

УДК 514.18

О. М. Семків<sup>1</sup>, О. І. Сухарькова<sup>2</sup><sup>1</sup>Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)<sup>2</sup>Український державний університет залізничного транспорту (м. Харків)**НАБЛИЖЕНЕ ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ  
ФАЗОВИХ ТРАЕКТОРІЙ РІВНЯНЬ МАЯТНИКОВИХ КОЛИВАНЬ**

Наведено графоаналітичний спосіб визначення критичних значень параметрів фазових траєкторій диференціальних рівнянь другого порядку, що базується на понятті викривленості траєкторій і враховує зміну знака їх кривини вздовж траєкторій.

Ключові слова: фазова траєкторія, критичні значення параметра, аналіз на якісному рівні, викривленість кривої, кривина кривої.

Форм. 7. Рис. 8. Літ. 13.

О. М. Семків, Е. И. Сухарькова

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ  
ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ УРАВНЕНИЙ МАЯТНИКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ.**

Приведен графоаналитический способ определения критических значений параметров фазовых траекторий дифференциальных уравнений второго порядка, который базируется на понятии искривленности траекторий и учитывает изменение знака их кривизны вдоль траекторий.

Ключевые слова: фазовая траектория, критические значения параметра, анализ на качественном уровне, искривленность кривой, кривизна кривой.

O. M. Semkiv, E. I. Sukharkova

**CLOSE DETERMINATION OF CRITICAL VALUES OF PARAMETERS OF PHASE  
TRAJECTORIES OF EQUALIZATIONS OF PENDULUM VIBRATIONS.**

A graphic analytical method over of determination of critical values of parameters of phase trajectories of differential equalizations is brought the second order, that is based on the concept of distorted of trajectories and takes into account the change of sign of their curvature along trajectories.

Keywords: a phase trajectory, critical values of parameter, analysis at quality level, distorted of curve, curvature of curve.

**Постановка проблеми.** Аналіз маятникових коливань є традиційним об'єктом дослідження теоретичної механіки. Їх вивчення на якісному рівні зручно здійснювати методом фазових траєкторій. Сутність цього методу полягає у описі поведінки коливань за допомогою наочних геометричних зображень - фазових портретів [1,2, 6-9], побудованих на площині у прямокутних координатах «зміщення» і «швидкість». У описі коливального процесу може існувати принаймні один параметр, що суттєво впливатиме на характер коливань, і зміна значення якого може розмежовувати «якість» коливань. Виникає *біфуркація* - тобто зміна характеру руху коливальної системи на великому часовому інтервалі при зміні одного або декількох параметрів. Ті значення параметрів, при яких змінюються якісні або топологічні властивості руху, називаються критичними або біфуркаційними значеннями. Для практичних впроваджень необхідні інженерні способи обчислення критичних значень параметра коливань, врахування якого може або поліпшити конструкцію коливальної системи, або запобігти її аварійному стану [11,12]. Це вказує на актуальність обраної теми досліджень.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Основи пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій (теорії біфуркацій) закладені А. Пуанкаре й О.М. Ляпуновим, потім ці дослідження були розвинені О.О.Андроновим і учнями [1,6,9]. У роботі [3] наведено огляд різноманітних способів дослідження фазових траєкторій на якісному рівні. Але серед них виявилось лише декілька суто графічних, які спираються на геометричні інтерпретації ізоклін як розв'язків диференціальних рівнянь. Це вказує на недостатній розвиток графоаналітичних способів пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій для інженерної практики.

**Невирішені частини проблеми.** Способи пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій доцільно було б доповнити і такими, що базуються на характері викривленості фазової траєкторії, і які визначаються сукупністю значень її кривини вздовж цієї траєкторії.

Метою дослідження є розробка графоаналітичного способу визначення критичних значень параметрів фазових траєкторій диференціальних рівнянь другого порядку, що базується на понятті викривленості траєкторій і враховує зміну знака їх кривини вздовж траєкторій.

**Основні результати досліджень.** Вважатимемо, що рух точки по фазовій траєкторії здійснюється у межах, який визначається границями зміни параметра  $t$  часу, а «поворот» вправо або вліво при русі задається різними знаками при значеннях кривини цієї траєкторії.

