2. *Волноводы* с поперечным сечением сложной формы / Под ред. В. М. Седых. – Харьков: Вища шк., 1979. – 128 с.
3. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
4. *Максименко-Шейко К. В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К. В. Максименко-Шейко. – Харьков: Ин-т пробл. машиностроения НАН Украины, 2009. – 306 с.
5. *Никольский В. В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики / В. В. Никольский. – М.: Наука, 1967. – 459 с.
6. *Кравченко В. Ф.* Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики / В. Ф. Кравченко, М. А. Басараб. – М.: Физматлит, 2004. – 308 с.
7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Поступила в редакцию
11.11.10

УДК 519.85

**И. А. Чуб***, канд. техн. наук
**А. С. Иванилов****, д-р эконом. наук
**М. В. Новожилова****, д-р физ.-мат. наук

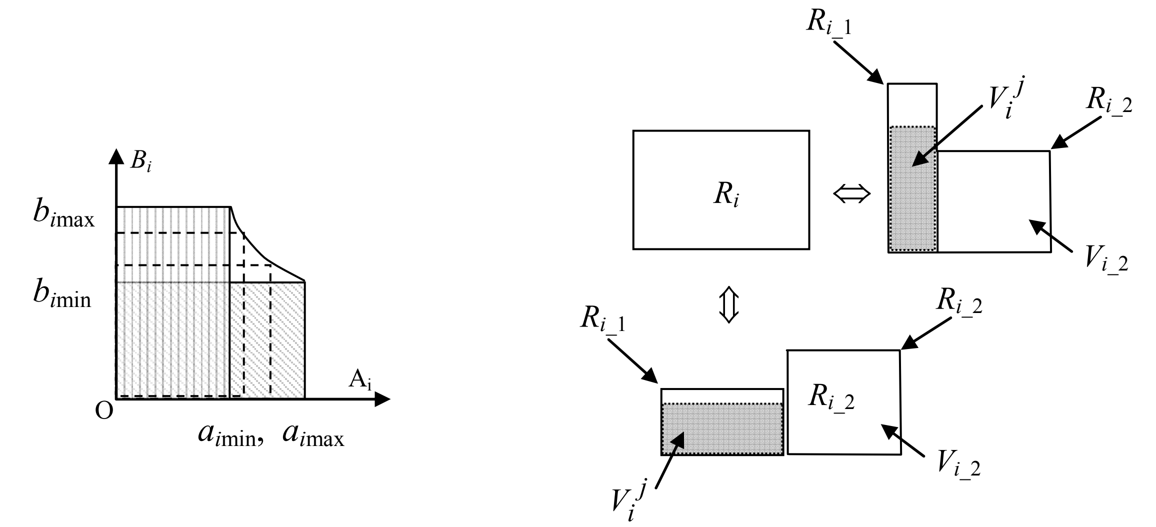
* Национальный университет гражданской защиты Украины
(г. Харьков, E-mail: chubia@nuczu.edu.ua)
** Харьковский государственный технический университет
строительства и архитектуры (E-mail: novozhilova@cstuca.kharkov.ua)

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРОЕКТА КАК ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ИЗМЕНЯЕМЫМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

*Построена математическая модель многокритериальной задачи распределения ограниченных ресурсов проекта как оптимизационной задачи размещения конечного набора геометрических объектов с переменными метрическими характеристиками и пространственной формой. Предложен метод ее решения и проведены численные исследования на примере оптимизации плана выполнения работ по реконструкции тепловых сетей в г. Харькове.*

*Побудована математична модель багатокритеріальної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту як оптимізаційної задачі розміщення кінцевого набору геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками й просторовою формою. Запропонований метод її розв’язання й проведені чисельні дослідження на прикладі оптимізації плану виконання робіт з реконструкції теплових мереж у м. Харкові.*

**Актуальность исследования и анализ научной литературы.** Задачи оптимального управления ограниченными ресурсами различной физической природы (финансовые, временные, кадровые и т.д.), в том числе задачи оптимального распределения ресурсов, возникают во многих областях практической деятельности. Ограниченность временного ресурса означает, что речь идет об управлении ресурсами проекта. На сегодняшний день имеется значительное число научных публикаций и множество инструментальных средств решения задач такого рода, основанных на использовании методического арсенала современной прикладной математики [1–4]. В данной работе развивается подход, предложенный в публикациях [5, 6] и основанный на использовании такого раздела теории оптимизационного гео-




а) б)

***Рис. 1. Представление работы $R_i$:***
а) – при различных значениях ($a_i$, $b_i$) как односвязного множества;
б) – с учетом возможности разбиения

метрического проектирования [7] как размещение геометрических объектов с переменными метрическими характеристиками и пространственной формой в ограниченной области размещения [8].

Целями исследования являются: анализ неформальной постановки задачи, выделение и формализация частных критериев качества решения и набора ограничений на область допустимых решений, построение методики решения, создание программного обеспечения и проведение численных экспериментов.

**Постановка задачи, построение модели операции.** Анализ практических постановок задач управления ресурсами инвестиционно-строительных проектов, включая проекты реконструкции инженерных коммуникаций, показал, что типичной является следующая задача календарного планирования [4].

Пусть имеется проект, состоящий из $N$ работ (операций) $R = \{R_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. На множестве работ $R$ задано условие частичной упорядоченности, определенное конкретной последовательностью выполнения работ. Для каждой работы $R_i$ известен ее объем $V_i$ (чел·час), $V_i = \text{const}$. На проект в целом в каждый момент времени может быть выделено не более $W$ (чел) исполнителей работ. Таким образом, ресурсы проекта можно представить как область $R_0$ двухмерного пространства $TOW$, где $T$ – время проекта и $W$ – трудовой ресурс проекта в каждый момент времени. В собственной системе координат $T_iO_iW_i$ каждая работа $R_i$ может быть представлена как прямоугольный геометрический объект с изменяемыми метрическими характеристиками. В простейшем случае $R_i$ – прямоугольник $R_i = R_i(a_i, b_i)$, $a_i x b_i = V_i$, $a_i, b_i$ – var. При этом характеристика $a_i$ означает длительность, а характеристика $b_i$ – число исполнителей работы $R_i$ в каждый момент времени (рис. 1).

