НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ІНСТИТУТ ПОЖЕЖНОЇ БЕЗПЕКИ ІМЕНІ ГЕРОЇВ ЧОРНОБИЛЯ
ФАКУЛЬТЕТ ПОЖЕЖНОЇ БЕЗПЕКИ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Григоренко К., Касярум С.

Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт з дисципліни «Вища математика» (частина 1)

Черкаси 2024

Математика – цариця наук,

арифметика – цариця математики.

(К.Ф. Гаусс)

ЗМІСТ

1. *Елементи лінійної алгебри*

При розв'язуванні різних задач математики, техніки, економіки, особливо лінійних систем рівнянь, лінійних диференціальних рівнянь та їх систем, застосовують матриці, визначники та n-мірні вектори.

Матрицею називають прямокутну таблицю елементів, яка має n рядків та m стовпців. Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту $A, B, C, D, \ldots$ Наприклад:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – елементи матриць, у яких індекс i показує номер рядка, а індекс j – стовпця.

Якщо число рядків і стовпців матриці співпадає ($m=n$), то така матриця називається квадратною. Так, матриця B, у якої $n=m=2$, є квадратною.

Добутком двох матриць A (з n рядків та m стовпчиків) та B (з m рядків та l стовпчиків) називають матрицю з n рядків та l стовпчиків, у якої в i-му рядку на j-му місці стоїть сума $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

Наприклад, для матриць розмірності 2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначником називають число, яке ставиться у відповідність квадратній матриці. Визначник (детермінант) позначають символами $\Delta, \Delta B, \det B$. Так, наприклад, для матриці B визначник будемо позначати

$$\Delta = \Delta B = \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Порядком визначника називають його розмірність $m=n$.

Визначником 2-го порядку є число, яке дорівнює різниці добутків елементів головної $\left(a_{11}, a_{22}\right)$ та побічної $\left(a_{12}, a_{21}\right)$ діагоналей. Так,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначники вищих порядків $\left(n=m>2\right)$ обчислюються іншим способом. Для його пояснення введемо поняття мінора та алгебраїчного доповнення визначника.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають визначник $n-1$-го порядку, який одержують з визначника n-го порядку при викреслюванні i-го рядка та j-го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають мінор M_{ij}, який береться зі знаком плюс, якщо сума індексів $i+j$ є парним числом і зі знаком мінус, якщо ця сума є непарним числом. Тобто, $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$.

Визначником n-го порядку називають число, яке, наприклад, записують у вигляді

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in}. \qquad (1)$$

Вираз (1) називають розкладом визначника n-го порядку по елементах i-го рядка.

Для визначника 3-го порядку формула (1) має вигляд $\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$. Так, наприклад, розклад визначника 3-го порядку по елементах першого ($i=1$) рядка має вигляд

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Приклад 1. Обчислити визначник 3-го порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&5\\3&1&2\end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно формул (1), (2) визначник 3-го порядку обчислимо так:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&5\\3&1&2\end{vmatrix}=\left(-1\right)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix}+\left(-1\right)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1&5\\3&2\end{vmatrix}+\left(-1\right)^{1+3}\cdot\left(-1\right)\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot\left(2\cdot 2-1\cdot 5\right)-\left(1\cdot 2-3\cdot 5\right)-\left(1\cdot 1-3\cdot 2\right)=2\left(4-5\right)-\left(2-15\right)-\left(1-6\right)=$$

$$=2\cdot\left(-1\right)-\left(-13\right)-\left(-5\right)=-2+13+5=16.$$

Невиродженою називають квадратну матрицю, визначник якої відмінний від нуля.

Одиничною називають квадратну матрицю, у якої по головній діагоналі знаходяться одиниці, а решта елементів дорівнюють нулю.

Оберненою до квадратної матриці A називають матрицю A^{-1}, для якої виконується умова $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця. Для того, щоб для квадратної матриці існувала обернена матриця, необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою, тобто $\Delta A \neq 0$.

Так, для невиродженої матриці A обернену до неї матрицю A^{-1} можемо записати у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Рангом матриці називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r = r\left(A\right)$.