Для пояснення суті способу спочатку замість фазових траєкторій розглянемо сім'ю кривих, для елементів якої кривину можна обчислити точно:

$$x = \sin(pt) + a \cos(t)/2; \quad y = -t \sin(t), \quad (1)$$

де параметр  $t$  змінюється у межах  $t_{MIN} = -0,2\pi < t < t_{MAX} = 2,1\pi$ , а керуючий параметр  $p$  змінюється у межах  $p_{MIN} = 1,5 < p < p_{MAX} = 2,3$ .

Необхідно визначити критичні значення параметра  $p$ , при якому елементи сім'ї кривих змінюють викривленість - тобто мають змінитися на якісному рівні.

Побудуємо ряд послідовних зображень, які відповідають певним значенням параметра  $p$  (рис. 1). Аналізуючи рисунки (бажано в режимі комп'ютерної анімації) легко помітити, що сім'ю кривих можна розділити за трьома характеристиками викривленості її елементів, які будуть розмежовані двома кривими, що відповідають значенням параметрів  $p=1,7$  і  $p=2,15$ .

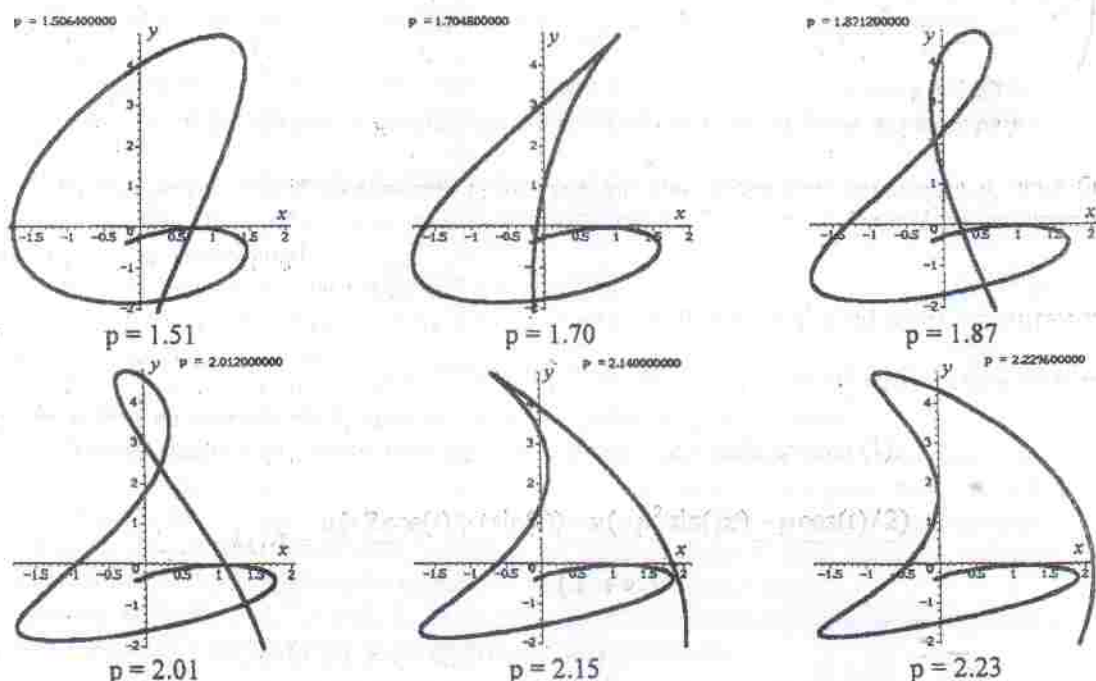


Рис. 1. Деякі зображення, що відповідають певним значенням параметра  $p$

Пропонується спосіб визначення критичних значень керуючого параметра  $p$ , який би не спирався на анімаційні зображення елементів сім'ї кривих. Тобто спосіб розв'язання зазначеної задачі на формальному рівні.

В основу покладено дві тези.

**Теза 1.** Критичні значення керуючого параметра сім'ї кривих відповідають моментам зміни їх елементів на якісному рівні.

