

ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ КОЛИВАНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ КРИВИНИ ФАЗОВИХ ТРАЕКТОРІЙ

Наведено графоаналітичний метод визначення критичних значень параметрів коливань на основі обчислення кривин фазових траєкторій їх диференціальних рівнянь. Метод базується на вивченні викривленості траєкторій і враховує зміну знака їх кривини вздовж фазових траєкторій.

Ключові слова: фазова траєкторія, критичні значення параметра, аналіз на якісному рівні, викривленість кривої, кривина лінії.

Л.Н. КУЦЕНКО

Национальный университет гражданской защиты Украины

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПОМОЩИ КРИВИЗНЫ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Приведен графоаналитический метод определения критических значений параметров колебаний на основе вычисления кривизны фазовых траекторий их дифференциальных уравнений. Метод базируется на изучении искривленности траекторий и учитывает изменение знака их кривизны вдоль фазовых траекторий.

Ключевые слова: фазовая траектория, критические значения параметра, анализ на качественном уровне, искривленность кривой, кривизна линии.

L.N. KUTSENKO

National university of civil defence of Ukraine

DETERMINATION OF CRITICAL VALUES OF PARAMETERS OF VIBRATIONS THROUGH CURVATURE PHASE TRAJECTORIES

A graph-analytic method over of determination of critical values of parameters of vibrations is brought on the basis of calculation of curvature of phase trajectories of their differential equalizations. A method is based on the study of distorted of trajectories and takes into account the change of sign of their curvature along phase trajectories.

Keywords: a phase trajectory, critical values of parameter, analysis at quality level, distorted of curve, curvature of line.

Постановка проблеми

Дослідження механічних коливань на якісному рівні зручно здійснювати методом фазових траєкторій. Сутність цього методу полягає в описі поведінки коливальної системи за допомогою наочних геометричних зображень – фазових портретів [1, 2]. Вони будуються на площині у прямокутних координатах, де на осях відкладаються “зміщення” і “швидкість”. Зручними для досліджень є маятникові коливання, спостерігати за якими можна за допомогою: маятника з періодично змінною довжиною, маятника з віброуючою точкою підвісу, багатоланкового маятника, перевернутого маятника, маятника із пружними елементами, тощо. У описі коливального процесу маятника може існувати параметр, який суттєво впливатиме на характер коливань, і зміна значення якого може розмежовувати коливання на якісному рівні (що пояснює термін “критичне значення параметра”).

Наведемо приклад коливання математичного маятника, описаного диференціальним рівнянням $\ddot{x} + 0,2\dot{x} + 9,8\sin x = 0$ з початковими умовами $[x(0) = 0; \dot{x}'(0) = p]$, коли керуючий параметр p змінюється у межах $6 < p < 8$. На рис. 1 зображено фазовий портрет, з якого видно, що залежно від значення параметра p коливання маятника можуть бути або згасаючі, або згасаючі з одним чи двома обертами навколо точки кріплення. Ці якісно різні коливання будуть розмежовані двома критичними значеннями параметра p .

Звичайно, критичні значення параметра p можна обчислити за допомогою формул теоретичної механіки [3]. Але у випадку коливань складнішої природи не завжди можна знайти формули для обчислення

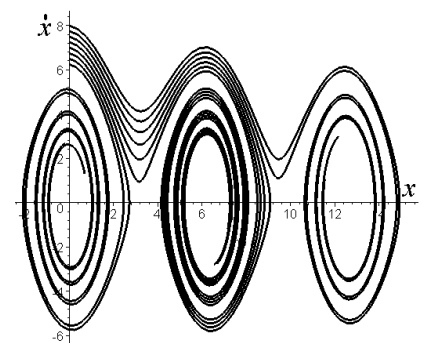


Рис. 1. Фазовий портрет

відповідних критичних значень. Для інженерної практики необхідні способи їх обчислення в умовах відсутності точних формул. В подібних випадках інженерні обчислення базуються, як правило, на графоаналітичних методах досліджень, підкріплених комп'ютерною технікою. Для практичних впроваджень необхідні суто інженерні способи обчислення критичних значень керуючого параметра коливань [4], врахування якого може або поліпшити конструкцію коливальної системи, або запобігти її аварійному стану. Це вказує на актуальність обраної теми досліджень.

