Kaygorodtseva N.V., Odinets M.N., Kaygorodtseva T. N.

Autodesk – opening of a point of presence at the Siberian region. The scientific and educational center Autodesk – OmGTU

Resume. At present dynamics of development of the industry, equipment and technology actual there is a question as well as where the expert to receive and update the knowledge? To study the new directions and information technologies independently or under the leadership of the qualified teachers? Answers to these questions in many respects depend on conditions and quality of the educational process organized by training centers. In this publication it is a question of recently opened training center to "Autodesk-OmGTU" both applied techniques and training programs.

Key words: advanced training courses, AutoCAD, teaching technique

УДК 514.18

Семкив О.М.

Национальный университет гражданской защиты Украины

legoolee1@rambler.ru

ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ГРУНТА ПО ЛОПАТКЕ С ПРОФИЛЕМ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Аннотация. *Рассмотрена новая кривая - брахистохрона в поле центробежных сил, уравнение которой получено в полярной системе координат. Показано, что такая форма будет оптимальным профилем конструкции грунтометательного механизма.*

Ключевые слова: *брахистохрона в поле центробежных сил, грунтометательный механизм, движение частицы грунта, ликвидация низовых пожаров.*

Работы, направленные на модернизацию технологии грунтометания при ликвидации низовых пожаров в условиях отсутствия воды чрезвычайно важны, так как существующие конструкции грунтометательных механизмом недостаточно совершенны [1, 2]. Рядом достоинств обладают роторные грунтометатели [2, 3], которые грунт в зону возгорания выбрасывают с помощью лопаток, расположенных на

вращающемся роторе. От формы и расположения лопаток существенно зависят технологические характеристики устройств. Исследования по решению этих задач имеют актуальный характер.

В работах [2, 3] проведены комплексные исследования по выбору рациональных параметров грунтометателя с прямыми лопатками. Перспективным представляется использование в грунтометателях криволинейных лопаток. Исследования по обоснованному выбору их формы и анализу движения частиц грунта по ним в настоящее время отсутствуют.

Постановка задачи. Для криволинейной лопатки грунтометательного механизма, форма профиля которой является брахистохроной для центральной силы – центробежной силы инерции, записанной в полярной системе координат, построить математическую модель движения частицы грунта, учитывающую наличие сил трения.

На рис.1 показана схема грунтометателя: 1– ступица, 2 – кольцо; 3 – спица; 4 –криволинейная лопатка. Предполагается, что метатель вращается с угловой скоростью ω против хода часовых стрелок. Радиусы R_1 и R_2 представляют собой радиусы окружностей, проходящих через заднюю и переднюю кромки лопатки.

Специфика задачи состоит в том, что движение необходимо изучать во вращающейся системе координат с использованием уравнений динамики относительного движения. Дополнительные трудности вносит то обстоятельство, что аналитическое описание оптимальной траектории удается получить в полярной системе координат (рис. 2)

$$\rho=\rho(\varphi), \qquad (1)$$

где ρ – полярный радиус, φ – полярный угол.

На рис.2 частица грунта M изображена на криволинейной лопатке AB в текущем положении с координатами (ρ,φ). Точки A и B имеют соответственно координаты (ρ_0,φ_0) и (ρ_1,φ_1). Полярным радиусам ρ_0 и ρ_1 соответствуют радиусы R_1 и R_2. Для принятого направления вращения ротора грунтометателя вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ будет перпендикулярен плоскости рисунка и направлен на читателя. Использованы следующие обозначения: $\boldsymbol{\tau}$ – касательная, направленная в сторону возрастания дуговой координаты s, $\mathbf{n}$ – нормаль, направленная в сторону вогнутости траектории, $\mathbf{v}_r$ – относительная скорость; $\mathbf{a}_k = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ – кориолисово ускорение.