**Теза 2.** Якісні зміни елементів сім'ї кривих можна відслідковувати аналізуючи зміни характеру викривленості з використанням значень функцій кривини ліній.

Посилаючись на [4], обчислимо функцію кривини для сім'ї кривих (1):

$$k(p) = \frac{u(-2 \cos(t) + t \sin(t)) - v(-p^2 \sin(pt) - p \cos(t)/2)}{(u^2 + v^2)^{3/2}}, \quad (2)$$

де  $u = p \cos(pt) - p \sin(t)/2$  і  $v = -\sin(t) - t \cos(t)$ .



На рис. 2 наведено елемент сім'ї кривих і відповідний графік функції  $k(t)$  кривини для значення параметра  $p=2$  (тут графік кривини  $k(t)$  обмежено прямою  $k = 6$ ):

Далі вивчимо зміну графіка функції  $k(t)$  залежно від параметра  $p$ . Для цього розглянемо графік невід'ємної частини функції  $k = k(t)$  на відрізку  $[1,5; 2,3]$ . Криволінійна трапеція, обмежена графіком і трьома відрізками прямих (відрізок  $[1,5; 2,3]$  осі  $p$  і два відрізки прямих  $p = 1,5$  і  $p = 2,3$ ), називається підграфіком функції  $k(p)$ .

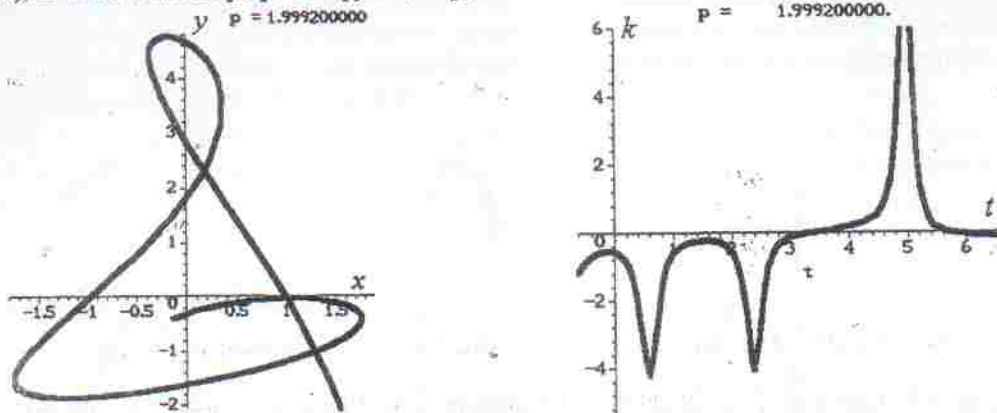


Рис. 2. Елемент сім'ї кривих і графік кривини  $k(t)$  для значення параметра  $p=2$ .

Площа підграфіка є деяке постійне число. Однак можна розглянути змінну величину – підграфік функції  $k(t)$  залежно від параметра  $p$ . Тоді площа підграфіка буде не постійною, а функцією від  $p$ :  $S = S(p)$ .

Обчислювати площу підграфіка будемо за формулою

$$S(p) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, p) dt, \tag{3}$$

де  $F(t, p) = (k(t, p) \vee 0) \wedge k_{\max}$ . Тут  $k_{\max}$  - деяке значення, що обмежує графік функції  $k(t)$ ,  $\vee$  і  $\wedge$  - знаки R- диз'юнкції і R-кон'юнкції [5];  $t_1 = -0,2\pi$ ;  $t_2 = 2,1\pi$ .

В результаті одержимо графік функції зміни площі підграфіка  $S(p)$  (рис. 3а). Його особливість полягає у тому, що у випадку зміни елементів сім'ї на якісному рівні до його складу мають залучатися лінійні елементи (пов'язані зі стрибками функції  $S(p)$ ), розташовані паралельно осі ординат (рис. 3б). І що характерно, координати на осі абсцис цих відрізків матимуть значення, які відповідатимуть критичним значенням керуючого параметра  $p$ .

У даному випадку  $p=1,7$  і  $p=2,15$ , що збігається з критичними значеннями параметра, одержаними «в режимі» спостережень за анімаційними зображеннями.