Огляд відомих результатів

Традиційний аналіз коливань складається [1, 2, 5] з визначення особливих точок, що відповідають положенням рівноваги коливальної системи, побудови фазових портретів системи зі значеннями керуючого параметра у межах особливих точок, а також визначення сепаратрис, які проходять через особливі точки за допомогою рівняння інтеграла енергії системи, коли кінетична енергія дорівнює нулю.

Основи пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій (теорії біфуркацій) закладені А. Пуанкаре та О.М. Лягуновим, потім ці дослідження були розвинені О.О. Андроном, С.А. Леонтовичем і їх учнями [1, 2]. Основною задачею класичної теорії якісного дослідження є визначення динамічних властивостей систем без одержання замкнутого аналітичного розв'язку.

У роботах [6-8] наведено огляд різноманітних способів дослідження фазових траєкторій на якісному рівні, звідки слідує висновок про недостатній розвиток графоаналітичних способів пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій для інженерної практики.

Графічні способи пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій на основі поля ізоклін доцільно було б доповнити і такими, що базуються на графічному характері викривленості фазової траєкторії, і які визначаються сукупністю значень її кривини вздовж цієї траєкторії.

Розробити графоаналітичний метод визначення критичних значень параметрів коливань на основі обчислення кривин фазових траєкторій їх диференціальних рівнянь. Метод має базуватися на вивченні викривленості траєкторій і враховувати зміну знака їх кривини вздовж фазових траєкторій.

Основна частина

Вважатимемо, що рух точки по фазовій траєкторії здійснюється у межах, який визначається границями зміни параметра t часу, а «поворот» вправо або вліво при русі по фазовій площині відбувається завдяки різним знакам при значеннях кривини в точках цієї траєкторії. В результаті приходимо до поняття *викривленості* – тобто характеристики лінії, яка визначається послідовністю чисел, кожне з яких (з урахуванням знака) є значенням її кривини.

Для аналізу викривленості лінії розглянемо *допоміжну задачу*, не пов'язану з фазовими траєкторіями. Нехай маємо параметричну множину кривих $F = F(x, y, p)$, де x, y – параметри координатної площини, p – керуючий параметр. Необхідно навести метод визначення такого значення керуючого параметра p , при якому елементи множини кривих будуть змінюватися на якісному рівні, тобто матимуть різний характер викривленості.

Для пояснення суті методу розглянемо сім'ю кривих

$$x = \sin(pt) + p \cos(t)/2; \quad y = -t \sin(t), \quad (1)$$

де параметр t змінюється у межах $t_{MIN} = -0,2\pi < t < t_{MAX} = 2,1\pi$, а керуючий параметр p змінюється у межах $p_{MIN} = 1,5 < p < p_{MAX} = 2,3$. Необхідно визначити критичні значення параметра p .

Побудуємо ряд послідовних зображень, які відповідають певним значенням параметра p . Аналізуючи рисунки (бажано у режимі комп'ютерної анімації) легко помітити, що сім'ю кривих можна розділити за трьома характерами викривленості її елементів, які будуть розмежовані двома кривими, що відповідають значенням параметрів $p=1,7$ і $p=2,14$.

Далі визначимо критичні значення керуючого параметра p формальним методом, який не буде спиратися на анімаційні зображення елементів сім'ї кривих. При цьому буде враховано, що якісні зміни елементів сім'ї кривих можна відслідковувати, аналізуючи зміни характеру викривленості з використанням функцій кривини ліній, а критичні значення керуючого параметра сім'ї кривих відповідатимуть моментам зміни характеру викривленості елементів сім'ї кривих (рис.2).

Посилаючись на [9], обчислимо функцію кривини для сім'ї кривих (1):

$$k(t) = \frac{u(-2 \cos(t) + t \sin(t)) - v(-p^2 \sin(pt) - p \cos(t)/2)}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2)$$

де $u = p \cos(pt) - p \sin(t)/2$ і $v = -\sin(t) - t \cos(t)$.

На рис. 2 наведено елементи сім'ї кривих, відповідні графіки функції $k(t)$ кривини, а також значення інтеграла I від $k(t)$ (обчисленого у межах $t_{MIN} = -0,2\pi < t < t_{MAX} = 2,1\pi$) залежно від значень параметра p (зафарбована площа підграфіка кривини $k(t)$ умовно обмежена прямими $k = \pm 6$).