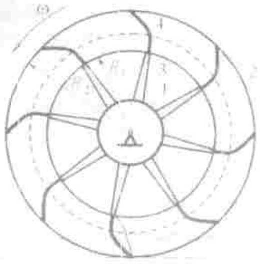


Рис. 1 Схема грунтометательного механизма

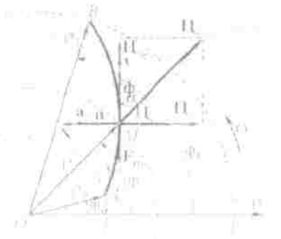


Рис. 2. Схема для записи уравнение движения частицы грунта

Для сил приняты такие обозначения: $\boldsymbol{\Phi}_e$ – переносная (центробежная) сила инерции, $\boldsymbol{\Phi}_k$ – кориолисова сила инерции; $\mathbf{N}$ – нормальная реакция лопатки; $\mathbf{F}_{тр}$ – сила трения скольжения (направлена против относительной скорости). Выражения для модуля силы $\boldsymbol{\Phi}_e$ и ее проекции на направление полярного радиуса совпадают

$$\Phi_e = \Phi_{e_\rho} = m a_{en} = m\omega^2\rho, \qquad (2)$$

где m – масса частицы грунта, $a_{en} = \omega^2\rho$ – осестремительное (нормальное) ускорение.

Для кориолисовой силы инерции имеет место формула

$$\boldsymbol{\Phi}_k = -m\mathbf{a}_k, \qquad (3)$$

а для ее модуля с учетом выражения для кориолисова ускорения

$$\Phi_k = 2m\omega v_r, \qquad (4)$$

где $v_r = |v_{r_\tau}|$ – модуль относительной скорости; $v_{r_\tau} = \frac{ds}{dt}$ – проекция относительной скорости на касательную (алгебраическая величина скорости).

Модули силы трения и нормальной реакции связаны известным соотношением

$$F_{тр} = Nf, \qquad (5)$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Для проекций переносной (центробежной) силы $\boldsymbol{\Phi}_e$ на касательную Φ_{e_τ} и нормаль Φ_{e_n} имеют место формулы

$$\Phi_{e_\tau} = \Phi_e \cos\alpha, \qquad (6)$$

$$\Phi_{e_n} = -\Phi_e \sin\alpha, \qquad (7)$$

где α – угол между вектором $\boldsymbol{\Phi}_e$ и единичным вектором касательной $\boldsymbol{\tau}$.

Можно показать [4], что для $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ справедливы выражения

$$\cos\alpha = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}, \qquad (8)$$

$$\sin\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}. \qquad (9)$$

Дифференциальные уравнения относительного движения несвободной материальной точки в естественной форме при движении в плоскости будут иметь вид [5]

$$ma_{r_\tau}=\Phi_{r_\tau}-F_{\text{тр}},\qquad ma_{r_n}=N-\Phi_{c_n}-\Phi_k, \qquad (10)$$

где a_{r_τ}, a_{r_n} – проекции ускорения на касательную и нормаль.

С учетом формул для касательного и нормального ускорений

$$a_{r_\tau}=\frac{dv_{r_\tau}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}, \qquad (11)$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho_k}=\frac{v_{r_\tau}^2}{\rho_k}=\frac{1}{\rho_k}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \qquad (12)$$

уравнения (10) можно записать иначе

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=\Phi_{r_\tau}-Nf,\qquad \frac{m}{\rho_k}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=N-\Phi_{c_n}-\Phi_k \qquad (13)$$

где ρ_k – радиус кривизны траектории.

Преобразуем уравнения (13) к уравнению для нахождения закона движения частицы с учетом того, что уравнение траектории оказалось целесообразным определять в полярной системе координат. Длина дуги и радиус кривизны кривой (1) определяются соответственно по формулам [6]

$$s=s(\varphi)=\int_{\varphi_0}^{\varphi}ds=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi, \qquad (14)$$

$$\rho_k(\varphi)=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho'\rho''}, \qquad (15)$$

где $$\rho'=\frac{d\rho}{d\varphi},\ \rho''=\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}.$$

Теперь выражения для алгебраической величины скорости и касательного ускорения представим так:

$$v_{r_\tau}=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{ds}{d\varphi}\dot\varphi, \qquad (16)$$

$$a_\tau=\frac{dv_{r_\tau}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2s}{d\varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{ds}{d\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d^2s}{d\varphi^2}\dot\varphi^2+\frac{ds}{d\varphi}\ddot\varphi, \qquad (17)$$

где точкой обозначена производная по времени.