*Замечание 1*. Объем $V_i$ является константой для работы $R_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

*Замечание 2*. На основе учета технологических характеристик каждой работы, условий техники безопасности труда и др. для каждой работы $R_i$ могут быть выделены предельно допустимые значения ресурсов для ее выполнения

$$a_i \in A_i,\quad b_i \in B_i, \text{ где } A_i = [a_{i\,\min}, a_{i\,\max}]\ B_i = [b_{i\,\min}, b_{i\,\max}],\ a_{i\,\min} > 0,\ b_{i\,\min} > 0.$$

Имеет место соотношение $b_i = V_i/a_i$ (рис. 1, а).

При дискретном характере задания ресурсов с учетом

$$V_i \le a_{i\min}\times b_{i\max},\quad V_i \le a_{i\max}\times b_{i\min}.$$

Положение каждой работы $R_i(u_i)$ в общей системе координат $TOW$ характеризуется вектором параметров размещения $u_i = (t_i, w_i)$.

*Замечание 3*. Особенностью данной постановки есть расширение понятия «частичная упорядоченность работ». В классическом подходе [4] условие $R_i \succ R_j$ означает выполнение работы $R_j$ непосредственно после работы $R_i$. В рамках текущей постановки работа $R_j$ может осуществляться и параллельно с работой $R_i$, если выполнен необходимый минимальный объем $V_i^j$ (на рис. 1, б выделен темным цветом) работы $R_i$ для начала (и продолжения) выполнения работы $R_j$. Например, при выполнении проекта реконструкции тепловых сетей операция «Производство земляных работ при раскрытии тепломагистрали» не может начаться, если не выполнен достаточный объем работы «Разборка асфальтобетонного покрытия».

Таким образом, каждая работа $R_i$ может быть представлена как объединение двух работ $R_{i1}(a_{i1}, b_{i1}, t_{i1}, w_{i1})$, $R_{i2}(a_{i2}, b_{i2}, t_{i2}, w_{i2})$, таких, что соответствующие объемы работ удовлетворяют условию (рис. 1, б)

$$V_{i\_1} + V_{i\_2} = V_i, \quad V_{i\_1} \ge V_i^j \quad \text{или} \quad a_{i\_1} \times b_{i\_1} + a_{i\_2} \times b_{i\_2} = V_i,\ a_{i\_1} \times b_{i\_1} \ge V_i^j .$$

При этом сохраняется условие непрерывности выполнения работы по времени и максимальной неизменности состава исполнителей

$$t_{i\_2} = t_i + a_{i\_1}, \quad w_{i\_2} = w_{i\_1} = w_i.$$

При такой постановке для работы $R_i$ параметры $\mu_i = (t_{i\_1}, w_{i\_1}, a_{i\_1}, a_{i\_2}, b_{i\_1}, b_{i\_2})$ являются эндогенными.

*Замечание 4*. Множество работ $R_j$, непосредственно следующих за $R_i$, может состоять более чем из одного элемента: $j \in \{1, 2, \ldots, J\}$, $1 \le J \le N - 1$. В данной работе для определения одного значения $V_i^j$ используется мажорирующая оценка

$$V_i^{j*} = \max_{j \in J} V_i^j .$$

Итак: *необходимо построить оптимальный календарный график $G(T_R, \Delta W)$ проекта $R$, где $T_R$ – общее время выполнения проекта,* $\Delta W = \max\limits_{t \in \{1,2,\ldots T_R\}} W_t - W_{t-1}$.

Формальная постановка задачи имеет вид

$$T_R \to \min_{\mu \in D \subset E^{6N}} , \tag{1}$$

$$\Delta W \to \min_{\mu \in D \subset E^{6N}} , \tag{2}$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)$; $D \subset E^{6N}$ – область допустимых решений, выделяемая следующей системой ограничений на размещение работ:

$$R_i \subset R_0, \tag{3}$$

$$\operatorname{int} R_i \bigcap \operatorname{int} R_j = \varnothing , \tag{4}$$

$$R_m \succ R_n , \quad m > n, \quad m, n \in \{1, 2, \ldots, N\}, \tag{5}$$

$$a_{i\_k} \in A_i b_{i\_k} \in B_i, \quad k = 1, 2; \quad i, j = 1, 2, \ldots, N, \quad i \ne j \tag{6}$$

$$V_{i\_1} + V_{i\_2} = V_i, \quad V_{i\_1} \ge V_i^j . \tag{7}$$

Ограничение (3) определяет размещение набора объектов $R$ в $R_0$ – условие наличия каждой работы в составе проекта, ограничение (4) определяет условия попарного взаимного непересечения объектов – невозможность использования одного ресурса двумя работами одновременно, ограничение (5) – условие частичной упорядоченности работ, условие (6) – ограничение на величину ресурсов работ, ограничение (7) – условие сохранения объема работы, замыкающее систему.

Рассматриваемая оптимизационная задача (1–2, 3–7) по своей постановке является двухкритериальной, где оптимальное значение минимаксного критерия (2) означает максимальное обеспечение свойства выравнивания ресурсов проекта.