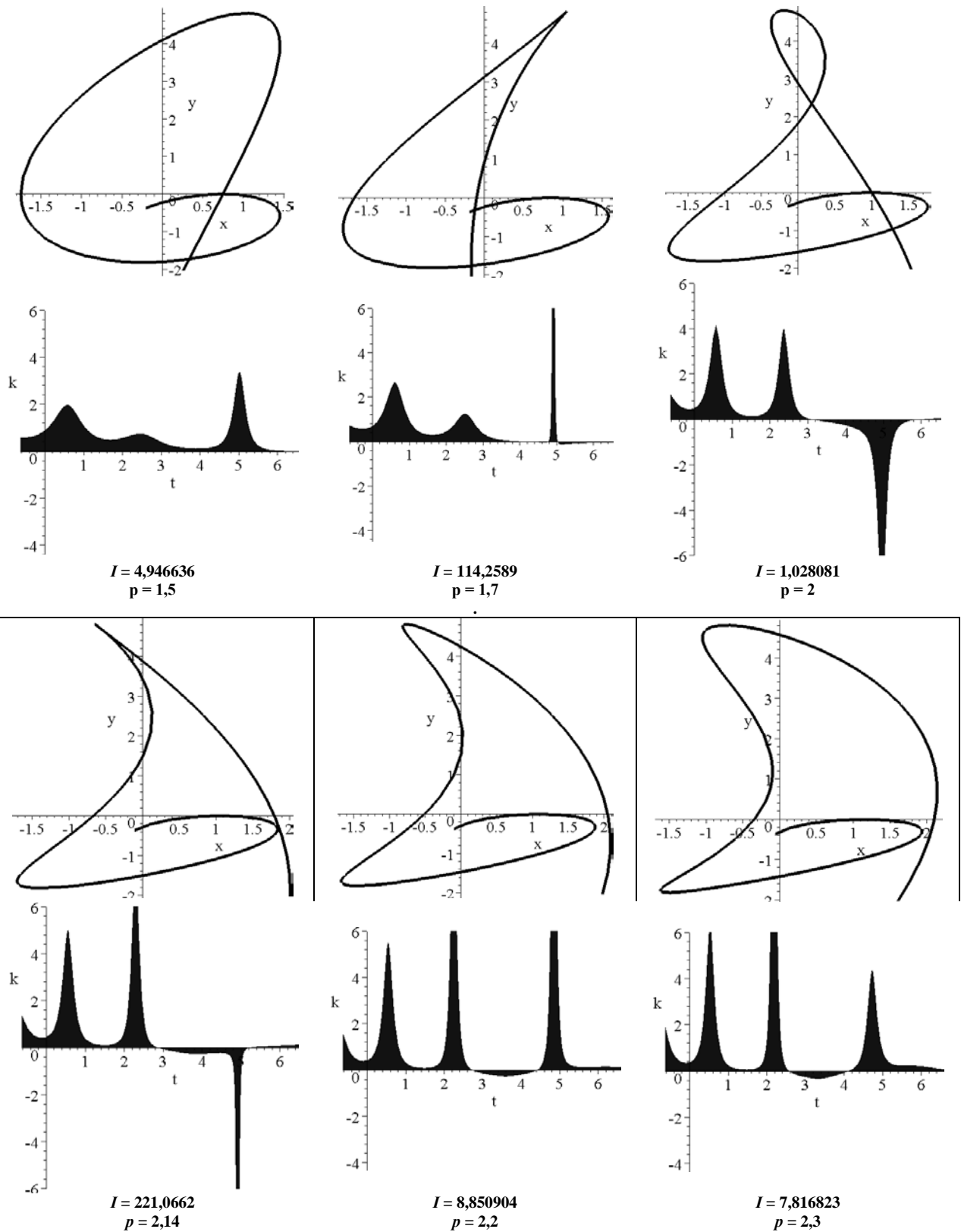


Рис. 2. Елемент сім'ї кривих і графік кривини $k(t)$ та значення інтеграла I для деяких значень параметра p .

Далі вивчимо зміну інтеграла I функції $k(t)$ залежно від параметра p на відрізку $[1,5; 2,3]$. Для цього скористаємося складеною maple - програмою, де в циклі по символу i обчислюються N значень інтегралів функції $k(t)$. В програмі функцію кривини (2) позначено як $\text{curvat}(t)$.