Из второго уравнения (13) для нормальной реакции с учетом (4), (7), (9), (12), (15), (16) и (17) имеем

$$N=m\left[\frac{\dot\varphi^2}{\rho_k}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2-\frac{\omega^2\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}+2\omega\dot\varphi\frac{ds}{d\varphi}\right] \qquad (18)$$

Перепишем теперь первое уравнение (13) с учетом формул (2), (8), (17), (18):

$$m\left(\frac{d^2s}{d\varphi^2}\dot\varphi^2+\frac{ds}{d\varphi}\ddot\varphi\right)=m\frac{\omega^2\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}-m\left[\frac{\dot\varphi^2}{\rho_k}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2-\frac{\omega^2\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}+2\omega\dot\varphi\frac{ds}{d\varphi}\right]f \qquad (19)$$

Разделив обе части выражения (19) на m после несложных преобразований, ему можно придать вид однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами относительно полярного угла $\varphi(t)$.

$$\ddot\varphi+\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^{-1}\left[\frac{d^2s}{d\varphi^2}+\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}f\right]\dot\varphi^2+2\omega f\dot\varphi-\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^{-1}\frac{\omega^2\rho(\rho'+f\rho)}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}=0 \qquad (20)$$

Уравнение (20) следует интегрировать с начальными условиями: при $t=0$ $\varphi=\varphi_0$, $\dot\varphi=\dot\varphi_0$.

Задача *выбора оптимальной формы лопатки* может быть схематизирована как задача определения формы кривой в поле центробежных сил инерции, которая обеспечивает минимальное время движения (задача о брахистохроне в поле центробежных сил). Известно, что классическая задача о брахистохроне для однородного поля сил тяжести была отправной точкой при создании вариационного исчисления [7]. Методы построения оптимальных траекторий, когда на точку действует центробежная сила инерции, авторам неизвестны.

В данной статье воспользуемся одним из типов кривых, полученных в результате решения такой задачи [8]

$$\varphi=\operatorname{arctg} z-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{1-C^2}}+C_1, \qquad (21)$$

где

$$z=\sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2-\rho_0^2}-1} \qquad (22)$$

$C^2<1$ – константа.

Для нахождения постоянных C и C_1 с учетом (22) выпишем краевые условия

при $\varphi=\varphi_0$ $\rho=\rho_0$

$$z=z(\rho_0)=z_0=\sqrt{\frac{C^2\rho_0^2}{\rho_0^2-\rho_0^2}-1}=\infty, \qquad (23)$$

при $\varphi=\varphi_1$ $\rho=\rho_1$,

$$z=z(\rho_1)=z_1=\sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1} \qquad (24)$$

На левой границе для (21) имеем

$$\varphi_0=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\frac{\pi}{2}+C_1, \qquad (25)$$

откуда следует, что

$$C_1=\varphi_0-\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right)\frac{\pi}{2} \qquad (26)$$

На правой границе соотношение (21) дает

$$\varphi_1=\operatorname{arctg} z_1-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{1-C^2}}+C_1 \qquad (27)$$

Из этого выражения аналогично (25) для C_1 имеем

$$C_1=\varphi_1-\operatorname{arctg} z_1+\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}} \qquad (28)$$

Для нахождения константы C воспользуемся трансцендентным уравнением, следующим из сравнения правых частей выражений (26) и (28) при учете краевого условия (24)

$$f(x)=\varphi_1-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1}}{\sqrt{1-x}}-\varphi_0+\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\frac{\pi}{2}=0, \qquad (29)$$

где $x=C^2$.