*Утверждение 1*. Критерии $\Delta W$ и $W$ вида

$$\Delta W = \max_{t\in\{1,2,\dots T_R\}} W_t - W_{t-1}, \tag{8}$$

$$W = \max_{t\in\{1,2,\dots T_R\}} W_t \tag{9}$$

в терминах основной задачи исследования являются эквивалентными.

Справедливость Утверждения 1 непосредственно следует из необходимости обеспечения минимальных затрат ресурса $W$ в каждый момент времени проекта.

*Следствие 1*. Переход критерия (2) от вида (8) к виду (9) позволяет определить область $R_0$ как полосу в системе координат $TOW$.

**Аналитическое описание ограничений (3)–(5) оптимизационной задачи** осуществляется с помощью аппарата Ф-функций [5, 7–9].

Пусть $\Phi_{i0}(t_i, w_i, a_{i\_1}, a_{i\_2}, b_{i\_1}, b_{i\_2}, W, T_R)$ – функция, аналитически описывающая ограничение (3), удовлетворяет условию:

$$\Phi_{i0}(t_i, w_i, a_{i\_1}, a_{i\_2}, b_{i\_1}, b_{i\_2}, W, T_R) \ge 0,$$

при этом

$$\Phi_{i0}(t_i, w_i, a_{i\_1}, a_{i\_2}, b_{i\_1}, b_{i\_2}, W, T_R) = \min\{f_1(\mu_i), f_2(\mu_i), f_3(\mu_i), f_4(\mu_i), f_5(\mu_i)\},$$

где $f_1(\mu_i) = W - w_i - b_{i\_1}$, $f_2(\mu_i) = W - w_i - b_{i\_2}$, $f_3(\mu_i) = T - t_i - a_{i\_1} - a_{i\_2}$, $f_4(\mu_i) = w_i$, $f_5(\mu_i) = t_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Тогда условие (3) описывается системой $F_0(\mu) \ge 0$ линейных неравенств

$$F_0(\mu) := \{f_h(\mu_i)\}, \quad h = 1, \dots, 4; \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$\Phi_{ij}(\mu_i, \mu_j)$-функция, задающая условие (4), объектов $R_i(\mu_i)$ и $R_i(\mu_j)$, имеет вид

$$\Phi_{ij}(\mu_i, \mu_j) \ge 0,$$

$$\Phi_{ij}(\mu_i, \mu_j) = \max\{f_6(\mu_i, \mu_j), f_7(\mu_i, \mu_j), f_8(\mu_i, \mu_j), f_9(\mu_i, \mu_j), f_{10}(\mu_i, \mu_j) f_{11}(\mu_i, \mu_j),$$
$$\min\{f_{12}^1(\mu_i, \mu_j), f_{12}^2(\mu_i, \mu_j)\}, \min\{f_{13}^1(\mu_i, \mu_j), f_{13}^2(\mu_i, \mu_j)\}\},$$

где $f_6(\mu_i, \mu_j) = (t_i + a_{i\_1}) - (t_j + a_{j\_1} + a_{j\_2})$, $f_7(\mu_i, \mu_j) = t_j - (t_i + a_{i\_1})$, $f_8(\mu_i, \mu_j) = t_i - (t_j + a_{j\_1})$, $f_9(\mu_i, \mu_j) = (t_j + a_{j\_1}) - (t_i + a_{i\_1} + a_{i\_2})$, $f_{10}(\mu_i, \mu_j) = t_i - (t_j + a_{j\_1} + a_{j\_2})$, $f_{11}(\mu_i, \mu_j) = t_j - (t_i + a_{i\_1} + a_{i\_2})$, $f_{12}^1(\mu_i, \mu_j) = w_j - (w_i + b_{i\_1})$, $f_{12}^2(\mu_i, \mu_j) = w_j - (w_i + b_{i\_2})$, $f_{13}^1(\mu_i, \mu_j) = w_i - (w_j + b_{j\_1})$, $f_{13}^2(\mu_i, \mu_j) = w_i - (w_j + b_{j\_2})$.

$\Phi_{ij}(\mu_i, \mu_j)$-функция представляется набором линейных неравенств

$$F_{ij}(\mu_i, \mu_j) \ge 0 := \left\langle \begin{array}{ll} f_k(\mu_i, \mu_j) \ge 0, & k = 6,\dots,11, \\ \left\{ f_{12}^h(\mu_i, \mu_j) \ge 0, \right. & h = 1,2, \\ \left\{ f_{13}^h(\mu_i, \mu_j) \ge 0, \right. & h = 1,2. \end{array} \right.$$

На рис. 2 показаны различные проекции 0-уровня $\Phi_{ij}(\mu_i, \mu_j)$-функции на плоскость $T_iO_iW_i$. При этом звенья ломаных помечены соответствующими функциями ограничений, составляющих 0-уровень $\Phi_{ij}(\mu_i,\mu_j)$-функции.

Таким образом, $D$ представляется системой равенств и неравенств

$$F_0(\mu) \ge 0, \tag{10}$$

$$F_{ij}(\mu_i, \mu_j) \ge 0, \tag{11}$$

$$t_i - (t_j + a_{j\_1}) = 0, \quad i > j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, \tag{12}$$