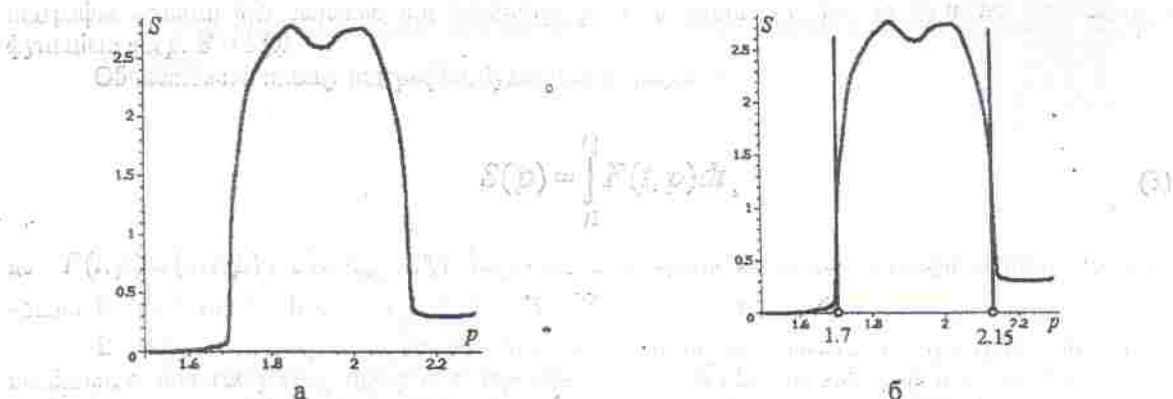


Рис. 3. Графік функції зміни площі підграфіка  $S(p)$  та його особливості

Але у графіка кривини  $k(t)$  існує ще і від'ємна частина, для якої також необхідно вивчити зміну графіка функції  $k(t)$  залежно від параметра  $p$ . Для цього відобразимо графік кривини  $k(t)$

симетрично відносно осі абсцис; також розглянемо графік невід'ємної частини функції  $k = k(t)$  на відрізку  $[1,5; 2,3]$ .

В результаті інтегрування за формулою (5) одержимо другий графік функції зміни площі підграфіка  $S(p)$ , (рис. 4). Тому також властива зазначена вище особливість, згідно якій до його складу залучаються лінійні елементи, розташовані паралельно осі ординат (рис. 4б). І при цьому координати на осі абсцис цих відрізків матимуть значення, що також відповідатимуть критичним значенням параметра  $p=1,7$  і  $p=2,15$ .

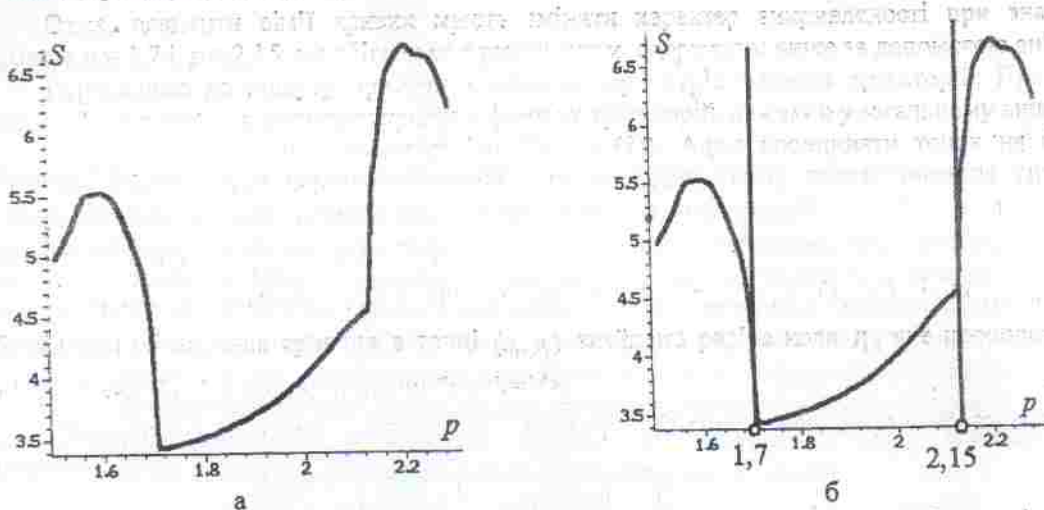


Рис. 4. Другий графік функції зміни площі підграфіка  $S(p)$  та його особливості

Отже, елементи сім'ї кривих мають змінити характер викривленості при значеннях параметра  $p = 1,7$  і  $p = 2,15$ , що збігається з результатом, одержаним вище за допомогою анімації.