В процесі обчислень використано maple - оператор **BSplineCurve** з бібліотеки **CurveFitting**.

```

for i from 0 to N do
p := evalf(1.5 + i*(2.3 - 1.5)/N);
w[i] := p;

```

```
S[i] := evalf(Int(curvat(t), t=tmin..tmax));
xydata[i] := [w[i], S[i]];
graf := t -> BSplineCurve ([seq(xydata[i], i=0..N)], t);
plot(graf(t), thickness=4, labels=[p,S],view=-6..6);
```

В результаті буде побудовано графік $S(p)$ залежності від p множини інтегралів функції $k(t)$. На рис.3 зображено один і той же графік у різних масштабах.

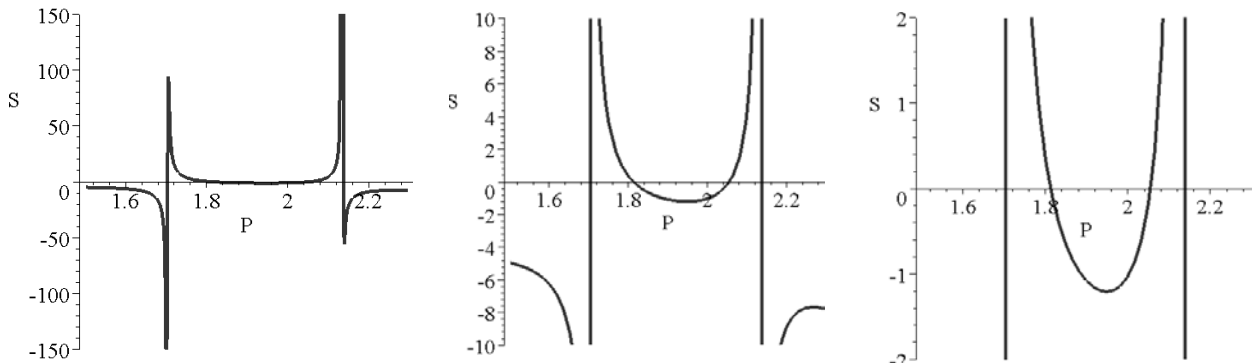


Рис. 3. Графік функції $S(p)$ залежностей від p інтегралів функції $k(t)$.

Характерна ознака функції $S(p)$ полягає у тому, що її графік перетинає вісь O_p в точках, які відповідають критичним значенням параметра p . Інші дві точки перетину графіка не відповідають умові «стрибка» графіка (пояснення далі). Отже, елементи сім'ї кривих мають змінити характер викривленості при значеннях $p=1,7$ і $p=2,14$, що збігається з результатом, одержаним за допомогою анімації.

Але у загальному випадку для фазових траєкторій невідомі описи аналітичними формулами. У результаті розв'язання диференціального рівняння чисельними методами на фазовій траєкторії одержуються координати окремих точок. Тобто постає задача визначення кривини фазової траєкторії, заданої множиною N точок (x_i, y_i) , коли $i = 2..M - 1$.

У подальшому наближене значення кривини буде обчислюватися за допомогою радіуса кола, проведеного через три точки. Це пояснюється тим, що чисельним способом при розв'язанні диференціального рівняння вдається обчислити лише значення функції та її похідної. А для обчислення [9] кривини лінії, яка задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, необхідно знати ще і другу похідну: $k = \pm \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$. Така формула використана для обчислення кривини у попередньому прикладі (2). Для

плоских кривих є можливість розрізнати напрямок обертання дотичної прямої при русі уздовж лінії, тому кривині приписують знак залежно від напрямку цього обертання

Оберемо на фазовій кривій три сусідні точки (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}) . Для обчислення кривини в середній точці (x_i, y_i) знайдемо радіус кола r_1 , яке проходить через дані три точки:

$$r_i = \frac{\sqrt{B^2 + C^2 - AD}}{A}, \quad (3)$$

де $A = x_{i-1}y_i + x_i y_{i+1} + x_{i+1}y_{i-1} - x_{i+1}y_i - x_i y_{i-1} - x_{i-1}y_{i+1}$;

$$B = (y_{i+1}^2 y_i - x_{i+1}^2 y_{i-1} + x_{i+1}^2 y_i - y_{i+1}^2 y_{i-1} - y_i^2 y_{i+1} + y_i^2 y_{i-1} + x_i^2 y_{i-1} - x_i^2 y_{i+1} - y_{i-1}^2 y_i + y_{i-1}^2 y_{i+1} - x_{i-1}^2 y_i + x_{i-1}^2 y_{i+1}) / 2;$$