$$V_{i\_1} + V_{i\_2} = V_i, \quad V_{i\_1} \ge V_i^j, \tag{13}$$

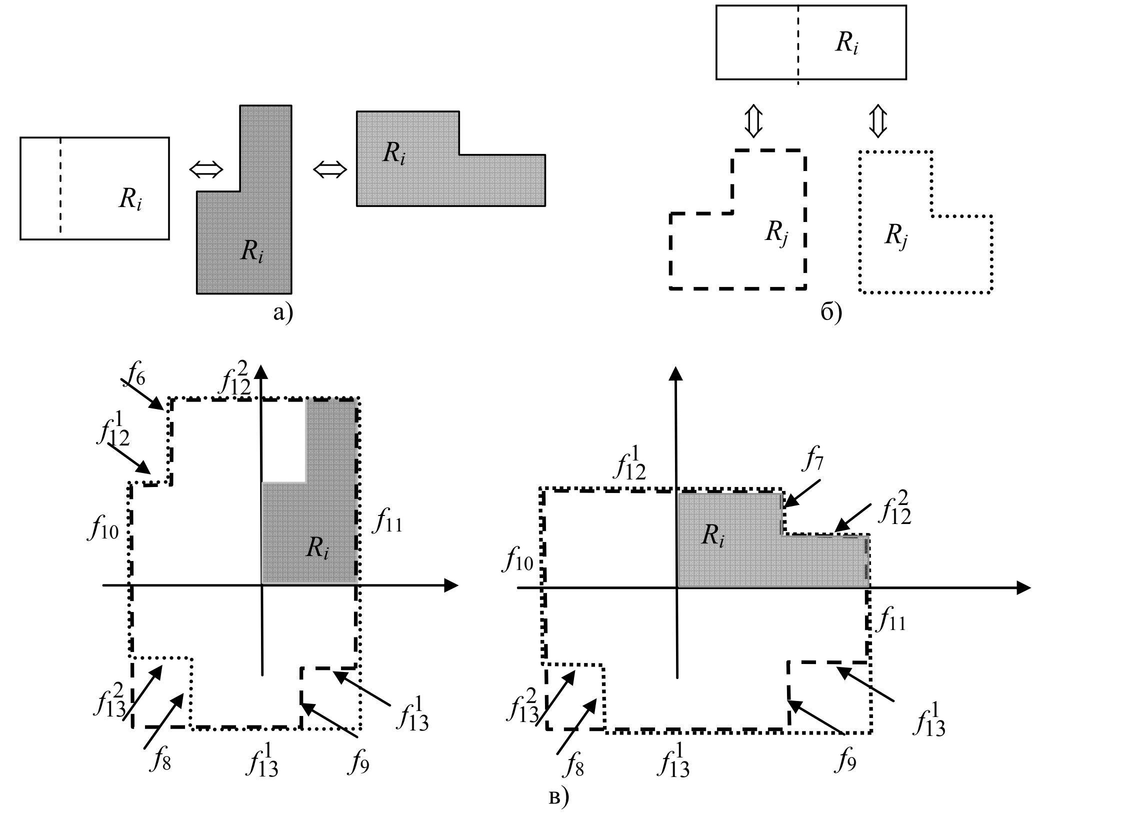



***Рис. 2. 0-уровень Ф-функции при условии:***
а) – различные формы объекта $R_i$ при сохранении его объема $V_i$; б) – различные формы объекта $R_j$ при сохранении его объема $V_j$; в) – различные сечения 0-уровня Ф-функции

$$a_{i\_k} \in A_{i\_k}, \quad b_{i\_k} \in B_{i\_k}, \quad k = 1, 2, \quad i, j = 1, 2, ..., N, i \neq j. \tag{14}$$

**Методика сведения задачи (1), (2), (10)–(14) к однокритериальной постановке** заключается в трансформации многокритериальной задачи в однокритериальную со скалярным критерием. В данном исследовании используется принцип последовательной оптимизации (лексикографического упорядочения). При этом все частные критерии ранжируются в порядке убывания важности, т.е. на множестве критериев устанавливается линейный порядок. В этой последовательности решаются однокритериальные оптимизационные задачи по каждому частному критерию. Таким образом, задача (1), (2), (10)–(14) может быть представлена следующими двумя однокритериальными задачами:

***<u>Задача 1</u>.*** Определение критического пути

$$T_R \to \min_{\mu \in D^1 \subset E^{6N}}, \tag{15}$$

где область $D \subseteq D^1$.

В управлении ресурсами проекта возможны два варианта задачи (15):

*<u>Задача 1.1.</u>* $W = \infty \Rightarrow D \subset D^1$ – трудовые ресурсы не ограничены.

В этом случае условие (3) описывается системой $F_0^1(\mu_i) \geq 0$ $3N$ линейных неравенств, функции ограничений которых имеют вид

$$F_0^1(\mu_i): \{t_i, T - t_i - a_{i\_1} - a_{i\_2}, w_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

<u>Задача 1.2.</u> $W = \text{const} \Rightarrow D = D^1$.

***<u>Задача 2.</u>*** Задача выравнивания ресурсов

$$W \to \min_{\mu \in D^2 \subset E^{6N}}, \tag{16}$$

где область $D \subseteq D^2$, причем $f_3^2(\mu_i) = T_R - t_i - a_{i\_1} - a_{i\_2}$.

**Основные свойства оптимизационных задач (15), (16),** вытекающие из их математических постановок. Предположим, что множества $A_{i\_k}$, $B_{i\_k}$ из (14) непрерывны, т. е. область $D$ обладает свойством непрерывности. Тогда имеют место

*Свойство 1.* Целевые функции задач (15)–(16) являются линейными.

*Свойство 2.* Ограничения области допустимых решений, как первой, так и второй задачи содержат линейные и нелинейные функции.

*Свойство 3.* Область $D \subset E^{6N+1}$ – невыпуклое, несвязное, в общем случае неограниченное точечное множество, имеющее кусочно-гладкую границу $\Psi = \mathrm{Fr}D$, $\Psi \subset R^{6N}$. Каждая компонента связности области $D$ является многосвязной.

*Свойство 4.* Область $D$ допускает представление $D = \bigcup\limits_{g=1}^{G} D_g$, $G = O(4^N)$.

*Свойство 5.* Условие (12) частичной упорядоченности позволяет значительно сократить число рассматриваемых подобластей области $D$.