Переходимо до пошуку критичних значень параметрів фазових траєкторій. При цьому головним буде питання визначення кривини фазових траєкторій, для яких у загальному випадку не відомі описи аналітичними формулами (подібними (2)). Адже координати точок на фазовій траєкторії обчислюються переважно чисельними методами. Тому постає питання визначити кривину фазової траєкторії з врахуванням «керуючого» параметра (далі позначеного як  $p$ ), задану множиною  $N$  точок  $(x_i, y_i)$  коли  $i = 2..M-1$ .

Оберемо на фазовій кривій три сусідні точки  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_i)$  і  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Для наближеного обчислення кривини в точці  $(x_i, y_i)$  знайдемо радіус кола  $r_1$ , яке проходить через дані три точки. Тоді значення кривини буде  $k=1/r_1$ .

Використаємо відоме з аналітичної геометрії рівняння кола, виражене за допомогою визначника

$$\begin{vmatrix} u^2 + v^2 & u & v & 1 \\ x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2 & x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i^2 + y_i^2 & x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 & x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

$$\text{Позначимо } A = \begin{vmatrix} x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{aligned} B &= y_{i+1}^2 y_i - x_{i+1}^2 y_{i-1} + x_{i+1}^2 y_i - y_{i+1}^2 y_{i-1} - y_i^2 y_{i+1} + y_i^2 y_{i-1} + \\ &+ x_i^2 y_{i-1} - x_i^2 y_{i+1} - y_{i-1}^2 y_i + y_{i-1}^2 y_{i+1} - x_{i-1}^2 y_i + x_{i-1}^2 y_{i+1}; \\ C &= y_{i+1}^2 x_{i-1} - y_{i+1}^2 x_i + x_{i+1}^2 x_{i-1} - x_{i+1}^2 x_i + y_i^2 x_{i+1} - y_i^2 x_{i-1} + \\ &+ x_i^2 x_{i+1} - x_i^2 x_{i-1} + y_{i-1}^2 x_i - y_{i-1}^2 x_{i+1} + x_{i-1}^2 x_i - x_{i-1}^2 x_{i+1}; \end{aligned}$$



$$D = y_{i+1}^2 x_i y_{i-1} - y_{i+1}^2 x_{i-1} y_i - x_{i+1}^2 x_{i-1} y_i + x_{i+1}^2 x_i y_{i-1} +$$

$$+ y_i^2 x_{i-1} y_{i+1} - y_i^2 x_{i+1} y_{i-1} - x_i^2 x_{i+1} y_{i-1} + x_i^2 x_{i-1} y_{i+1} -$$

$$- y_{i-1}^2 x_{i+1} y_i - y_{i-1}^2 x_i y_{i+1} - x_{i-1}^2 x_i y_{i+1} + x_{i-1}^2 x_{i+1} y_i.$$

В результаті одержимо формулу для обчислення радіуса кола

$$r_i = \frac{\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - AD}}{A}, \quad (5)$$

а також координат його центра

$$x_{i0} = -\frac{B}{2A}; \quad y_{i0} = -\frac{C}{2A}. \quad (6)$$

Виходячи з формули (5) обчислимо наближене значення кривини  $k_i = 1/r_i$  в точці  $(x_i, y_i)$ . Умова  $A = 0$  визначатиме нульову кривину (коли точки розташовані на прямій).

Після визначення кривин для усіх точок на фазовій траєкторії будемо кусково-лінійний графік функції  $k(t)$  кривин для певного значення параметра  $p$ . Площу підграфіка (для початкового значення  $p$ ) визначаємо за допомогою одного з чисельний методів (наприклад, метода Сімпсона). Виконуючи зазначені дії в циклі для інших значень параметра  $p$ , одержимо наближений графік функції  $S(p)$ , який складатиметься з лінійних відрізків. Згідно наведеного вище, критичні значення визначатимуться за допомогою вертикальних складових кусково-лінійного графіка функції  $S(p)$ .

