

**ЛІНІЇ З КЕРОВАНИМИ КРИВИНАМИ, ПОБУДОВАНІ
ЗАСОБАМИ МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТУ MAPLE**

Анотація: розглянуто спосіб опису й побудови кривих на площині, у натуральні рівняння яких входить кривизна, завчасно обчислена з позитивним степенем.

Ключові слова: криві з керованою кривизною, класична кривизна, закон зміни кривизни, еластики ейлера, maple.

Постановка проблеми. При деяких розрахунках для опису та зображення кривих доцільно застосовувати їхні натуральні рівняння [1]. Інакше кажучи, такі рівняння, які описують кривину деякої кривої залежно від її натурального параметра s , який визначає довжину даної кривої починаючи з її деякої точки. Наприклад, завдяки використанню натуральних рівнянь двох кривих можна «керувати» процесом їхнього взаємного дотику в процесі обкатування за допомогою планетарного механізму.

Аналіз відомих досліджень і публікацій. Дослідженню кривих, у натуральні рівняння яких входить тригонометрична функція косинуса, присвячені роботи Краузе [1]. Складанню рівнянь плоских кривих із застосуванням натуральних рівнянь присвячені роботи С.Ф.Пилипаки [2], С.Ю.Бадаева, Т.И.Щоголевої [3], В.Д.Борисенка, С.А.Устенка, В.Е.Спіцина [4] та інших авторів.

Подальшим узагальненням побудови кривих з керованими кривинами буде вивчення та реалізація на практиці більш складних залежностей входження класичної кривини в описи результуючих кривих.

Формулювання цілей статті. Розглянути випадок, коли у формули опису результуючої лінії входить кривина, обчислена з позитивним степенем (виду $k^v(s)$).

Основна частина. Відомо [5], що натуральне рівняння кривої на площині має вигляд

$$\frac{1}{R} = f(s), \quad (1)$$

де R – радіус кола, дотичного до гладкої кривої в певній її точці, а функція $f(s)$ визначає закон зміни кривини лінії (тобто величини $k = 1/R$) залежно від натурального параметра s . За визначенням (класичною) кривиною дуги кривої у точці M називається величина

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|, \quad (2)$$

де α – кут між дотичними в точках M і M_{Δ} , а Δs – довжина дуги MM_{Δ} .

З використанням похідної формулу (2) можна записати як

$$k = |\dot{\alpha}|, \quad (3)$$

де $\alpha(s)$ – кут повороту дотичної у точці M , що залежить від шляху, пройденого по кривій, $\dot{\alpha}$ – похідна функції $\alpha(s)$ по параметру s .

Рівняння (3) допомагає описати криву, що задана натуральним рівнянням. Дійсно, з рівняння $k = \dot{\alpha}(s) = f(s)$ обчислюється функція

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s) ds + \alpha_0, \quad (4)$$

за допомогою якої обчислюється кут нахилу дотичної залежно від довжини дуги.

Тоді відповідно до відомих [4] залежностей

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \text{і} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha \quad (5)$$

параметризацію кривої можна задати у вигляді

$$x(s) = \int_0^s \cos \alpha(s) ds + x_0; \quad y(s) = \int_0^s \sin \alpha(s) ds + y_0, \quad (6)$$

або, з врахуванням (4), рівняння шуканої кривої має вигляд

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \cos \left(\int_0^s f(s) ds + \alpha_0 \right) ds + x_0; \\ y(s) &= \int_0^s \sin \left(\int_0^s f(s) ds + \alpha_0 \right) ds + y_0, \end{aligned} \quad (7)$$

Легко переконатися в тому, що обертання кривої спричиняє зміну у формулах (7) постійної α_0 , а паралельний перенос кривої пов'язаний зі зміною параметрів x_0 і y_0 . Рівність цих констант нулю визначає розташування кривої так, що початкова точка для відліку дуги буде розташована у початку координат, а додатній напрямок дотичної у ній збігається з додатнім напрямком осі Ox .

