

В. Шатохін

Професор, докт. техн. наук,
Харківський національний
університет будівництва і архітектури,
м. Харків

О. Семків

Доцент, канд. техн. наук,
Національний університет
цивільного захисту України,
м. Харків

Н. Шатохіна

Доцент, канд. техн. наук,
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут",
м. Харків

УДК 517.972:514.18

ВИБІР ОПТИМАЛЬНОЇ ФОРМИ ЛОПАТКИ РОТОРНОГО МЕТАЛЬНИКА ҐРУНТУ

Запропоновано метод визначення оптимальної форми профілю лопатки роторного метальника ґрунту, який базується на розв'язанні задачі про брахістохрону для поля відцентрових сил інерції. Побудовано функціонал часу в полярній системі координат і записано відповідне рівняння Ейлера; отримано його перший інтеграл, для якого знайдено аналітичне розв'язання. Встановлено, що розв'язання має різну структуру в залежності від параметрів метальника. Представлено результати застосування теорії для знаходження оптимальної форми профілю лопатки роторного метальника ґрунту.

ґрунтометальник, оптимальна форма лопатки, відцентрова сила інерції, полярні координати, функціонал часу, рівняння Ейлера, екстремум функціонала

Вступ. При створенні технічних пристроїв певного класу виникає проблема вибору форми напрямних, у яких рухаються матеріальні частки (наприклад, ґрунту) під дією відцентрових сил. Зокрема, актуальною є проблема створення ґрунтометальних механізмів, використовуваних для гасіння лісових пожеж у місцевостях з дефіцитом джерел води [1, 3 – 7, 12]. Аналогічні механізми використовуються в дорожніх, сільськогосподарських машинах і т.д. На практиці застосовують роторні ґрунтометальники [1, 3, 5 – 7, 12], які за допомогою прікріплених до обертового ротора лопаток викидають частки ґрунту до зони загоряння. Технологічні характеристики цих пристроїв істотно залежать від геометричної форми й розташування лопаток. Це вказує на актуальність дослідження форми профілю лопаток – включаючи і пошук оптимальної форми.

У працях [5, 6] проведені дослідження з вибору параметрів ґрунтометальника, профіль лопаток яких є прямолінійним. Перспективним буде використання лопаток з криволінійними профілями [1, 2, 7, 12]. Методи вибору їхньої форми й аналізу руху часток ґрунту по них

до цього часу не досить розроблені. Задача вибору оптимальної форми лопаток може бути формалізована як визначення форми кривої у полі відцентрових сил інерції, яка забезпечує мінімальний час руху. Прототипом є задача про брахістохрону у полі відцентрових сил. Зазначимо, що класична задача про брахістохрону для однорідного поля сил ваги була відправною точкою при створенні варіаційного числення [8]. Відомі [9] спроби розв'язання аналогічних задач для випадку центральної сили відштовхування. У статті [2] викладено метод знаходження траєкторії точки за умови мінімізації часу руху при дії відцентрової сили інерції.

Метою цієї статті є розробка методу складання і розв'язання функціоналу часу для задачі про брахістохрону у полі відцентрових сил інерції, та визначення оптимального за геометричною формою профілю лопатки метальника ґрунту. У статті приведені результати розрахункових досліджень.

1. Побудова функціоналу часу. Розв'язання задачі про функціонал часу руху у полі відцентрових сил доцільно провести в полярній системі координат. Нехай

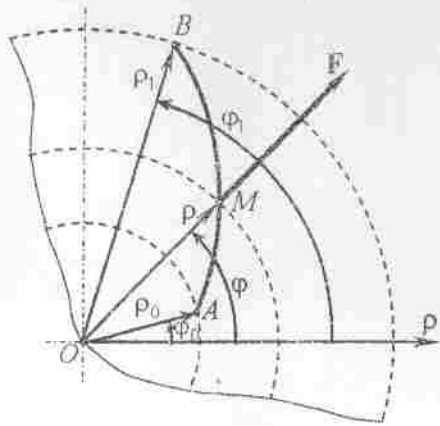


Рис. 1. Схема для побудови брахістохрони у полі відцентрових сил

точки A і B розташовані в центральному полі сил відштовхування – відцентрових сил із центром у точці O (рис. 1). Проведемо через точки A, B і центр O площину й розглянемо криві, що з'єднують ці точки й розташовані на даній площині. Виберемо із цих кривих таку, щоб матеріальна точка, яка виходить з A зі швидкістю $v_0 = 0$ і рухається лише під дією відцентрової сили, досягне точки B за мінімальний час.