Далі розглянемо приклади дослідження залежно від початкових умов коливань математичного маятника, стан якого описано системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t); \quad \frac{d}{dt} y(t) = -0,2y(t) - 9.8 \sin(x(t)). \quad (7)$$

Тут  $x(t)$  слід інтерпретувати як зміщення, а  $y(t)$  – як швидкість маятника.

Розв'язувати систему диференціальних рівнянь (7) будемо чисельно методом Рунне-Куты-78, змінюючи при цьому початкові умови  $x(0)$  і  $y(0)$ .

Для тестування програми (в середовищі мови Maple [13]) обрано умови  $x(0)=0$  і  $6 < y(0) < 8$ . На рис. 5 наведено анімаційні кадри зміни фазового портрету, з яких визначаються наближені критичні значення початкової швидкості  $y_1(0) = 6,65$  і  $y_2(0) = 7,6$  як «керуючого» параметра  $p$ .

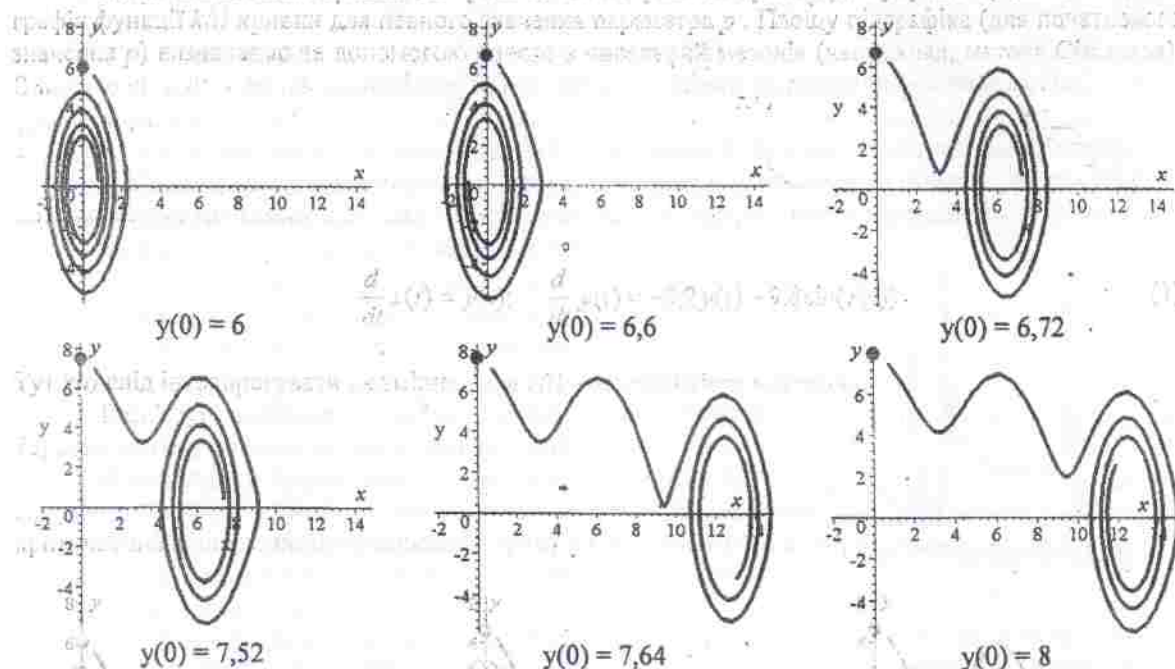


Рис. 5. Анімаційні кадри зміни фазового портрету залежно від  $y(0)$

На рисунках колом позначена точка, що відповідає початковим умовам. При цьому крок між точками на фазовій кривій обирався  $\Delta = 0,1$ ; всього кількість точок  $M=1000$ . На рис. 6 наведено графік відповідної функції  $S(p)$  залежно від кількості ітерацій  $N$ , де критичні значення ( $y_1(0) = 6,65$  і  $y_2(0) = 7,6$ ) визначаються вертикальними складовими графіка функції  $S(p)$ . Незмінність положення точок критичних значень при  $N=50$  і  $N=100$  вказує на збіжність процесу обчислень.