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (4)$$

де a_{ij} ($i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$) – коефіцієнти при невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$, b_k ($k = \overline{1,m}$) – вільні члени.

Для того, щоб система лінійних рівнянь (4) була сумісною (тобто, мала розв'язок), необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи $r\left(A\right)$ дорівнював рангу її розширеної матриці $r\left(B\right)$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ..... & ..... & ... & ..... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Якщо система лінійних рівнянь (4) сумісна, то вона має один або безліч розв'язків.

Розглянемо методи розв'язування лінійних рівнянь за допомогою визначників та матриць.

Правило Крамера.

Це правило можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають. Для простоти викладу розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими ($n = m = 3$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (5)$$

Позначимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ називають визначником системи і його складають з коефіцієнтів при невідомих, а у визначниках $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ коефіцієнти при відповідних невідомих замінені вільними членами.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (5) має єдиний розв'язок. Невідомі визначають за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \qquad (6)$$

і такий спосіб визначення невідомих називають правилом Крамера.

Якщо $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, то система (5) має безліч розв'язків, а правило Крамера застосувати не можна.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників Δx_i, $i = 1, 2, 3$, відмінний від нуля, то система (5) несумісна.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо і обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8+2) - (4+8) + 3(1+8) = 3\cdot(-6) - 12 + 27 = -18 - 12 + 27 = -3;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8+2) - (4+2) + 3(1+2) = -6 - 6 + 9 = -3;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4+2) - (4+8) + 3(1-4) = 18 - 12 - 9 = -3;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2-1) - (1-4) + (1+8) = -9 + 3 + 9 = 3.$$

Підставимо одержані результати у формули (6). Маємо

$$x_1 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_3 = \frac{3}{-3} = -1.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

Матричний спосіб.

Матричний спосіб можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають, а крім того, матриця системи має обернену.

Запишемо систему (5) у матричному вигляді. Для цього введемо матриці виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Користуючись правилом множення матриць, систему (5) запишемо у матричному вигляді

$$A \cdot X = B. \qquad (7)$$

Розв’язок цього рівняння має вигляд

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{8}$$

де A^{-1} є оберненою матрицею до матриці A.

Приклад 3. Розв’язати систему лінійних рівнянь попереднього прикладу матричним способом.

Розв’язання. Перепишемо задану систему у вигляді (7). Для цього складемо матриці виду

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язок системи будемо шукати у вигляді (8). Необхідно знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A. Обернена матриця існує, бо $\Delta A = -3 \neq 0$ (див. приклад 2). Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(4+8) = -12,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6-3) = 9,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7.$$

Складемо обернену матрицю згідно формули (3). Одержимо

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Помножимо обернену матрицю на матрицю B і одержимо шукану матрицю X. Маємо

$$X = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6-1+4 \\ -12+0+9 \\ 9+1-7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

Метод Гаусса.

Для розв'язування систем лінійних рівнянь застосовують метод, який називають методом Гаусса або методом виключення змінних. Суть методу Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь розглянемо за допомогою матриць. Його ідея полягає у зведенні розширеної матриці системи за допомогою елементарних перетворень матриці до трикутної матриці.

Трикутною називають матрицю, у якої під головною діагоналлю всі елементи рівні нулю.

Елементарними перетвореннями матриці є такі перетворення:

1) перестановка двох рядків матриці;

2) множення всіх елементів рядка на одне і те ж число, відмінне від нуля;

3) додавання елементів якого-небудь рядка матриці, помножених на одне і те ж число, до відповідних елементів іншого рядка;

4) відкидання рядків матриці, елементами яких є нулі.

Проводячи елементарні перетворення над матрицею системи, отримують нову систему рівнянь, яка еквівалентна заданій, але з новими коефіцієнтами та вільними членами. Одержують трикутну систему рівнянь, із якої визначають невідомі.