График функции $f(x)$ показан на рис.3, приняты следующие параметры: $\rho_0=0{,}496$м, $\rho_1=0{,}632$м, $\varphi_0=0$, $\varphi_1=20^\circ$. При наличии графика корень функции в среде MathCAD удобно находить с использованием встроенной функции **root(f(x),x,a,b)**

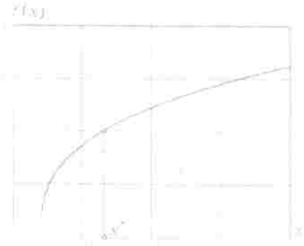


Рис. 3. График функции $f(x)$

Для корня в рассматриваемом случае получено значение $x^*=0{,}393<1$, которому соответствует $C=\sqrt{x^*}=0{,}627$. В соответствие с выражением (26) или (28) для C_1 имеем

$$C_1=\varphi_0-1-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-\varphi_1-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1}+\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_0^2}-1}}{\sqrt{1-C^2}}=0.445$$

Найденные значения постоянных C и C_1 с помощью формул (21) и (22) позволяют записать следующее выражение для искомой функции

$$\varphi(\rho)=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2-\rho_0^2}-1}-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2-\rho_0^2}-1}}{\sqrt{1-C^2}}+C_1 \qquad (30)$$

На рис. 4 представлены графики семейства брахистохрон для разных значений ρ_0 функции $\rho(\varphi)$ для предельных значений ρ_0 при $C=1$.

График функции (30) представлен на рис. 5, а, более удобный для анализа график обратной функции $\rho(\varphi)$ – на рис. 5, б.

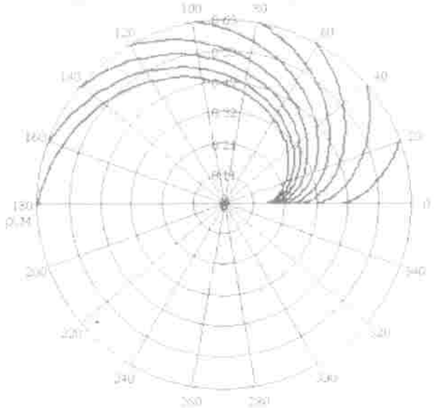
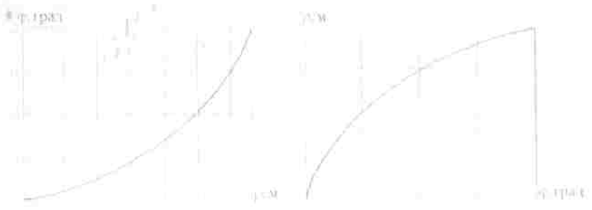


Рис. 4. Графики семейства брахистохрон для разных значений ρ_0

Построение и интегрирование дифференциального уравнения (20) при проведении расчетов имеет ряд особенностей, обусловленных тем, что аналитическое представление оптимальной траектории (30) записано в полярной системе координат, причем в обратной форме. Аналитически разрешить выражение (30) относительно ρ не удается.



а б

Рис. 5. Графики функции (30)

Выводы. В работе рассмотрена новая кривая - брахистохрона в поле центробежных сил, уравнение которой получено в полярной системе координат (30). Форма профиля лопатки является брахистохроной для центральной силы – центробежной силы инерции.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на исследование влияния параметров механизма на кинематические характеристики движения частиц грунта по лопатке и рекомендации по их выбору, а также на изучение зависимости кинематических характеристик движущихся частиц грунта от параметров оптимальных траекторий и их вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сємків О.М.* Розрахунок робочого органа land... ґрунтометального механізму / *Сємків О.М., Шатохін В.М.* // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". Випуск 87. - К.: КНУБА, 2011. - С. 303-312.

2. *Попова Л.М.* Дослідження руху частки ґрунту по лопатці: результати комп'ютерних експериментів / *Попова Л.М., Шатохін В.М.*