Уведемо полярну систему координат ρ, φ із центром у зазначеній точці. Поточні координати точки M позначимо, як ρ і φ ; координати точок A і B нехай будуть відповідно (ρ_0, φ_0) й (ρ_1, φ_1) . Проекція відцентрової сили інерції матеріальної точки, пов'язаної з обертовим тілом, на напрямок радіуса ρ має вигляд

$$F_p = ma_\omega = m\omega^2\rho, \quad (1)$$

де m – маса точки; $a_\omega = \omega^2\rho$ – відцентрове (нормальне) прискорення; ω – кутова швидкість.

Тоді вираз для потенціальної енергії відцентрової сили інерції можна представити так [10]:

$$\Pi = \int_p^0 F_p dp = m\omega^2 \int_p^0 \rho d\rho = -\frac{m\omega^2}{2}\rho^2. \quad (2)$$

При записі формули (2) приймалося, що початковим положенням для визначення потенціальної енергії є відштовхувальний центр (точка O), де потенціальна енергія дорівнює нулю.

Якщо знехтувати силами тертя й опору, то має місце закон збереження енергії у відносному русі у рівномірно обертової навколо нерухомої осі системі координат [10]:

$$T + \Pi = h = \text{const}, \quad (3)$$

де $T = 0,5mv^2$ – кінетична енергія точки у відносному русі стосовно обертової системи координат; $h = -0,5m\omega^2\rho_0^2$ – стала енергії.

Надалі вважатимемо, що у формулі (3) враховується тільки потенціальна енергія відцентрової сили інерції. З погляду впровадження це найбільш важливий випадок. У технологічних пристроях кутова швидкість така, що

вплив сил ваги на рух точки є незначним. При аналізі руху в горизонтальній площині це застереження взагалі виявляється зайвою.

З урахуванням виразу (2) формула (3) набуває вигляду

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 = -\frac{m\omega^2}{2}\rho_0^2. \quad (4)$$

Звідки маємо формулу для обчислення швидкості точки

$$v = \omega\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (\rho \geq \rho_0). \quad (5)$$

З визначення алгебричної величини швидкості (проекції швидкості на догичну до траєкторії) $v = v_\tau = ds/dt$, виразу для квадрата диференціала дуги у полярних координатах $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ і формули (5) слідує, що

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\omega\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi, \quad (6)$$

де $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$.

При відліку дуги у напрямку руху точки диференціал шляху збігатиметься з диференціалом дугової координати ds , а модуль швидкості точки з її алгебричною величиною $v = v_\tau$. Інтегруючи, одержимо функціонал

$$\tau[\rho(\varphi)] = \frac{1}{\omega} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi. \quad (7)$$

2. Пошук екстремуму функціонала. Для підінтегральної функції інтеграла (7) введемо позначення

$$P = P(\rho, \rho') = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}. \quad (8)$$

На кривій, яка реалізує екстремум розглянутого функціонала (7), повинна виконуватися умова, яка впливає з необхідних умов екстремуму функціонала [8].

$$P_\rho - \frac{d}{d\varphi} P_{\rho'} = 0, \quad (9)$$

де $P_\rho, P_{\rho'}$ – похідні від P відповідно по ρ й ρ' .

Таким чином, шукана функція $\rho = \rho(\varphi)$ є розв'язанням диференціального рівняння другого порядку (9), або з використанням позначення $\rho'' = d^2\rho/d\varphi^2$, в розгорнутому вигляді

$$P_\rho - P_{\rho\rho'} - P_{\rho\rho'}\rho' - P_{\rho'\rho'}\rho'' = 0, \quad (10)$$

Рівняння (10) є рівнянням Ейлера. У розглянутому випадку P залежить лише від ρ і ρ' , тому фактично воно є більше компактним

$$P_\rho - P_{\rho\rho'}\rho' - P_{\rho'\rho'}\rho'' = 0, \quad (11)$$

тому що $P_{\rho\rho} = 0$.