Приклад 4. Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи і будемо робити над нею необхідні елементарні перетворення, щоб одержати трикутну матрицю. На початку переставимо перше і третє рівняння місцями, а потім помножимо елементи першого рядка відповідно на мінус три, мінус два та мінус два і одержані результати додамо відповідно до елементів другого, третього та четвертого рядків. Аналогічно вчинимо з елементами другого, а потім третього рядків. Одержимо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Система лінійних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad x_2 + 10x_3 = 10, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_2 = 10 - 10x_3 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

З третього рівняння $x_3 = 1$. З другого рівняння одержали x_2, а з першого одержуємо x_1.

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$

2. *Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів*

Розв'язуючи задачі, пов'язані з нелінійними операціями з векторами, використовують формули знаходження скалярного добутку векторів:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi;\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |a|\,\text{пр}_{\vec{a}}\ \vec{b} = |b|\,\text{пр}_{\vec{b}}\ \vec{a};$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$

кута φ між векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_b^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

умови паралельності $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ та перпендикулярності $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ двох векторів.

Приклад 1. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо відомо, що $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{q}| = 3$ *і* $\widehat{\vec{p}\vec{q}} = \frac{\pi}{4}$.

З визначення операції додавання векторів відомо, що одна діагональ паралелограма $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 6\vec{p} - \vec{q}$, а друга $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = = 4\vec{p} + 5\vec{q}$. Довжина довільного вектора визначається за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\,\vec{a})}$. Тоді:

$$|d_1| = \sqrt{(6\vec{p} - \vec{q})^2} = \sqrt{36(\vec{p})^2 - 12\vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{q}^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{36\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 12\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cos\frac{\pi}{4} + 9} = 15;$$

$$\left|\vec{d}_2\right| = \sqrt{(4\vec{p} + 5\vec{q})^2} = \sqrt{16\vec{p}^{\,2} + 40\vec{p}\cdot\vec{q} + 25\vec{q}^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{16\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 40\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cos\frac{\pi}{4} + 25\cdot 9} = \sqrt{593}.$$

Приклад 2. Дано три послідовні вершини паралелограма: $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$, $C(5; 0; 2)$. Знайти його четверту вершину D і кут між діагоналями.

Нехай шукана вершина має координати $D(x, y, z)$. З умови колінеарності векторів $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ маємо: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = z$, або $x = 2z - 3$; $y = 3z - 2$. Згідно з властивостями паралелограма $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ або $\sqrt{4z^2 + 9z^2 + z^2} = \sqrt{14} \Rightarrow z = 1$; $x = -1$; $y = 1$; $D(-1; 1, 1)$. Діагоналі паралелограма дорівнюють відповідно сумі і різниці векторів-сторін $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = (8; 2; 2)$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - AB = (-4; 4; 0)$. Кут між діагоналями знайдемо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{-32+8}{\sqrt{72}\cdot\sqrt{32}} = -\frac{1}{2}; \text{ отже, } \varphi = 120^\circ.$$

За використання векторного добутку слід пам’ятати, що він некомутативний, а його модуль дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах-множниках. Знаходять векторний добуток за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти площу паралелограма, діагоналями якого є вектори $2\vec{m}-\vec{n}$ і $4\vec{m}-5\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори, а кут між ними дорівнює 45°.

Позначимо через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони паралелограма, тоді $\vec{a}+\vec{b}==2\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{a}-\vec{b}=4\vec{m}-5\vec{n}$, звідки $\vec{a}=3\vec{m}-3\vec{n}$; $\vec{b}=-\vec{m}+2\vec{n}$. Площу паралелограма знайдемо як модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$. Отже, $S=\left|\left(3\vec{m}-3\vec{n}\right)\times\left(-\vec{m}+2\vec{n}\right)\right|=3\left|m\times n\right|=3\sin 45^{\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 4. Знайти площу і висоту BD трикутника, вершинами якого є: $A(1;-2;8)$; $B(0;0;4)$; $C(6;2;0)$.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}=(-1;2;-4)$ і $\overrightarrow{AC}=(5;4;-8)$. Модуль їх векторного добутку буде дорівнювати подвоєній площі трикутника: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 5 & 4 & -8\end{vmatrix}=-28\vec{j}-14\vec{k}$; звідки $s=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=7\sqrt{5}$.

Знайдемо висоту трикутника: $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{105}$; $h=\dfrac{2s}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$.