У курсі диференціальної геометрії доводиться [4], що кожне рівняння виду (1), де функція $f(s)$ неперервна, можна прийняти як натуральне рівняння деякої кривої, яку можна описати у параметричному вигляді. Канва доказу цього твердження полягає в такому. Для рівняння (1) визначається спочатку вираз для α за допомогою формули (4), а потім формули для x і y визначаються рівняннями (6) – тобто в результаті маємо параметричне подання кривої. Якщо вирази (6) продиференціювати по змінній s , то приходимо до рівняння (4),

звідки

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (8)$$

Тобто ds дійсно є диференціалом дуги цієї кривої, а s – дугою кривої.

Зі співвідношень (5) слідує, що α є кутом дотику цієї кривої з віссю x . Після диференціювання (4) знаходимо, що кривина дорівнюватиме

$$\frac{d\alpha}{ds} = f(s). \quad (9)$$

Тобто доходимо висновку, що рівняння (1) дійсно виявляється натуральним рівнянням кривої.

Подальшим узагальненням побудови кривих з керованою кривиною буде введення поняття степеня кривини лінії.

Визначення. Нехай кривина уздовж кривої змінюється за законом $k^w(s)$, де $w > 0$ і s – натуральний параметр. За допомогою функції $k^w(u)$ задамо вираз $\alpha_w(s)$ у вигляді

$$\alpha_w(s) = \int_0^s k^w(u) du, \quad (10)$$

Тоді параметр w буде степенем кривини лінії $\{x(s), y(s)\}$, одержаної в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{ds} x(s) = \cos(\alpha_w(s)); \quad \frac{d}{ds} y(s) = \sin(\alpha_w(s)). \quad (11)$$

Укажемо, що кривина лінії другого степеня застосовується при побудові еластик Ейлера [6], а кривини ліній більше високих степенів використовуються, наприклад, при побудові треків елементарних часток у магнітних полях.

Для побудови кривих додатного степеня кривини було складено Maple-програма, фрагмент якої у вигляді процедури-функції має вигляд:

```
profil := proc(kap, a, b)
local sys, p, ics, p1:
sys:= diff(alpha(s), s) = kap(s)^w,
diff(x(s), s) = cos(alpha(s)),
diff(y(s), s) = sin(alpha(s)):
krai:= x(0)=0, y(0)=0, alpha(0)=0;
ans:=dsolve({sys, krai}, {x(s), y(s), alpha(s)},
type=numeric);
pic:=odeplot(ans, [x(s), y(s)], s=a..b,
numpoints=12000, thickness=2, color=black):
display(pic, scaling=constrained);
end:
```

Тут через **kap** позначено (класичну) кривину кривої, через **a** і **b** – границі зміни параметра довжини дуги, систему диференціальних рівнянь Френе позначено через **sys**, розв'язок цієї системи позначено через **ans**, а

підготовлену для візуалізації інформацію позначено як **pic**.

Звертаючись до процедури-функції треба так:

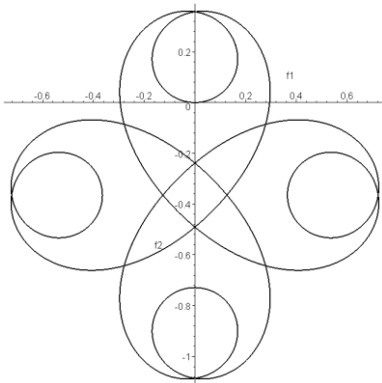
w := 2.;

kap := s -> 1 + 5*cos(s)^2;

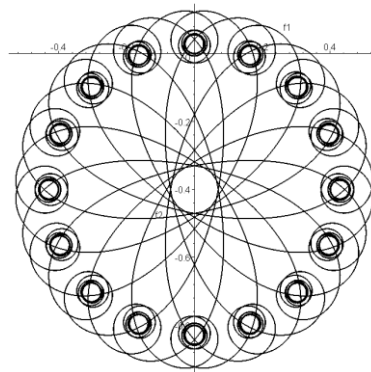
profil(kap, 0, 6*Pi);

У результаті в системі декартових координат $\{x, y\}$ буде побудована лінія, що відповідатиме параметрам **kap** і **w**.