Якщо помножити всі компоненти рівняння на ρ' , то ліва частина перетворюється в точну похідну:

$$\frac{d}{d\varphi}(P - \rho'P_{\rho}').$$

Отже, рівняння Ейлера має перший інтеграл

$$P - \rho'P_{\rho}' = \frac{1}{C}. \quad (12)$$

У розглянутому випадку

$$P_{\rho}' = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}},$$

тому формула (12) набуває вигляду

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} = \frac{1}{C}. \quad (13)$$

З виразу (13) після спрощень одержуємо,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{(\rho^2 - \rho_0^2)} - 1}. \quad (14)$$

Диференціальне рівняння (14) допускає аналітичний розв'язок (занадто громіздкий виклад формул тут не наводиться):

$$\varphi = \begin{cases} \arctg z + \frac{1}{z} + C_1, & C^2 = 1, \\ \arctg z - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \arctg z - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{C^2-1}}{z + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1, \end{cases} \quad (15)$$

де

$$z = \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (16)$$

Для знаходження сталих C і C_1 з урахуванням (16) випишемо крайові умови:

$$\text{при } \varphi = \varphi_0 \quad \rho = \rho_0, \quad z = z(\rho_0) = z_0 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho_0^2} - 1} = \infty; \quad (17)$$

$$\text{при } \varphi = \varphi_1 \quad \rho = \rho_1, \quad z = z(\rho_1) = z_1 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (18)$$

На лівій межі співвідношення (15) набувають такого вигляду:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 = 1, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 < 1, \\ \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (19)$$

З виразів (19) слідує, що

$$C_1 = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 = 1, \\ \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2}, & C^2 < 1, \\ \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (20)$$

На правій межі співвідношення (15) дають

$$\varphi_1 = \begin{cases} \arctg z_1 + \frac{1}{z_1} + C_1, & C^2 = 1, \\ \arctg z_1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \arctg z_1 - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z_1 - \sqrt{C^2-1}}{z_1 + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1, \end{cases} \quad (21)$$

Аналогічно (20) для C_1 з виразів (21) маємо

$$C_1 = \begin{cases} \varphi_1 - \arctg z_1 - \frac{1}{z_1}, & C^2 = 1, \\ \varphi_1 - \arctg z_1 + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}}, & C^2 < 1, \\ \varphi_1 - \arctg z_1 + \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z_1 - \sqrt{C^2-1}}{z_1 + \sqrt{C^2-1}} \right|, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (22)$$

Для практики інтерес представляють випадки, коли $C^2 < 1$ і $C^2 > 1$.

3. Вибір оптимальної форми лопаток ґрунтометальника. На рис. 2 показана схема ґрунтометальника: 1 – ступиця; 2 – кільце; 3 – спиця; 4 – криволінійна лопатка. Передбачається, що метальник обертається з кутовою швидкістю ω проти ходу годинникових стрілок. Радіуси R_1 і R_2 являють собою радіуси кіл, що проходять через задню й передню крайки лопатки. У викладеній вище теорії їм відповідають полярні радіуси ρ_0 й ρ_1 .

У цій роботі обмежимося аналізом розв'язку при $C^2 < 1$. Для знаходження константи C скористаємося трансцендентним рівнянням, що випливає з порівняння правих частин відповідних рядків виразів (22) і (20) за умови врахування крайової умови (18)

$$f(x) = \varphi_1 - \arctg \sqrt{\frac{x \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} +$$

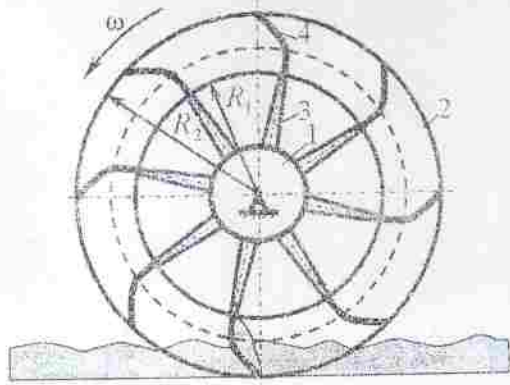


Рис. 2. Схема ґрунтометального механізму

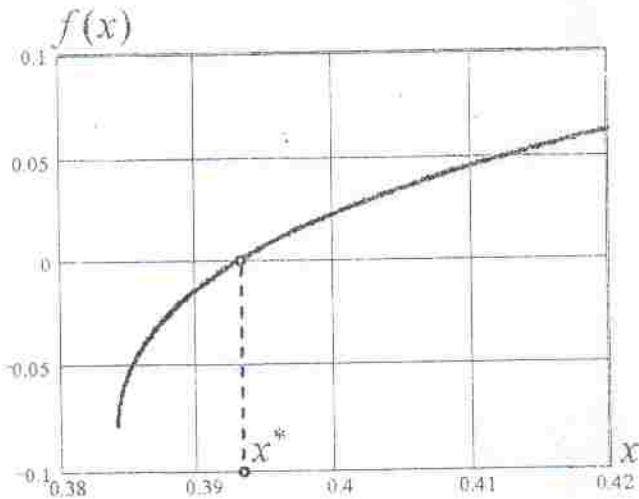


Рис. 3. Графік функції $f(x)$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1-x}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}}{\sqrt{1-x}} - \varphi_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \frac{\pi}{2} = 0, \quad (23)$$

де $x = C^2$.