$$C = (y_{i+1}^2 x_{i-1} - y_{i+1}^2 x_i + x_{i+1}^2 x_{i-1} - x_{i+1}^2 x_i + y_i^2 x_{i+1} - y_i^2 x_{i-1} + x_i^2 x_{i+1} - x_i^2 x_{i-1} + y_{i-1}^2 x_i - y_{i-1}^2 x_{i+1} + x_{i-1}^2 x_i - x_{i-1}^2 x_{i+1}) / 2; \quad (4)$$

$$D = y_{i+1}^2 x_i y_{i-1} - y_{i+1}^2 x_{i-1} y_i - x_{i+1}^2 x_{i-1} y_i + x_{i+1}^2 x_i y_{i-1} + y_i^2 x_{i-1} y_{i+1} - y_i^2 x_{i+1} y_{i-1} - x_i^2 x_{i+1} y_{i-1} + x_i^2 x_{i-1} y_{i+1} - y_{i-1}^2 x_{i+1} y_i - y_{i-1}^2 x_i y_{i+1} - x_{i-1}^2 x_i y_{i+1} + x_{i-1}^2 x_{i+1} y_i.$$

Тоді значення кривини у точці (x_i, y_i) буде $k=1/r_1$. Умова $A = 0$ визначатиме нульову кривину (тобто коли три точки розташовані на прямій).

Застосуємо наближений спосіб обчислення кривини лінії для пояснення розв'язання попередньої задачі. Для цього залежно від значень параметра p розглянемо аксонометричні зображення елементів сім'ї кривих на координатній площині Oxy (рис. 4).