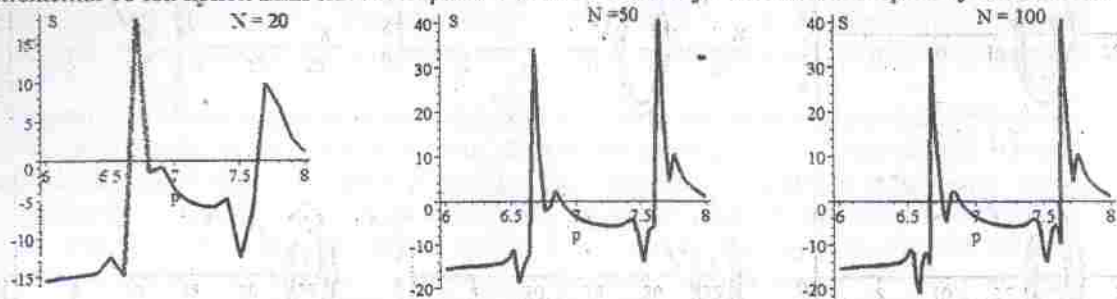


Рис. 6. Графік функції  $S(p)$  залежно від кількості ітерацій  $N$

Більш цікавим є випадок аналізу коливань за умови  $0 < x(0) < 6$  і  $y(0) = 8$ . На рис. 7 наведено анімаційні кадри зміни фазового портрету залежно від значень  $x(0)$ . На рис. 8 наведено графік відповідної функції  $S(p)$  зі знайденими критичними значеннями  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 2$  і  $x_3(0) = 4,8$ .

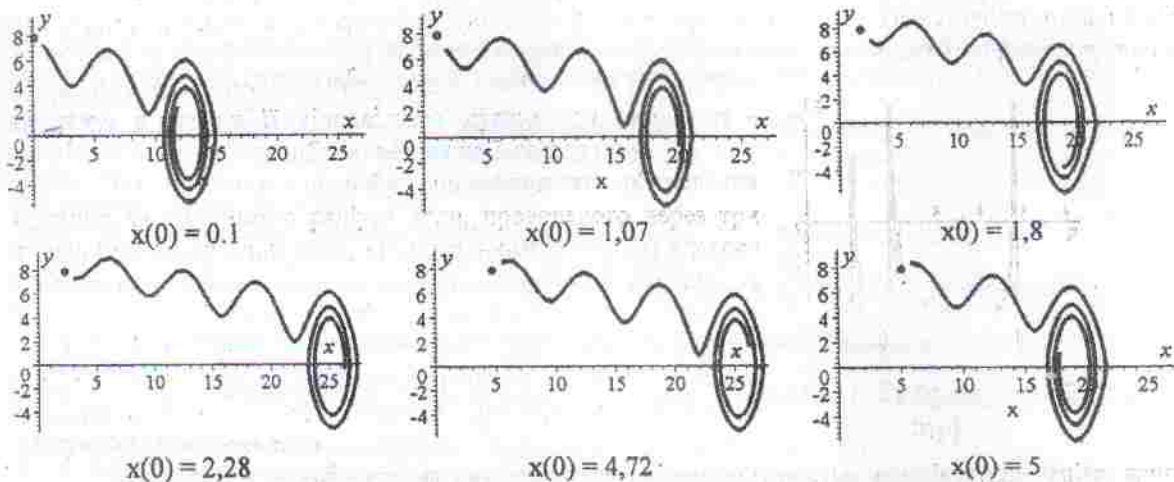


Рис. 7. Анімаційні кадри зміни фазового портрету залежно від  $x(0)$

У даній роботі як міра локальної викривленості фазової траєкторії використана кривина, яка виражена через радіус кривини. Чим менше радіус кривини, тим більше вигнута лінія в даній точці. Заміна нескінченно малої дуги лінії поблизу пробної точки відповідним відрізком дотичної супроводжується нескінченно малою похибкою не нижче 2-го порядку, а заміна її відповідною дугою кола кривини - нескінченно малою похибкою не нижче 3-го порядку.