Геометричний зміст мішаного добутку полягає в тому, що його модуль дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах добутку.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

У зв’язку з цим його часто використовують для знаходження об’єму і перевірки компланарності трьох векторів.

Приклад 5. Для піраміди з вершинами $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$ обчислити об'єм, площу грані ABC і висоту, опущену на цю грань.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AO}=(-5;-2;0)$; $\overrightarrow{AB}=(-3;3;0)$; $\overrightarrow{AC}=(-4;0;4)$. Модуль мішаного добутку $\left|\left(\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}\right|==\left\|\begin{matrix}-5 & -2 & 0\\ -3 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{matrix}\right\|=84$ у шість разів більший за об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, тобто $V_{\text{пір}}=14$ куб. од. Для обчислення площі грані ABC знайдемо $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{matrix}\right\|=12\sqrt{3}$. Тоді $S_{ABC}=6\sqrt{3}$, а висота піраміди $h=\frac{3V}{S}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3. Елементарні задачі аналітичної геометрії

До елементарних належать задачі: визначення відстані між двома точками $M_1(x_1,\,y_1)$, $M_2(x_1,\,y_2)$ за формулою:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ ;$$

знаходження координат точки $M(x,\,y)$, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні λ, за формулами: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ і обчислення площі трикутника, заданого координатами вершин $A(x_1,\,y_2)$; $B(x_2,\,y_2)$; $C(x_3,\,y_3)$, за формулою: $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$.

Приклад 1. Знайти довжину бісектриси AE і площу трикутника ABC, якщо $A(-2;0)$, $B(6;6)$ і $C(1;-4)$.

Використовуючи щойно наведену формулу, знайдемо площу трикутника $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 6 & 6 & 1\\ 1 & -4 & 1\end{vmatrix}=7$ кв. од. Використовуючи властивість бісектриси $\left(\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{BE}\right)$, знайдемо відношення λ, у якому точка *E* поділяє відрізок *CB*; $\lambda=\frac{CE}{BE}=\frac{1}{2}$. Знайдемо координати точки $E(x,y)$: $x=\dfrac{1+3}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}$; $y=\dfrac{-4+3}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$; $E\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Отже, $AE=\sqrt{\left(\frac{8}{3}+2\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

4. *Пряма лінія на площині*

Геометричним образом лінійного рівняння $Ax+By+C=0$ є пряма на площині. Змінні *x* та *y*, що входять до рівняння, – це координати множини точок, що лежать на цій прямій. Якщо поділити рівняння прямої на один з відмінних від нуля коефіцієнтів *A*, *B*, *C*, то це рівняння буде залежати від двох параметрів, що визначають розміщення лінії відносно прямокутної системи координат.

Наприклад, якщо поділимо на $B\neq 0$, то одержимо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y=kx+b$, де $k=\mathrm{tg}\alpha$, α – кут нахилу прямої до осі *OX*, *b* – відрізок, що відтинає пряма на осі *OY*.

Рівняння $y-y_0=k(x-x_0)$, де (x_0,y_0) – координати точки, що лежить на прямій, описує множину прямих, що проходять через задану точку.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2), можна записати у вигляді:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Якщо рівняння прямої подати у вигляді

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

то параметри a, b визначають відрізки, що відтинає пряма на відповідних осях системи координат.

Кут між двома прямими $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$ знаходять за формулою: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}$, з якої можна одержати умову *паралельності* ($k_1=k_2$) і *перпендикулярності* $\left(k_2=-\frac{1}{k_1}\right)$ двох прямих. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюють за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Приклад 1. Дано рівняння сторін *AB* $(x-3y+3=0)$ і *AC* $(x+3y+3=0)$ трикутника *ABC*. Точка $D(-1;3)$ – основа висоти *AD*. Записати рівняння медіани *AM*, бісектриси *AF* і висоти *AD* трикутника, а також знайти кут *A*.

Знайдемо координати вершини *A*. Для цього розв’яжемо систему рівнянь: $\begin{cases}x-3y+3=0\\x+3y+3=0\end{cases}$, $A(-3;0)$.