*Свойство 6.* Так как задача (15) в качестве целевого функционала имеет общее время выполнения проекта, то естественно предположить, что на данном этапе решения $V_{i\_1} = V_i^j$. Другими словами, при частичной упорядоченности вида $R_i \succ R_j$, работа $R_j$ начинает выполняться, как только выполнен необходимый для нее объем работы $R_i$. При таком предположении объем $V_{i\_1} = \mathrm{const}$, и имеют место следующие ограничения:

$$a_{i\_1}b_{i\_1} = V_i^j .$$

$$a_{i\_2}b_{i\_2} = V_i - V_i^j .$$

Тогда $b_{i\_1} = \dfrac{V_i^j}{a_{i\_1}}$, $b_{i\_2} = \dfrac{V_i - V_i^j}{a_{i\_2}}$ и функции $f_{12}^h$, $f_{13}^h$, $h = 1, 2$ приобретают вид

$$f_{12}^1(\mu_i, \mu_j) = w_j - (w_i + \frac{V_i^j}{a_{i\_1}}), \quad f_{12}^2(\mu_i, \mu_j) = w_j - (w_i + \frac{V_i - V_i^j}{a_{i\_2}}), \tag{17}$$

$$f_{13}^1(\mu_i, \mu_j) = w_i - (w_j + \frac{V_j^k}{a_{j\_1}}), \quad f_{13}^2(\mu_i, \mu_j) = w_i - (w_j + \frac{V_j - V_j^k}{a_{j\_2}}), \quad R_j \succ R_k . \tag{18}$$

Очевидно, что количество ограничений системы (10)–(14) становится меньше на $N$ ограничений (исключаются из рассмотрения ограничения вида (13)).

*Свойство 7.* Аналогично [6], функции $f_{12}^1(\mu_i, \mu_j) = w_j - (w_i + \dfrac{V_i^j}{a_{i\_1}})$, $f_{12}^2(\mu_i, \mu_j) = w_j - (w_i + \dfrac{V_i - V_i^j}{a_{i\_2}})$ являются выпуклыми.

*Свойство 8.* Функции $f_{12}^1(\mu_i, \mu_j) = w_j - (w_i + \dfrac{V_i^j}{a_{i\_1}})$, $f_{12}^2(\mu_i, \mu_j) = w_j - (w_i + \dfrac{V_i - V_i^j}{a_{i\_2}})$, $W - (w_i + \dfrac{V_i^j}{a_{i\_1}})$, $W - (w_i + \dfrac{V_i - V_i^j}{a_{i\_2}})$ являются сепарабельными.

В работе [5] изучен вопрос линейной аппроксимации такого рода функций и предложен метод глобальной линеаризации, позволяющий сохранить размерность пространства переменных, в котором рассматривается задача. Количество дополнительных линейных ограничений зависит от точности аппроксимации, которая, в отличие от классического подхода, является экзогенным параметром.

**Методика решения однокритериальной задачи (15).** Для определения глобального минимума задачи (15) необходимо решить $G$ задач выпуклого программирования с линейной функцией цели. В работе реализован алгоритм

Шаг 1. Решение релаксированной задачи 1.1 – определение оптимального значения вектора эндогенных параметров $\mu^*$ и функции цели $T_R(\mu^*)$.

Шаг 2. Если $\mu^* \in D$, то задача (15) решена. Если $\mu^* \notin D$, то – решение релаксированной задачи 1.2, т. е. определение допустимой точки $\mu^*_{\text{доп}} \in D$, такой, что

$$W(\mu^*_{\text{доп}}) - W(\mu^*) \to \min. \tag{19}$$

Рассмотрим более подробно шаги алгоритма с учетом следующих замечаний.

*Замечание 6*. Согласно Свойству 6 размерность области допустимых решений $D$ уменьшается и составляет $4N + 1$ (параметры $b_{i\_1}$ и $b_{i\_2}$ становятся зависимыми).

*Замечание 7*. Решение релаксированной задачи 1.1 предполагает, что параметры $a_{i\_1}$, $a_{i\_2}$ ($b_{i\_1}$ и $b_{i\_2}$ соответственно) определяются

$$a_{i\_1} = a_{i\_1\min}, \quad a_{i\_2} = a_{i\_2\min}, \quad b_{i\_1} = \frac{V_i^j}{a_{i\_1}}, \quad b_{i\_2} = \frac{V_i - V_i^j}{a_{i\_2}}.$$

*Замечание 8*. Свойство 6 задает перестановку номеров объектов, упорядочивая множество объектов по координате $t_i$. Поэтому для решения задачи 1.1 (Шаг 1) можно использовать модифицированный метод последовательно-одиночного размещения, $j$-я итерация которого в данном случае имеет вид

1) $\{\mu_1^*, \mu_2^*, ..., \mu_{J-1}^*\} = \text{fix}$;

2) $t_j^* = \max\limits_{y \in Y}(t_y^* + a_{y\_1})$, где $Y$ – множество объектов, удовлетворяющих условию: $R_y \succ R_j$;

3) $w_j^* = \min\limits_{m \in M, l=1,2}(w_m + b_{m\_l})$, при условии, что $\operatorname{int} R_j(t_j^*, w_j^*) \cap \bigcup\limits_{k=1}^{j-1} \operatorname{int} R_k(t_k^*, w_k^*) = \varnothing$.

Полученная в результате решения задачи 1.1 (Шаг 1) точка ($\mu^*$, $T_R(\mu^*)$) является начальной для итерационного процесса решения задачи 1.2 (Шага 2).

Схема решения задачи 1.2 включает в себя 7 шагов

1) определение $W(\mu^*) = \max\limits_{i=1,2,...,N, l=1,2}(w_i^* + b_{i\_l})$.