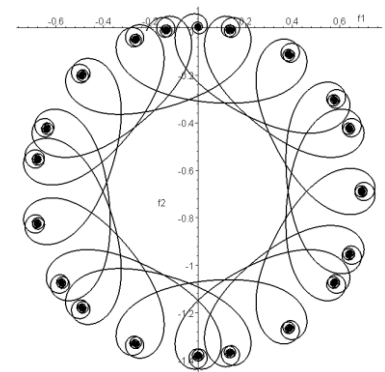
Приклад 1. Нехай $(5\cos^2(s) + 1)^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 1 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$w = 1; 0 \leq s \leq 6\pi$



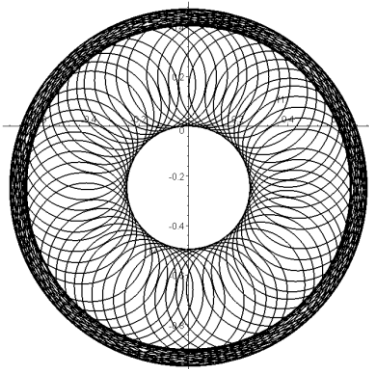
$w = 2; 0 \leq s \leq 6\pi$



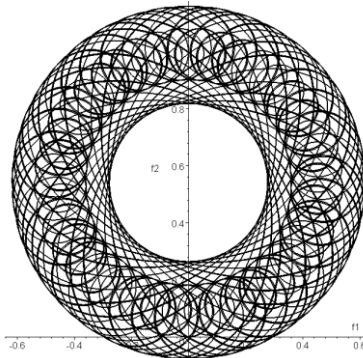
$w = 3; 0 \leq s \leq 60\pi$

Рис. 1. Кривизна уздовж лінії змінюється за законом $(5\cos^2(s) + 1)^w$.

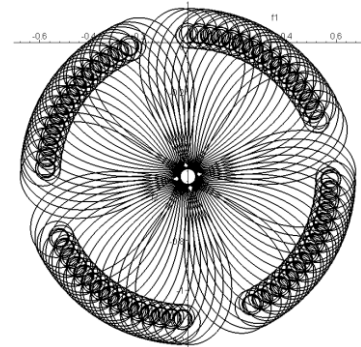
Приклад 2. Нехай $(5\cos^2(s)/4 + 1)^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 2 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$w = 2; 0 \leq s \leq 60\pi$



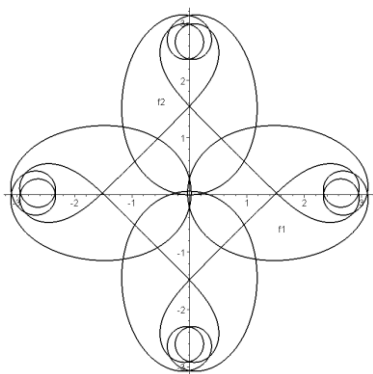
$w = 3; 0 \leq s \leq 60\pi$



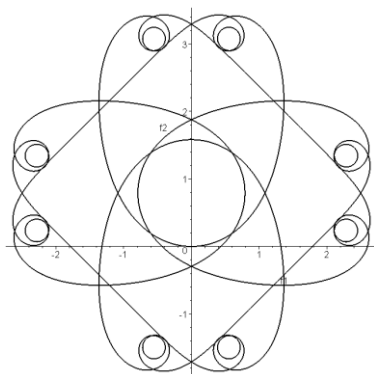
$w = 4; 0 \leq s \leq 60\pi$

Рис. 2. Кривина уздовж лінії змінюється за законом $(5\cos^2(s) + 1)^w$.

