_3 + S_2/a_2$ соответствует линейная функция $(-1/\sqrt{2}) \times a + (-1/\sqrt{2}) \times (y_3 - y_2) + (6/\sqrt{2})$.

Функции $y_1 - y_3 - S_1/a_1$ соответствует линейная функция $(-3/\sqrt{10}) \times a + (-1/\sqrt{10}) \times (y_1 - y_3) + 16/\sqrt{10}$.

Для построения кусочно-линейной аппроксимации функций $F_{4i}(y_i, a_i) = y_i - W + S_i/a_i \leq 0$ определим ординаты $y_i(a_{i \min})$, $y_i(a_{i \max})$ крайних точек соответствующих гипербол по формулам:

$$y_i(a_{i \min}) = W - S_i/a_{i \min}, \quad y_i(a_{i \max}) = W - S_i/a_{i \max}.$$

Тогда $y_1(a_{1 \min}) = 0$, $y_1(a_{1 \max}) = 4$, $y_2(a_{2 \min}) = 4$,

$$y_2(a_{2 \max}) = 6, \quad y_3(a_{3 \min}) = 4, \quad y_3(a_{3 \max}) = 6.$$

Тогда $\hat{F}_{41}(y_1, a_1) = y_1 - 2a_1 - 4$,

$$\hat{F}_{42}(y_2, a_2) = y_2 - a_2 - 2, \quad \hat{F}_{43}(y_3, a_3) = 3y_3 - 2a_3 - 6.$$

Итак, преобразование \mathfrak{Z}^* , примененное к системе (33), приводит к линейной системе неравенств вида:

$$\begin{cases} -x_i \leq 0, \\ -y_i \leq 0, \\ x_i + a_i - z \leq 0, \\ a_i \leq a_{i \max}, \\ -a_i \leq -a_{i \min}, \quad i = 1, \dots, 3, \\ y_1 - 2a_1 - 4 \leq 0, \\ y_2 - a_2 - 2 \leq 0, \\ 3y_3 - 2a_3 - 6 \leq 0, \\ x_2 - x_1 + a_2 \leq 0, \\ y_1 - y_3 - 3a_1 + 16 \leq 0, \\ y_2 - y_3 - a_2 + 6 \leq 0. \end{cases} \quad (39)$$

После проведения преобразования \mathfrak{Z}^* выпуклая линейная подобласть $D_g^L \subset \mathbb{R}^{10}$ принадлежит тому же пространству, что и исходная подобласть D_g . Более того, однократное применение данного преобразования не увеличивает количества ограничений задачи.

Таким образом, итерационный метод поиска локального минимума задачи (18) заключается в выполнении следующих шагов.

Шаг 1. Задание точности аппроксимации ε_0 .

Шаг 2. Проведение линеаризации \mathfrak{Z}^* (38) ограничений задачи при обеспечении условия $\varepsilon_0 \geq \varepsilon$, где

$$\varepsilon = \max_{(a, Y) \in \Gamma} |g(a, Y)| \quad (\text{условие 35}).$$

Шаг 3. Решение задачи (18) как набора задач линейного программирования вида $\omega = \arg \min Z$.

$$\omega \in D_g^{L*}$$

10. Выводы и направления дальнейших исследований

Впервые предложен метод кусочно-линейной аппроксимации области допустимых решений задачи, позволяющий с наперед заданной точностью представить задачу (18) с нелинейными ограничениями как задачу линейного программирования. Предложена модификация итерационного метода поиска локального минимума задачи (16-17), учитывающая сформулированные свойства 1-8 области допустимых решений задачи.

Задача размещения прямоугольных объектов в заданной области вида (1)-(17) сводится к решению конечного набора задач выпуклого программирования. Каждая такая подзадача может быть решена приближенно как задача линейного программирования. Описаны два подхода проведения такой линеаризации. Второй подход – метод глобальной линеаризации – допускает явное вычисление точности аппроксимации и получение аппроксимационного линейного множества с заданной точностью. В дальнейшем предусматривается проведение численных экспериментов.

Литература: 1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 266 с. 2. Управление проектами: Справочное руководство / Под ред. И.И. Мазура и В.Д. Шапиро. М.: Высш. шк., 2000. 875 с. 3. Stoyan, Yu. G. Ф-function of non-convex polygons with rotations // Проблемы машиностроения. 2001. Т 4, №3. Р. 78-90. 4. Софронова М. С. Математичне моделювання розміщення опуклих n-вимірних політопів у n-вимірному паралелепіпеді: Автореф. дис...канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02/Ін-т проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Харків, 2007. 18 с. 5. Чуб И.А., Новожилова М.В. Аналитическое описание условия принадлежности объекта с изменяемыми метрическими характеристиками области размещения // Системы обработки информации. 2002. Вып. 6(22). С.248-252. 6. Мурин М.Н., Новожилова М.В., Чуб И.А. Формализация ограничений одной задачи распределения ресурсов проекта // Науковий вісник будівництва. 2007. Вып. 43. С. 229-232. 7. Stoyan Yu.G., Novozhilova M.V., Kartashov A.V. Mathematical Model and Method of Searching for a Local Extremum for the Non Convex Oriented Polygons Allocation Problem // European Journal of Operational Research 92, 1996. P.193-210. 8. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш.шк., 1986. 319с. 9. Гилл Дж., Мюррей К., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Наука, 1984. 459с.

Поступила в редколлегию 01.12.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Стоян Ю.Г.

Новожилова Марина Владимировна, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. КМИТ, ХГТУСА. Научные интересы: теория и методы оптимизационного геометрического проектирования.

Чуб Игорь Андреевич, канд. техн. наук, доцент, ученый секретарь УГЗ Украины. Научные интересы: математическое моделирование сложных технических социально-экономических систем.

Мури́н Михаи́л Николаевич, преподаватель УГЗ Украины. Научные интересы: информационные технологии, вычислительные методы.