Если $W(\mu^*) \le W$ – задача решена. В противном случае – переход к 2);

2) выделение множества $R_K$ критических операций, составляющих критический путь проекта, и множества $R_{\overline{K}}$ некритических операций.

Положение критических операций определяется вектором $\mu_K^*$, для задачи 1.2 параметры $\{t_k, a_{k\_1}, a_{k\_2}\}$, $k \in 1, 2, \ldots, K$ вектора $\mu_K^*$ считаются экзогенными. Множество критических операций и число элементов этого множества обозначим буквой $K$.

*Замечание 9*. Работа $R_i$ может быть представлена в виде $R_i = R_{i\_1} \cup R_{i\_2}$, поэтому возможна ситуация, когда $R_{i\_1} \in R_K$, $R_{i\_2} \in R_{\overline{K}}$;

3) определение дополнительных ограничений на диапазон размещения некритических операций $R_{\overline{K}}$, определяемых построенным вариантом критического пути, так называемых свободных резервов времени $FF_{\overline{K}}$

$$FF_{\overline{K}} = [t_{\overline{K}}^*, t_{\overline{K}}^{\max}], \text{ где } t_{\overline{K}}^{\max} = \min_{z \in Z} t_z^*,$$

где $Z$ – количество объектов, удовлетворяющих условию $R_z \succ R_j$.

Тогда дополнительные ограничения представляются неравенствами

$$t_K + a_{1\_K} + a_{2\_K} \le t_{\overline{K}}^{\max}, \quad t_K \ge t^*;$$

4) определение множеств $D_g$, $g = 1, 2, \ldots, G_{\mu*}$, таких, что $\mu^* \in \bigcup_{g=1}^{G_{\mu*}} D_g$;

5) выделение текущего множества $D_g$ – построение системы ограничений $F_g(\mu)\geq 0$, выделяющих данное множество;

6) построение для каждой из сепарабельных функций (17-18) ограничений системы $F_g(\mu)\geq 0$, определяющих размещение некритических операций $R_{\overline{K}}$, кусочно-линейной аппроксимации [6] вида

$$\alpha_\eta \times t_i + \beta_\eta \times a_i + d_\eta^n = 0,$$

где $\alpha_\eta, \beta_\eta, d_\eta^n$ – функции координат узлов аппроксимации, $\eta = 1, 2, \ldots, H$.

Как результат – получение кусочно-линейной аппроксимации $D_g^L$ множества $D_g$ с наперед заданной точностью;

7) решение оптимизационной задачи линейного программирования

$$W(\mu^*_{\text{доп}}) - W(\mu^*) \to \min_{D_g^L}$$

симплекс-методом или методом активного набора [10].

*Замечание 10.* Точность решения зависит от точности аппроксимации (количество промежутков $r_i$) сепарабельных функций (17)–(18) ограничений (10)–(11).

*Замечание 11.* Методики решения задач (15) и (19) аналогичны. Отличие состоит в том, что начальная точка решения задачи (19) является недопустимой, а начальная точка задачи (15) принадлежит области допустимых решений.

*Замечание 12.* Если решение задачи (19) не является допустимой точкой области $D$, то необходимо принимать решения об увеличении числа непосредственных исполнителей работ.

Программная реализация осуществлена в среде визуального проектирования Borland Delphi 7.0, язык программирования Object Pascal 6.0.

**Результаты численных экспериментов**

Рассматривалась задача составления календарного графика выполнения работ по реконструкции тепловых сетей между камерами МК-9607 и МК-9608 по Московскому проспекту, 254Б в г. Харькове. Проект реконструкции включает 25 работ. Перечень и характеристики работ представлены в таблице, где выделены операции, подлежащие разбиению.

На рис. 3. показана сетевая модель (граф), задающая упорядочение выполнения работ проекта. На графе работы изображены дугами, начала и окончания работ – вершинами графа. Фиктивные операции, необходимые только для построения модели, показаны штриховыми линиями.