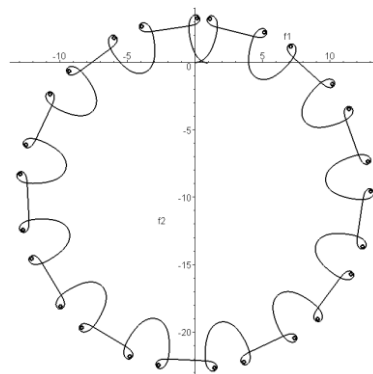
Приклад 3. Нехай $(\cos^2(s/2) + \sin^2(s/3))^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 3 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$$w = 2; 0 \leq s \leq 14\pi$$



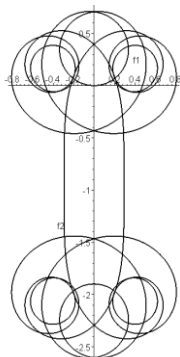
$$w = 3; 0 \leq s \leq 60\pi$$



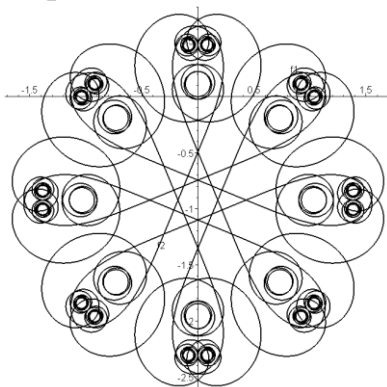
$$w = 4; 0 \leq s \leq 78\pi$$

Рис. 3. Кривина уздовж лінії змінюється за законом $(\cos^2(s/2) + \sin^2(s/3))^w$.

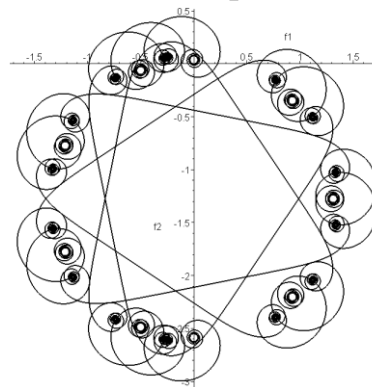
Приклад 4. Нехай $(3\cos^2(s/2) + 2\sin^2(s/3))^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 4 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$$w = 1; \\ 0 \leq s \leq 12\pi$$



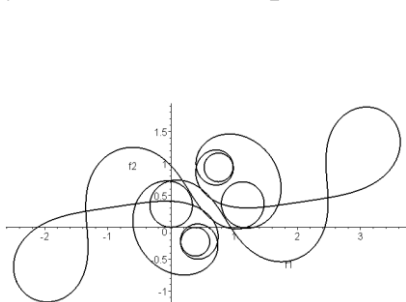
$$w = 2; 0 \leq s \leq 48\pi$$



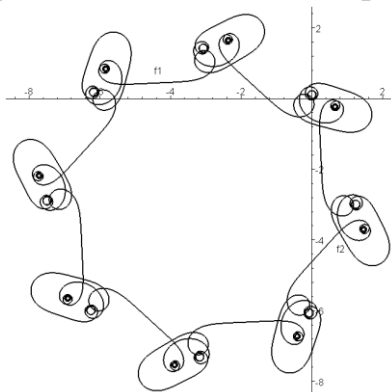
$$w = 3; 0 \leq s \leq 48\pi$$

Рис. 4. Кривина уздовж лінії змінюється за законом $(3\cos^2(s/2) + 2\sin^2(s/3))^w$.

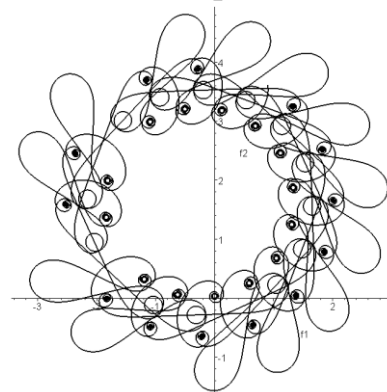
Приклад 5. Нехай $(3\cos^2(s/2) + 2\sin^3(s/3))^w$ є описом закону зміни кривини уздовж лінії. На рис. 5 зображені відповідні лінії різних степенів кривини.



$$w = 1; 0 \leq s \leq 12\pi$$



$$w = 2; 0 \leq s \leq 48\pi$$



$$w = 3; 0 \leq s \leq 79\pi$$

Рис. 5. Кривина уздовж лінії змінюється за законом $(3\cos^2(s/2) + 2\sin^3(s/3))^w$.