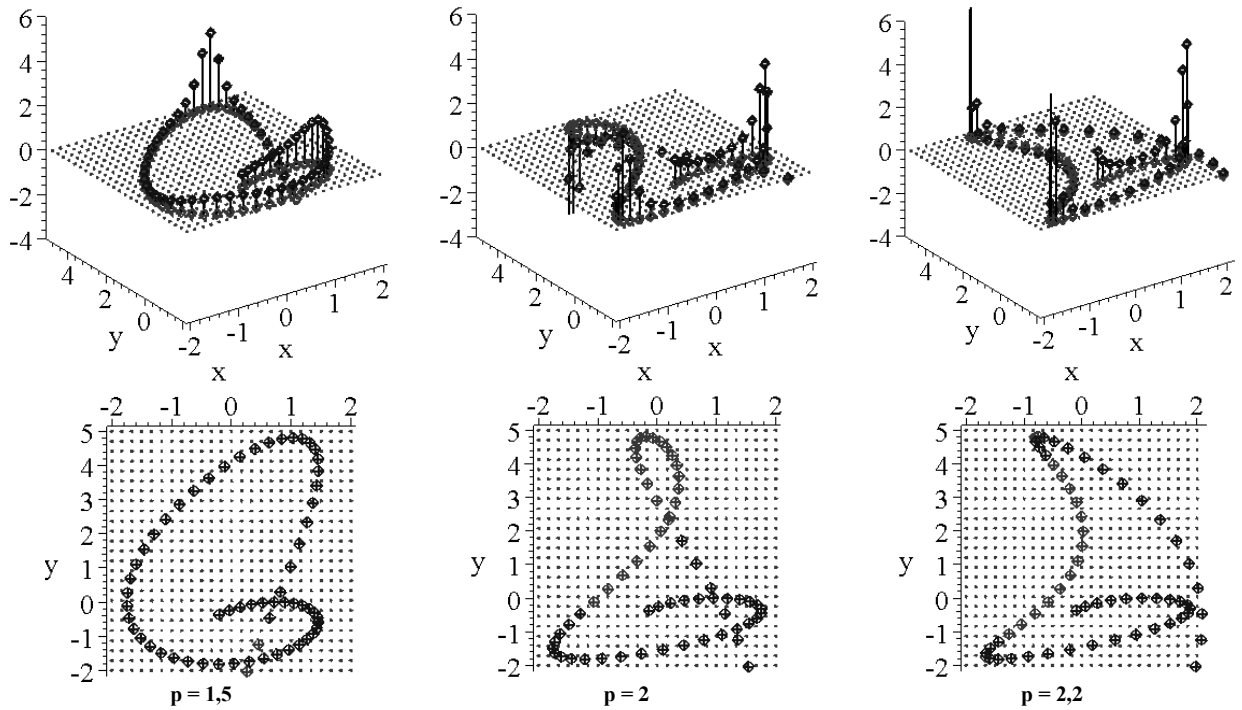


Рис. 4. Зображення елементів сім'ї кривих на координатній площині Oxy

Для певного значення параметра p з точок кривої відкладемо вздовж осі аплікату відрізки, довжина яких дорівнює значенню кривини лінії у поточній точці. Сполучаючи кінці відрізків, одержуємо кусково-лінійний графік. За допомогою одного з чисельних методів обчислюємо площу між цим графіком та кривою на координатній площині (з врахуванням “знака” площі). Виконуючи зазначені дії в циклі для інших значень параметра p , одержимо наближений графік функції $S(p)$ зміни площі. Критичні значення визначатимуться точками перетину осі Op з вертикальними складовими кусково-лінійного графіка функції $S(p)$. Звідси слідує пояснення згаданої вище умові «стрибка» графіка функції.

Дослідимо коливання маятника, стан якого описано системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t); \quad \frac{d}{dt} y(t) = -0,2y(t) - 9,8 \sin(x(t)). \quad (5)$$

Тут $x(t)$ можна інтерпретувати як зміщення, а $y(t)$ – як швидкість маятника.

Розв'язок системи (5) одержано чисельно методом Рунге-Кутта-78, змінюючи при цьому лише початкову умову $6 < y(0) < 8$. На рис. 5 наведено кадри комп'ютерної анімації зміни фазового портрету, з яких визначаються наближені критичні значення початкової швидкості $y_1(0) = 6,65$ і $y_2(0) = 7,6$. На рисунках колом позначається точка, що відповідає початковим умовам. На формальному рівні ці ж значення було одержано шляхом побудови графіка відповідної функції $S(p)$ (рис. 6), де критичні значення визначатимуться лише вертикальними складовими цього графіка (позначено кружечками). При цьому крок між точками на фазовій кривій обирався $\Delta = 0,1$; всього кількість точок $N = 100$.

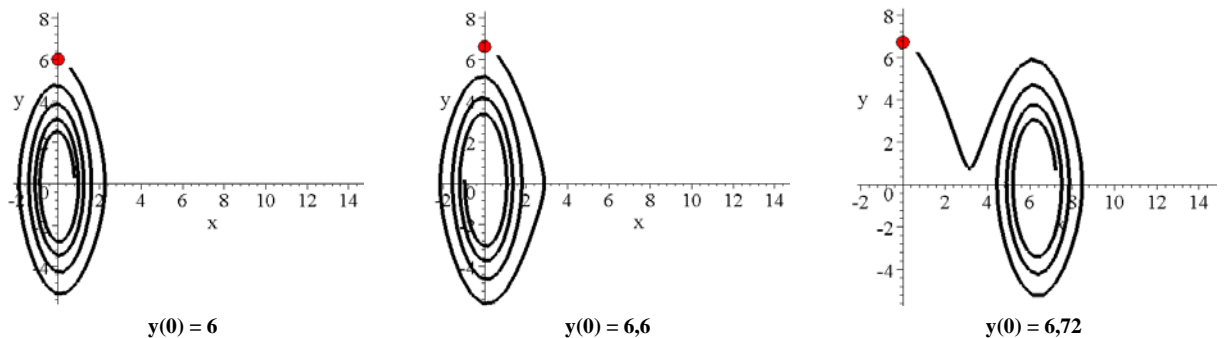


Рис. 5. Анімаційні кадри зміни фазового портрету залежно від $y(0)$ (початок)