У середовищі MathCAD [11] при наявності графіка $f(x)$ (рис. 3) корінь функції зручно знаходити з використанням вбудованої функції $\operatorname{root}(f(x), x, a, b)$. Для кореня $f(x)$ (тестовий варіант розраховано з параметри: $\rho_0 = 0,496 \text{ м}$, $\rho_1 = 0,632 \text{ м}$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 20^\circ$) отримане значення $x^* = 0,393 < 1$, якому відповідає $C = \sqrt{x^*} = 0,627$.

У відповідності з другим виразом (20) або (22) з урахуванням (18) для C_1 маємо

$$C_1 = \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2} = \varphi_1 - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}}{\sqrt{1-C^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}}{\sqrt{1-C^2}} = 0,445$$

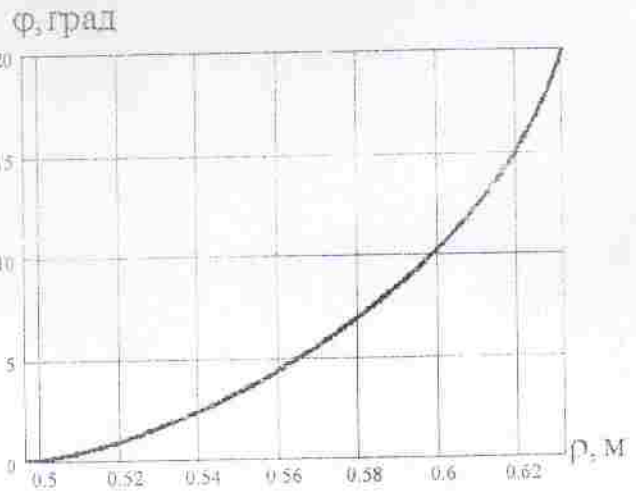


Рис. 4. Графіки функцій $\varphi = \varphi(\rho)$

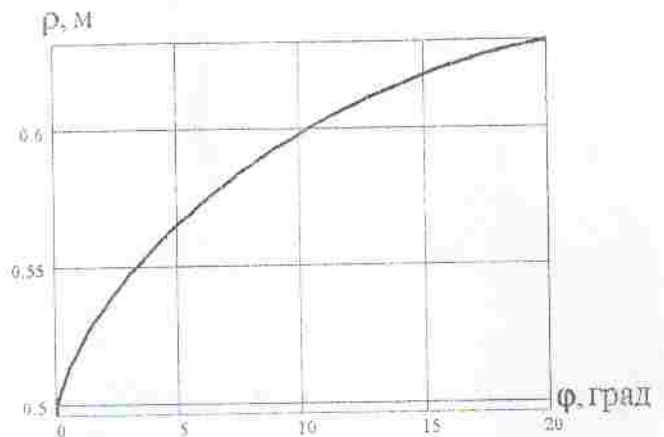


Рис. 5. Графіки функцій $\rho = \rho(\varphi)$

Знайдені значення сталих C і C_1 за допомогою формул (15) і (16) дозволяють записати вираз для шуканої функції

$$\varphi(\rho) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}}{\sqrt{1-C^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, \quad (24)$$

Графік цієї функції представлений на рис. 4; більш зручний для аналізу графік оберненої функції $\rho(\varphi)$ – на рис. 5 [2].

На завершення наведемо графіки залежностей $\rho(\varphi)$ у полярній системі координат (рис. 6) для граничних значень ρ_0^* , які забезпечують можливість використання формули (24) ($C^2 < 1$) для побудови розв'язків. Значення $\rho_1 = 0,632 \text{ м}$, а кут φ_1 приймався кратним 20° .

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на детальне вивчення залежності властивостей оптимальних траєкторій від параметрів.

Висновки. 1. Розроблено метод розв'язання задачі про брахістохрону для точки, яка рухається під дією відцентрової сили інерції.