Незважаючи на «орнаментний» характер, лінії різних степенів кривини

можуть застосовуватися у найрізноманітніших галузях науки. Наприклад, у роботі Ю.Л.Сачкова [6] перераховані такі варіанти використання ейлеревих еластик ($w = 2$):

- теорія пружності й опір матеріалів (моделювання форми колон, балок або пружних стержнів);
- розмір і форми в біології (кривина хребта, механіка крил комах);
- аналоги сплайнів та апроксимації (Г.Біркхоф, К.Р. де Бур, 1964);
- відновлення ушкоджених зображень і відновлення прихованих зображень у комп'ютерному баченні роботів (Д.Мамфорд, 1994);
- моделювання тонких оптичних волокон і гнучких з'єднань у мікроелектроніці (В.Джеірезбхой, 2008);
- динаміка осі вихру та рівняння Шредінгера (Х.Хасімото, 1971);
- моделювання молекул ДНК (Р.С.Маннінг, 1996).

Висновки: ейлерові еластики можуть використовуватися в автомобільному транспорті для розрахунку шляху оптимального руху автомобіля (або мобільного робота) по площині, і так само для розробки системи керування автомобільним потягом з двома чи трьома причепами, що особливо актуально для випадку руху такого автопотягу заднім ходом.

Перспективи подальших досліджень. Мається на увазі описані криві використовувати для проектування об'єктів дизайну. Конкретизація напрямлення їх використання – подальша ціль дослідження.

Література

1. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения / А.А. Савелов / – М.: Физматгиз, 1960.– 289 с.
2. Пилипака С.Ф. Дослідження плоских кривих, натуральні рівняння яких мають синусоїдний характер // Пилипака С.Ф./ Прикладна геометрія та інженерна графіка . К.: КНУБА, 2006. – вип. 76. – С. 160–165
3. Бадаєв Ю.І. Універсальна аналітична крива для побудови візерунка. // Ю.І.Бадаєв, Т.І.Щоголева / Прикладна геом. та інж. графіка – Праці / Таврійська держ. агротехнічна академія. Вип. 4, Т, 40. – Мелітополь: ТДАТА, 2008,– с. 32–37.
4. Борисенко В.Д. Масштабування плоских криволінійних обводів заданої кривини // Борисенко В.Д., Устенко С.А., Спіцин В.Є. / Прикладна геометрія та інженерна графіка . К.: КНУБА, 2003. – вип. 72. – С. 189–191
5. Рашевский Л.В. Курс дифференциальной геометрии / Л.В. Рашевский / – М.,Л. : ГОНТИ, 1939, 360с.
6. Сачков Ю.Л. Исследование задач механики, робототехники и восстановления изображений методами геометрической теории управления // Ю.Л.Сачков / Труды семинара лаборатории №7. Переславль–Залесский: Институт Программных Систем РАН, 2011. – 79 с.

Аннотация

Куценко Л.Н., Челомбитко В.Ф. Линии с управляемыми кривизнами, построенные средствами математического пакета maple. В статье рассмотрен способ описания и построения кривых на плоскости, в натуральные уравнения которых входит кривизна, заранее вычисленная с положительной степенью.

Ключевые слова: кривые с управляемой кривизной, классическая кривизна, закон изменения кривизны, эластики эйлера, maple.

Abstract

Kutsenko L.N., Chelombitko V.F. Lines with the guided curvatures, built by facilities of mathematical package of maple. The method of description and construction of curves is considered on a plane, the curvature calculated with a positive degree is included in natural equations of that.

Keywords: curves with the guided curvature, classic curvature, law of curvature change, elastiques of euler, maple.