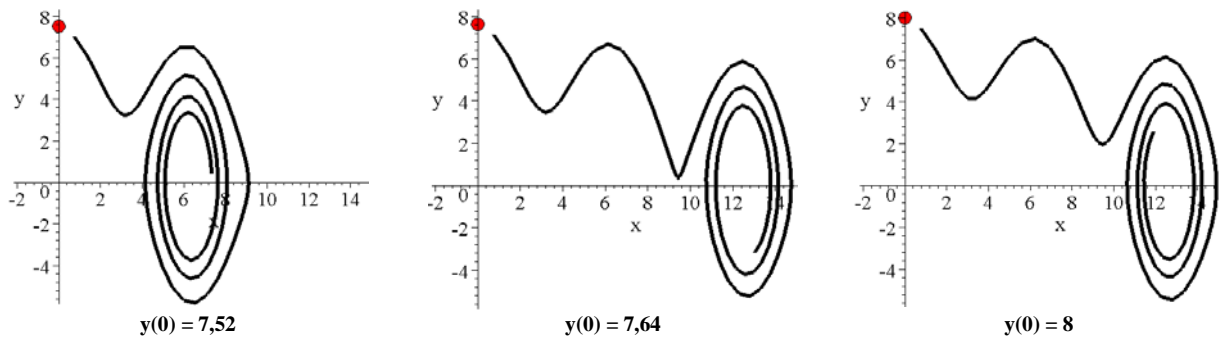


Рис. 5. Анімаційні кадри зміни фазового портрету залежно від $y(0)$ (закінчення)

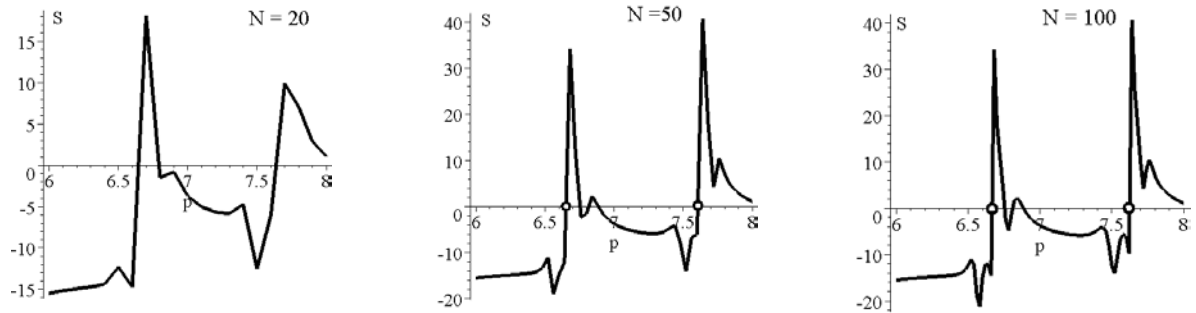


Рис. 6. Графік функції $S(p)$ залежно від кількості ітерацій N

Наведені результати можна використати для дослідження фазових траєкторій на площині з координатами “переміщення x ” – “прискорення x ”. Адже залежність $x''(x)$ є обернено симетрична відносно осі Ox графіку зміни пружних властивостей коливальної системи. Саме фазові траєкторії $x''(x)$ дозволяють виявити вигляд системи і визначити рівень її нелінійності [10]. Адже прискорення точок більш чутливе до відхилення коливань від гармонічних.

Висновки

Критичні значення параметра p сім'ї кривих $F(x, y, p)$ будуть визначатися точками перетину з віссю Ox близькими її нормалі фрагментами графіка $S=S(p)$ залежності від параметра p значень інтеграла функції кривини $k(t)$.

Список використаної літератури

1. Бутенин Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний / Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.Л. Фуфаев. – М.: Наука, 1987.-382с.
2. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М., Наука, 1981. – 916 с.
3. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика. / М.И. Бать , Г.Ю. Джанелидзе , А.С. Кельзон - М.: Физматлит, 1961. — 616 с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний / В.Л. Бидерман - М.: Высшая школа, 1972. — 416 с.
5. Betounes, D. Differential equations : theory and applications : with Maple. - D. Betounes. - Hattiesburg, MS, University of Southern Mississippi, 2001.- 686 p.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Л.С. Понтрягин.- М.: Наука, 1974. — 331 с.
7. Пантелеев А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова, А.В. Босов - М.: Высш. шк., 2001. – 381 с.
8. Китаев Д.Б. Развитие качественной теории дифференциальных уравнений в XIX столетии. Д.Б.Китаев.- Дис. канд. техн. наук: 07.00.10 – История науки и техники (по физико-математическим наукам). Д.Б. Китаев - М: Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН. – 2011. – 140 с.
9. Мищенко А.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. - А.С. Мищенко, Ю.П. Соловьев , А.Т. Фоменко – М: Изд. ФМЛ, 2001. – 352 с.
10. Казакевич И.И. Фазовые траектории нелинейных динамических систем. Атлас / И.И. Казакевич, В.И. Волкова. – Днепропетровск: Наука и образование, 2002. – 94 с.