Використання способу наближеного обчислення кривини за допомогою радіуса кола, проведеного через три точки, було необхідно тому, що чисельним способом вдалося наближено обчислити лише значення функції та її похідної. А для обчислення кривини необхідно знати ще і другу похідну. Тому після аналізу поширених чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь було прийнято рішення наближено обчислювати кривини за допомогою радіуса «дотичного» кола.

Розглянуті в роботі питання узгоджуються з відомою геометричною інтерпретацією другої похідної. Дійсно, існує зв'язок між другою похідною  $y''(x)$  і радіусом кривини графіка функції  $y = f(x)$  у відповідній його точці. Якщо радіус кривини не існує або дорівнює нескінченності, то  $f''(x)$  не існує або  $f''(x) = 0$  і навпаки. У точці перегину лінія або не має радіуса кривини або її радіус кривини дорівнює нескінченності.



Рис. 8. Графік функції  $S(p)$



Існування неперервної другої похідної і, отже, неперервної кривини, суттєво враховується при розбивці залізничних закрутлень, при будівництві автомобільних доріг, при розрахунках сляломних трас, тощо [12].

Наведений графоаналітичний спосіб визначення критичних значень параметрів фазових траєкторій диференціальних рівнянь маятникового типу дозволить розв'язувати деякі задачі якісної теорії диференціальних рівнянь. Адже мета зазначеної теорії полягає в тому, щоб, не розв'язуючи диференціальне рівняння й по можливості взагалі уникаючи обчислень, визначити ряд якісних властивостей рішень. Причому часто саме ці властивості й становлять особливий інтерес як для самої теоретичної механіки, так і для її впроваджень стосовно маятникових коливань.

Подальше ускладнення задач аналізу фазових портретів пов'язане з їхньою залежністю від параметрів, які входять до системи звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, при плавній зміні параметра моделі може мінятися розташування атракторів на фазовій площині, а також можуть виникати нові атрактори й припиняти своє існування старі. У першому випадку, при відсутності особливостей, буде відбуватися просте переміщення атракторів по фазовій площині (без зміни їхніх типів і кількості), а в другому - фазовий портрет динамічної системи буде докорінно перебудовуватися. Нагадаємо, що критичне сполучення параметрів, при яких фазовий портрет системи якісно міняється, називається в теорії динамічних систем точкою біфуркації.

**Висновок.** Для визначення критичних значень параметра  $p$  сім'ї фазових траєкторій необхідно знайти координати на осі абсцис вертикальних складових на графіку  $S=S(p)$  залежності від параметра  $p$  площі підграфіка функції кривини  $k(t)$  (або стрибків значень функції  $S(p)$ ). Правило легко формалізується за допомогою «алгоритму сортування точок».

1. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
2. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М.: Наука, 1990. – 287 с.
3. Китаев Д. Б. Развитие качественной теории дифференциальных уравнений в XIX столетии: дис. канд. техн. наук: 07.00.10 / Д. Б. Китаев. – М.: Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН. – 2011. – 140 с.
4. Мищенко А. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев, А. Т. Фоменко. – М.: Изд. ФМЛ, 2001. – 352 с.
5. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики / В. Л. Рвачев. – Киев: Техніка, 1967. – 213 с.
6. Бутенин Н. В. Теория колебаний / Н. В. Бутенин. – М.: Высшая школа, 1963. – 187 с.
7. Рабинович М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
8. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. Учебное пособие / В. Д. Горяченко. – Красноярск: изд-во Краснояр. ун-та, 1995. – 429 с.
9. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости / Н. Н. Баутин. – М.: Наука, 1984. – 176 с.
10. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний / С. П. Стрелков. – Л.: ГИТТЛ, 1950. – 344 с.
11. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство / Т. Шуп. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
12. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
13. Betoules, D. Differential equations: theory and applications: with Maple / D. Betoules. – Hattiesburg, MS, University of Southern Mississippi, 2001. – 686 p.

Стаття надійшла до редакції 19.04.2015