Запишемо рівняння висоти *AD*, використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x+3}{-1+3}=\frac{y}{3}$ або $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$. Використовуючи умову перпендикулярності $\left(k_2=-\frac{1}{k_1}\right)$, знайдемо кутовий коефіцієнт сторони *BC* трикутника: $k_2=-\frac{2}{3}$. Тоді рівняння сторони *BC* можна записати так: $y-3=-\frac{2}{3}(x+1)$; або $2x+3y-7=0$. Знайдемо координати вершин *B* і *C* трикутника, розв’язавши відповідно системи рівнянь:

$$\begin{cases}x-3y+3=0;\\2x+3y-7=0\end{cases} \text{ і } \begin{cases}x+3y+3=0;\\2x+3y-7=0.\end{cases}$$

Одержимо: $B\left(\frac{4}{3};\frac{13}{9}\right)$; $C\left(10;-\frac{13}{3}\right)$. Основа медіани – це середина відрізка BC; $M\left(\frac{17}{3};\frac{13}{9}\right)$. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки, одержимо рівняння медіани: $3x-18y-43=0$. Знайдемо довжини сторін $AB=\frac{13\sqrt{10}}{9}$; $AC=\frac{13}{9}\sqrt{82}$. Тоді обчислимо відношення, у якому основа бісектриси поділяє сторону BC: $\lambda=\frac{AC}{AB}=\sqrt{\frac{41}{5}}$.

За формулами $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ знайдемо координати основи бісектриси $F\left(\frac{30\sqrt{5}+4\sqrt{41}}{3(\sqrt{5}+\sqrt{41})};\ \frac{-13(4\sqrt{5}-\sqrt{41})}{9(\sqrt{5}+\sqrt{41})}\right)$. Рівняння бісектриси запишемо як рівняння прямої, що проходить через задані точки: $\frac{x+3}{3(39\sqrt{5}+7\sqrt{41})}=\frac{-y}{13(4\sqrt{5}-\sqrt{41})}$. Для знаходження кута A визначимо кутові коефіцієнти прямої AC: $k_1=-\frac{1}{3}$ і прямої AB: $k_2=\frac{1}{3}$.

Тоді $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{3}{5}$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$.

Приклад 2. Дано трикутник $A(1;2)$, $B(3;7)$, $C(5;-13)$. Знайти відстань від вершини B до медіани, що проходить через точку A.

Знайдемо координати основи медіани: $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+5}{2}=4$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{7-13}{2}=-3$. Запишемо рівняння медіани як прямої, що проходить через дві задані точки: $\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{-3-2}$, або $5x+3y-11=0$. Відстань від точки $B(3;7)$ до медіани знайдемо за формулою: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|5\cdot3+3\cdot7-11|}{\sqrt{25+9}}=\frac{25}{\sqrt{34}}$.

Приклад 3. Знайти координати точки, що розташована на відстані 5 одиниць від прямої $3x+4y-10=0$ і прямої $5x-12y+26=0$.

Нехай $(x,\ y)$ – координати шуканої точки, тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{|3x+4y-10|}{\sqrt{9+16}}=5; \\ \dfrac{|5x-12y+26|}{\sqrt{25+144}}=5; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 1)\begin{cases} 3x+4y=35; \\ 5x-12y=39; \end{cases} & 3)\begin{cases} 3x-4y=-15; \\ 5x-12y=39; \end{cases} \\ 2)\begin{cases} 3x+4y=35; \\ 5x-12y=-91; \end{cases} & 4)\begin{cases} 3x-4y=-15; \\ 5x-12y=-91. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, точок буде чотири: $A\left(\dfrac{72}{7};\dfrac{29}{28}\right)$; $B(1;8)$; $C(-21;-12)$; $D\left(-\dfrac{23}{2};-\dfrac{39}{8}\right)$.

Приклад 4. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими $2x-9y+18=0$ і $6x+7y-21=0$.