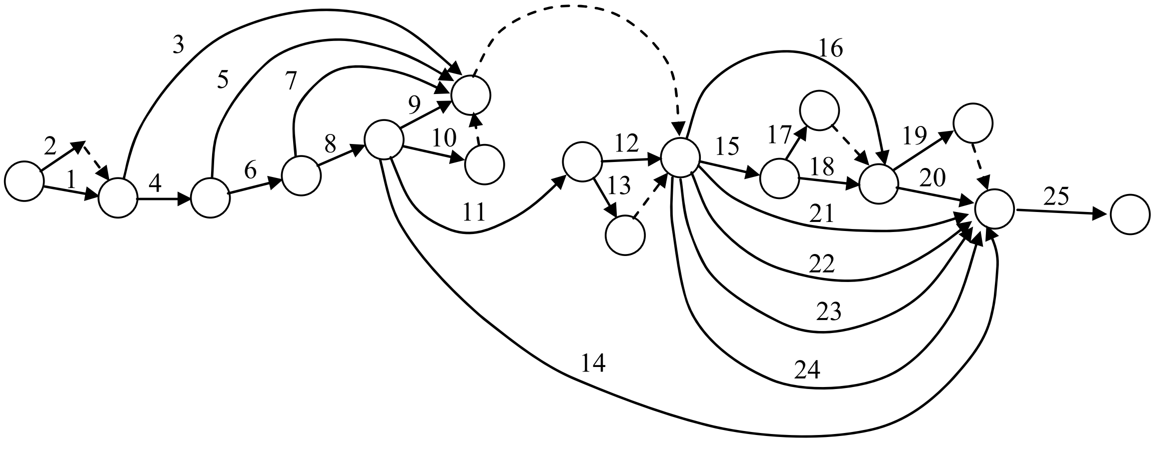



***Рис. 3. Сетевая модель работ проекта реконструкции тепловых сетей***

***Характеристики работ проекта реконструкции тепловых сетей***

| № работы | № работы с учетом разбиения | Наименование работ | Длительность чел/час | Количество дней согласно графику | В день согласно графику | Количество чел | Всего дней | Всего чел·час |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | подготовительные работы: трассирование магистрали | 60 | 2 | 30 | 3,8 | | |
| 2 | $2_3$ | разборка асфальтового покрытия и производство земляных работ | 3140 | 2 | 157 | 19,62 | 9 | 3356 |
| 3 | $2_f$ | –·–·–·–·–·–·–·–·–· | 304 | 7 | 434,6 | 54,32 | | |
| 4 | $3_4$ | демонтаж бетонных. лотков перекрытия | 160,7 | 1 | 160,7 | 20,01 | 7 | 1125 |
| 5 | $3_f$ | –·–·–·–·–·–·–·–·–· | 964,3 | 6 | 160,7 | 20,09 | | |
| 6 | $4_5$ | демонтаж трубопроводов | 137,4 | 1 | 137,4 | 17,17 | 7 | 962 |
| 7 | $4_f$ | –·–·–·–·–·–·–·–·–· | 824,6 | 6 | 137,4 | 17,17 | | |
| 8 | $5_6$ | монтаж непроходимых каналов из лотков Л 11-2/8 | 304 | 2 | 76 | 9,5 | 4 | 608 |
| 9 | $5_f$ | –·–·–·–·–·–·–·–·–· | 304 | 2 | 76 | 9,5 | | |
| 10 | 6 | кирпичная кладка стен каналов | 117 | 2 | 58,5 | 7,31 | | |
| 11 | $7_8$ | устройство обзорных колодцев | 120,8 | 2 | 60,4 | 7,25 | 5 | 302 |
| 12 | $7_f$ | –·–·–·–·–·–·–·–·–· | 181,2 | 3 | 60,4 | 7,25 | | |
| 13 | 8 | монтаж плит перекрытия ПО-4 обзорных колодцев | 210 | 3 | 70 | 8,75 | | |
| 14 | 9 | –·–·–·–·–·–·–·–·–· | 2347 | 17 | 138 | 17,25 | | |
| 15 | 10 | выполнение работ по перерезке трубопроводов | 545 | 2 | 272 | 34,06 | | |
| 16 | 11 | установка скользящих хомутовых опор | 232 | 10 | 23,2 | 2,9 | | |
| 17 | 12 | гидроиспытание тепломагистрали | 24 | 2 | 12 | 1,5 | | |
| 18 | $13_{14}$ | устройство муфтовое соединений трубопровода | 45,2 | 2 | 22,6 | 2,82 | 5 | 113 |
| 19 | $13_f$ | –·–·–·–·–·–·–·–·–· | 67,8 | 3 | 22,6 | 2,82 | | |
| 20 | 14 | монтаж лотков каналов | 608 | 4 | 152 | 19 | | |
| 21 | 15 | устройство цементно-песочной стяжки лотков | 388 | 7 | 55,4 | 6,92 | | |
| 22 | 16 | устройство двух пластов из полиэтиленовой пленки | 174 | 8 | 21,7 | 2,71 | | |
| 23 | 17 | устройство цементно-песочной стяжки лотков | 395 | 7 | 56,4 | 7,05 | | |
| 24 | 18 | обратная засыпка траншей | 601 | 8 | 75,1 | 9,39 | | |
| 25 | 19 | восстановление асфальтового покрытия | 443 | 3 | 147,6 | 18,37 | | |