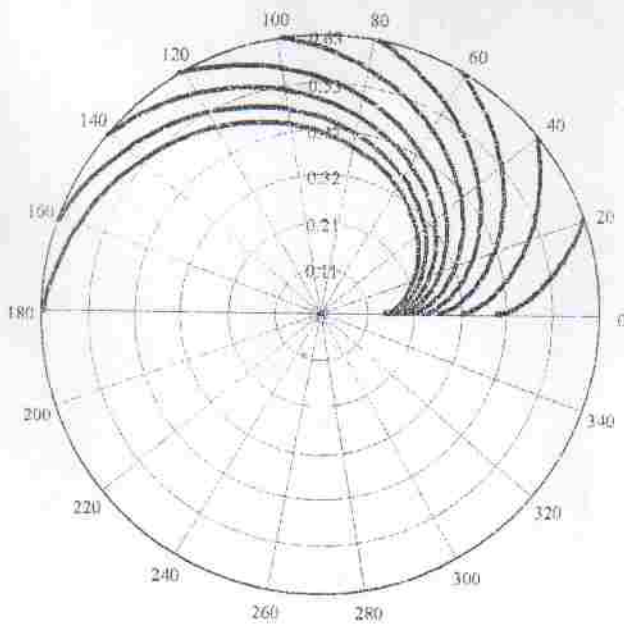


Рис. 6. Графіки функцій $\rho(\varphi)$ для граничних значень ρ_0^* ($C^2 < 1$) при різних значеннях φ

2. Побудовано функціонала часу в полярній системі координат.
3. Отримано перший інтеграл рівняння Ейлера у формі диференціального рівняння першого порядку й знайдено його аналітичний розв'язок.
4. Наведено результати розрахунків траєкторій для вибору оптимальної форми лопатки металника ґрунту.

Література

1. Шатохін В.М. Про оптимальну форму лопатки роторного металника ґрунту / В.М. Шатохін, О.М. Семків, А.М. Попова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4. – Т. 55. – С. 260-269.
2. Шатохін В.М. Оптимальные траектории движения точки, перемещающейся под действием центробежной силы инерции / Шатохін В.М., Шатохіна Н.В. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2012. – Вип. 4/7 (58). – С. 9-14.
3. Шатохін В.М. Исследование движения частиц ґрунта со случайными параметрами, выбрасываемых роторным ґрунтометателем / Шатохін В.М., Шатохіна Н.В., Попова А.Н. // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 383-390.
4. Семків О.М. Розрахунок робочого органа ланцюгового ґрунтометального механізму / Семків О.М., Шатохін В.М. // Міжвідомчий науково-технічний збірник

"Прикладна геометрія та інженерна графіка". Випуск 87. – К.: КНУБА, 2011. – С. 303-312.

5. Семків О.М. Дослідження траєкторії руху частки ґрунту після її вильоту з робочої поверхні лопатки роторного ґрунтометальника / Семків О.М., Попова А.М. // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4. – Т. 54. – С. 126-134.

6. Попова А.М. Дослідження руху частки ґрунту по лопатці: результати комп'ютерних експериментів / Попова А.М., Шатохін В.М. // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4. – Т. 54. – С. 135-144.

7. Семків О.М. Исследование движения частицы ґрунта по лопатке с профилем оптимальной формы в поле центробежных сил инерции / Семків О.М., Шатохін В.М., Попова А.Н. // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Технічна естетика і дизайн". – К.: КНУБА. – 2012. – Вип. 11. – С. 165-174.

8. Эльсгольц Л.В. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Эльсгольц Л.В. – М.: Наука, 1969. – 279 с.

9. Геронимус Я.Л. Вариационные методы решения задач оптимизации: Учеб. пособие. / Геронимус Я.Л., Голинский Б.Л. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1987. – 114 с.

10. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики. В 2-х томах. т. II. Динамика. / Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

11. Кирьянов Д.В. Mathcad 13. / Кирьянов Д.В. – СПб.: ВХВ-Петербург, 2006. – 608 с.

12. Семків О.М. Опис руху частки ґрунту по лопатці із профілем брахістохрони у полі відцентрових сил інерції / Семків О.М., Шатохін В.М., Попова А.М. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2012. – Вип. 30. – С. 190-200.

Отримана 14.03.13

Shatokhin V., Semkiv O., Shatokhina N.

Configuration optimal choice of the blade for rotor ground-thrower

¹Kharkiv National University of Engineering and Architecture, Kharkiv;

²National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv;

³National technical university "Kharkov polytechnic institute", Kharkiv

Method of determination of ground-thrower's blade optimum form based on solution of brachistochrone problem for the field of centrifugal inertial forces. Blade of optimal shape – brachistochrone in the centrifugal force field, which equation had been obtained in polar coordinate system, is considered. Time functional in polar coordinate system is built and corresponding Euler equation is written: it's first integral is obtained, for which the analytical decision is found. It is determined that decision has different structure depending on thrower's parameters. Results of the theory application for search of ground-thrower blade's optimum form are represented.