Бісектриса є множиною точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай $M(x,\ y)$ – одна з точок цієї множини. Тоді, прирівнюючи відстані від цієї точки до прямих, маємо:

$$\frac{|\ 2x-9y+18\ |}{\sqrt{4+81}}=\frac{|\ 6x+7y-21\ |}{\sqrt{36+49}} \Rightarrow |\ 2x-9y+18\ |=|\ 6x+7y-21\ |.$$

З останнього рівняння маємо рівняння двох бісектрис у вигляді: $4x+16y-39=0$ і $8x-2y-3=0$. Слід зазначити, що бісектриси взаємно перпендикулярні: $k_1=-\dfrac{1}{4}$; $k_2=4$.

5. *Криві другого порядку*

До кривих другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола. У загальному випадку їм відповідає рівняння:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{13}y+a_{33}=0.$$

Шляхом перетворення системи координат із загального рівняння можна одержати канонічні рівняння кривих другого порядку:

кола: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, де a, b – координати центра кола, а R – радіус кола;

еліпса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, де a, b – півосі еліпса;

гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де a – дійсна, b – уявна півосі гіперболи;

параболи: $y^2 = 2px$, де p – параметр параболи.

6. Площина і пряма у просторі

Будь-яке рівняння першого степеня відносно координат точки простору $Ax + Bx + Cz + D = 0$ відображає площину. Коефіцієнти при змінних *A, B, C* є компонентами вектора, перпендикулярного до площини.

Кут між двома площинами $Ax + By + Cz + D = 0$ і $A_1x + B_1y + {}$ $+ C_1z + D_1 = 0$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Умовою їх *паралельності* є: $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$, а *перпендикулярності* – $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$.

Відстань від точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до площини можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- Пряма у просторі може бути визначена як перетин двох площин:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0; \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

або канонічним рівнянням:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де $\vec{s} = (m, n, p)$ – напрямний вектор прямої, $M(x_0, y_0, z_0)$ – точка, що лежить на прямій.

- Пряму у просторі можна задати також параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

де t – параметр, або рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Звичайно, всі рівняння відповідають прямій у просторі і між ними існує певний зв'язок.

Площина і пряма у просторі можуть перетинатися під деяким кутом α, який визначається за формулою:

$$\sin\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

У разі виконання умови: $Am + Bn + Cp = 0$ пряма і площина паралельні, а якщо $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ – перпендикулярні. Умовою того, що пряма лежить на площині, є виконання співвідношень:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \\ Am + Bn + Cp = 0. \end{cases}$$

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь OZ і утворює з площиною $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ кут 60°, і знаходження її відстані до точки $A(1; 3; 5)$.

Рівняння шуканої площини можна записати у вигляді $Ax + By = 0$, тому що вона проходить через вісь OZ. Використаємо другу умову задачі: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{2A + B}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{10}}$, з якої одержимо рівняння: $3\frac{A^2}{B^2} + 8\frac{A}{B} - 3 = 0$; $\frac{A}{B} = -3$ або $\frac{A}{B} = \frac{1}{3}$. Остаточно маємо, що умовам задачі задовольняють дві площини: $3x - y = 0$ і $x + 3y = 0$. Точка A лежить на першій площині, тому що $d_1 = 0$, а відстань її до другої площини $d_2 = \frac{|1 + 9|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Приклад 2. Знайти напрямний вектор прямої

$$\begin{cases} x + y - z = 0; \\ x - y = 0 \end{cases}$$

і кути, які вона утворює з осями системи координат.

Вектори $\vec{N}_1(1;1;-1)$ і $\vec{N}_2(1;-1;0)$ перпендикулярні до відповідних площин, що задають рівняння прямої, тому напрямний вектор прямої $\vec{s}$ розташований перпендикулярно до кожного з векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2$. Згідно з означенням векторного добутку векторів

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Тобто: $\vec{s} = (-1;-1;-2)$ або $\vec{s} = (1;1;2)$. Кути з осями знайдемо за формулами: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Приклад 3. Показати, що прямі

$$\begin{cases} x - z + 2 = 0; \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

перетинаються, і написати рівняння площини, в якій вони розташовані. Дві прямі будуть лежати на одній площині, коли їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ будуть компланарними. Точка $M_1(-2;1;0)$ лежить на першій прямій, а $M_2(2;4;2)$ – на другій. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (4;3;2)$. Напрямний вектор

$$\vec{s}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}; \ \vec{s}_2 = (3;1;1).$$

$$(\vec{S}_1 \times \vec{S}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, прямі лежать на одній площині. Для запису рівняння цієї площини знайдемо вектор $\vec{N} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$. Точка $M_1(-2;1;0)$ лежить на цій площині. Отже, маємо: $x + 2 + 2(y-1) - 5z = 0$ або остаточно: $x + 2y - 5z = 0$.