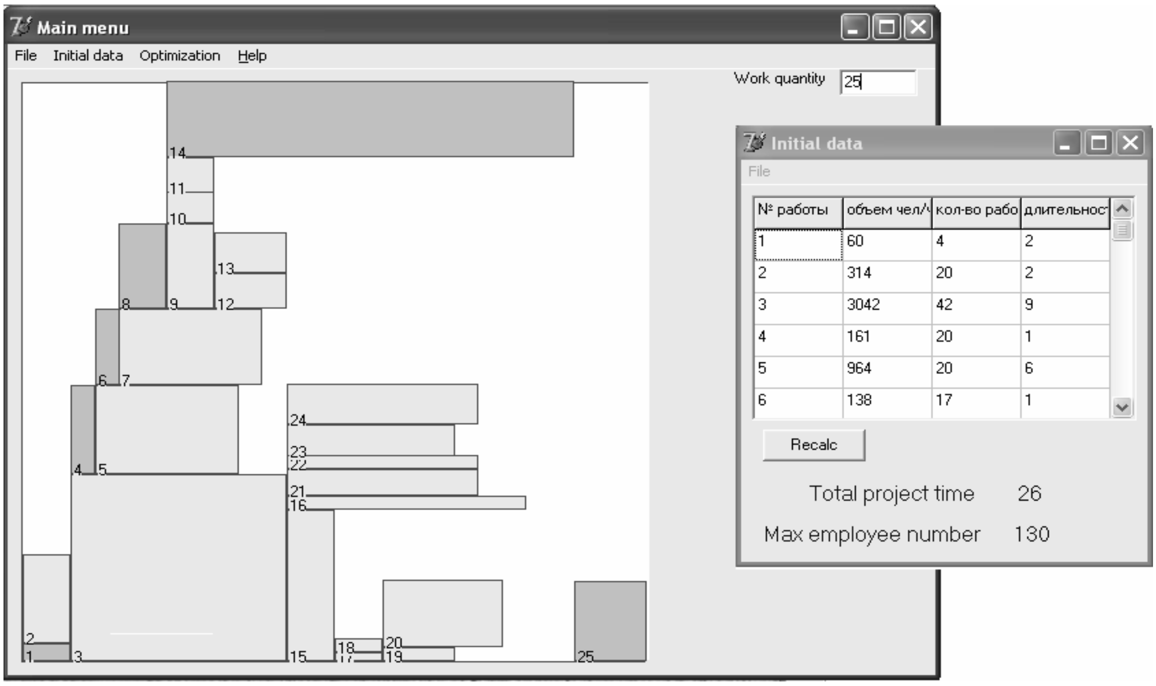



***Рис.4. Решение задачи 1.1***

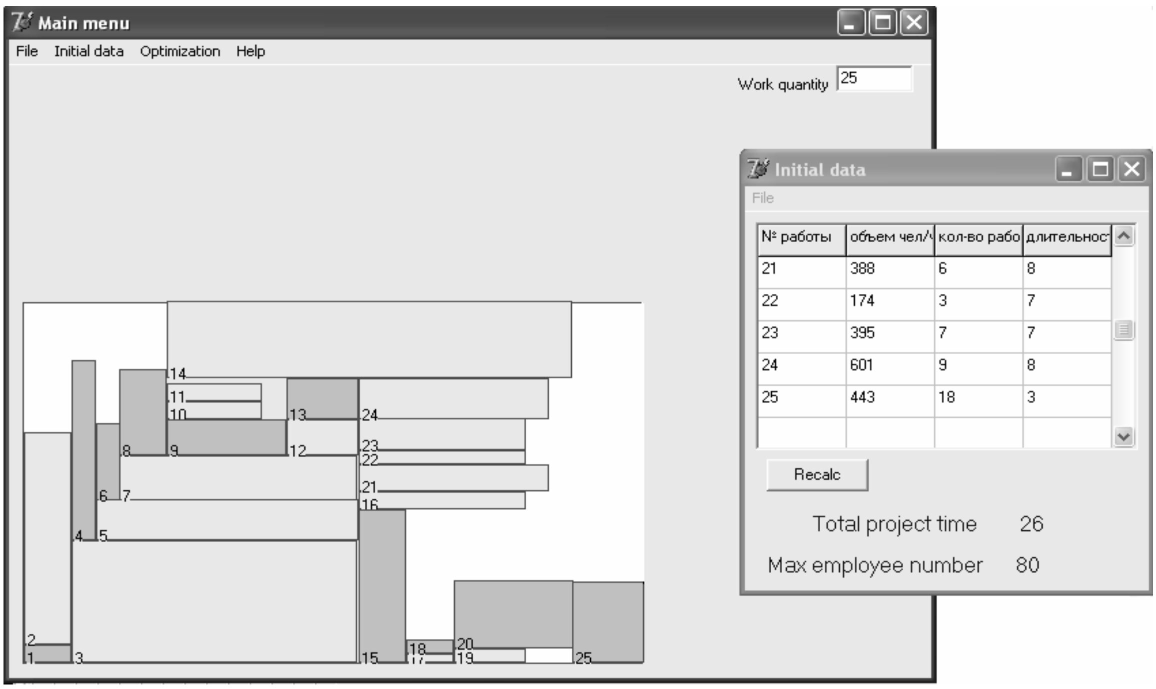



***Рис. 5. Решение задачи 1.2***

На рис. 4 представлено решение задачи 1.1 (критические операции выделены темным цветом), на рис. 5 – решение задачи 1.2. Применение предлагаемого подхода позволило сократить время выполнения работ по реконструкции с 28 до 26 дней и решить задачу (19) выравнивания ресурсов. Отметим, что в результате решения задачи выравнивания ресурсов изменилось число и состав множества критических операций программы, но длительность критического пути осталась прежней.

**Литература**

1. *Чуб И. А.* Решение одной задачи управления ресурсами проекта как задачи оптимизационного геометрического проектирования / И. А. Чуб // Прикл. геометрія та інж. графіка. – 2009. – Вип. 81. – С. 51–56.
2. *Новожилова М. В.* Розв'язання задачі оптимізації ресурсів проекту при точних вихідних даних / М. В. Новожилова, Н. О. Попельнюх // Вісн. Житомир. техн. ун-ту. – 2006. – № 4 (39). – С. 225–230.
3. *Новожилова М. В.* Фактор неопределенности временного параметра при управлении проектами / М. В. Новожилова, Т. Е. Романова // Пробл. машиностроения. – 2001. – Т. 4. – № 1–2. – С. 79–84.
4. *Таха Х. А.* Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – М.: Вильямс, 2001. – 912 с.
5. *Чуб І. А.* Геометричне моделювання основних обмежень на параметри розміщення об'єктів зі змінними метричними характеристиками / І. А. Чуб // Пр. Таврійськ. агротехн. ун-ту. – 2009. – Т. 42. – Вип. 4. – С. 77–85.
6. *Чуб И. А.* Построение линейной аппроксимации области допустимых решений задачи размещения неориентированных геометрических объектов / И. А. Чуб, М. В. Новожилова // Мат. машини и системи. – 2010. – № 2. – С. 99–107.
7. *Стоян Ю. Г.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. – Киев: Наук. думка. – 1986. – 268 с.
8. *Чуб И. А.* Метод решения задачи размещения прямоугольников с переменными метрическими характеристиками / И. А. Чуб, М. Н. Мурин, М. В. Новожилова // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 4. – С. 134–141.
9. *Чуб И. А.* Аналитическое описание условия принадлежности объекта с изменяемыми метрическими характеристиками области размещения / И. А. Чуб, М. В. Новожилова // Системи обробки інформації. – 2002. – Вип. 6 (22). – С. 248–252.
10. *Гилл Ф.* Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М.: Мир. – 1985. – 509 с.

Поступила в редакцию
09.09.10