7. *Поверхні другого порядку*

Канонічні рівняння, що описують відповідні поверхні другого порядку, мають вигляд:

еліпсоїд – $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, при $a=b=c$ – сфера;

односмуговий гіперболоїд – $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

двосмуговий гіперболоїд – $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$;

конус – $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$;

еліптичний циліндр – $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$;

гіперболічний циліндр – $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

еліптичний парабалоїд – $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$;

гіперболічний циліндр – $z=\frac{x^2}{2p}$ або $z=\frac{y^2}{2q}$.

8. *Невизначений інтеграл*

В диференціальному численні розв'язували таку задачу: для заданої функції знайти її похідну. В інтегральному численні розв'язують обернену задачу: по заданій похідній відновити первісну функцію.

Невизначеним інтегралом для неперервної функції $f(x)$ називають множину всіх первісних функцій $F(x)$ і позначають

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$;

2) $\int\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx$.

Таблиця основних інтегралів:

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$;
3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;
4. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C$;
5. $\int e^{u} du = e^{u} + C$;
6. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$;
7. $\int \cos u \, du = \sin u + C$;
8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;
9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;
10. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C$;
11. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
12. $\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln|\cos u| + C$;
13. $\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln|\sin u| + C$;
14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$;
15. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;
16. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C$;
17. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+12}{x^2-3}dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину підінтегральної функції. Для цього поділимо чисельник на знаменник способом ділення многочлена на многочлен, або припишемо в чисельнику -3 та $+3$ і розглянемо суму дробів. Одержимо

$$\frac{x^2-3+3+12}{x^2-3} = \frac{x^2-3}{x^2-3} + \frac{15}{x^2-3} = 1 + \frac{15}{x^2-3}.$$

$$\int \frac{x^2+12}{x^2-3}dx = \int\left(1+\frac{15}{x^2-3}\right)dx = \int dx + 15\int\frac{dx}{x^2-3} = x + \frac{15}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-x^2}}dx$.

Розв'язання. Розглянемо різницю двох інтегралів і до кожного із них застосуємо відповідну формулу із таблиці інтегралів. Одержимо

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-x^2}}dx = 3\int\frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}} - 2\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = I,$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}} = \left|\begin{array}{l} u = 5-x^2 \\ du = -2xdx \end{array}\right| = \frac{1}{-2}\int\frac{-2xdx}{\sqrt{5-x^2}} = -\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{5-x^2};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \left|\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ a = \sqrt{5} \end{array}\right| = \int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}};$$

$$I = 3\left(-\sqrt{5-x^2}\right) - 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C = -3\sqrt{5-x^2} - 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2+5x+9}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції і зможемо застосувати відповідну формулу із таблиці інтегралів. Одержимо

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+9} = \left| \begin{array}{l} x^2+5x+9 = \\ = x^2+5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+9 = \\ = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x+\frac{5}{2} \\ du = dx \\ a = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}}+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}+5}$.

Розв'язання. Часто доводиться вводити заміну для спрощення обчислення інтегралу. Замінимо $\sqrt{x-3}$ на нову змінну. Одержимо

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-3}+5} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{x-3}=t, & dx = 2t\,dt \\ x-3=t^2, & x=t^2+3 \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^2+3\right)2t\,dt}{t+5} =$$

$$= 2\int \frac{t^3+3t}{t+5}\,dt = 2\int\left(t^2-5t+28-\frac{140}{t+5}\right)dt =$$

$$\begin{array}{r|l} t^3+3t & t+5 \\ \hline \underline{t^3+5t^2} & t^2-5t+28-\frac{140}{t+5} \\ -5t^2+3t & \\ \underline{-5t^2-25t} & \\ 28t & \\ \underline{28t+140} & \\ -140 & \end{array}$$

$$= 2\int t^2 dt - 10\int t\,dt + 56\int dt - 280\int \frac{dt}{t+5} =$$

$$= 2\frac{t^3}{3} - 10\frac{t^2}{2} + 56t - 280\ln|t+5| + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left(x-3\right)^3} - 5\left(x-3\right) +$$

$$+56\sqrt{x-3} - 280\ln\left|\sqrt{x-3}+5\right| + C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int x^2 \cos 2x\, dx$.

Розв'язання. Серед методів інтегрування важливим є метод інтегрування частинами. Формула інтегрування частинами має вид

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \qquad (24)$$

При інтегруванні цю формулу застосовують один чи декілька раз. Застосуємо формулу для знаходження інтеграла:

$$\int x^2 \cos 2x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2,\ du = 2x\, dx \\ dv = \cos 2x\, dx,\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \cdot 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\quad du = dx \\ dv = \sin 2x\, dx,\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \left(-\frac{1}{2}x \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x \right) dx \right) = \frac{x^2}{2}\sin 2x +$$

$$+ \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int x^2 \ln(x+2)\, dx$.

Розв'язання. Для знаходження інтеграла застосуємо формулу (24). Одержимо

$$\int x^2 \ln(x+2)\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+2),\ du = \dfrac{dx}{x+2}, \\ dv = x^2 dx, \qquad v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln(x+2) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x+2} =$$

$$
\begin{array}{r|l|}
-\;\; x^3 & \quad x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2} & x^2-2x+4-\dfrac{8}{x+2} \\
-\;\; -2x^2 & \\
\underline{-2x^2-4x} & \\
-\;\; 4x & \\
\underline{4x+8} & \\
-8 &
\end{array}
$$

$$
=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x+2}dx=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-
$$

$$
-\frac{1}{3}\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-
$$

$$
-\frac{1}{3}\int x^2\,dx+\frac{2}{3}\int x\,dx-\frac{4}{3}\int dx+\frac{8}{3}\int\frac{dx}{x+2}=
$$

$$
=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x+
$$

$$
+\frac{8}{3}\ln|x+2|+C=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}-\frac{4x}{3}+\frac{8}{3}\ln|x+2|+C.
$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int\left(e^{-3x}+\operatorname{ctg}5x-\sqrt[3]{x}+2\right)dx$.

Розв'язання.

$$
\int\left(e^{-3x}+\operatorname{ctg}5x-\sqrt[3]{x}+2\right)dx=\int e^{-3x}dx+\int\operatorname{ctg}5x\,dx-\int\sqrt[3]{x}\,dx+2\int dx=
$$

$$
=-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{5\sin^2 5x}-\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+2x+C=-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{5\sin^2 5x}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+2x+C.
$$

9. *Визначений інтеграл*

Для обчислення визначеного інтеграла застосовують формулу, яка зв'язує визначений інтеграл та первісну функцію. Ця формула має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (25)$$

де $F(x)$ – первісна функція, а a та b – межі (границі) інтегрування і її називають формулою Ньютона-Лейбніца.

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{2x}dx$.

Розв'язання. При обчисленні визначеного інтеграла за формулою (25) необхідно знайти первісну функцію для функції e^{2x}. Одержимо

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot 1} - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int_6^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}+3}$.

Розв'язання. Для знаходження первісної в заданому інтегралі необхідно застосувати метод заміни змінної. Разом із заміною змінної поміняємо межі інтегрування. Одержимо

$$\int_6^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}+3} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-2} = t,\ x = t^2 + 2,\ при\ \ x = 6:\ t_1 = \sqrt{6-2} = 2, \\ x - 2 = t^2,\ dx = 2t\,dt,\ при\ \ x = 11:\ t_2 = \sqrt{11-2} = 3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^3 \frac{2t\,dt}{t+3} = 2\int_2^3 \frac{(t+3)-3}{t+3}dt = 2\left(\int_2^3 dt - 3\int_2^3 \frac{dt}{t+3}\right) = 2t\Big|_2^3 - 6\ln|t+3|\Big|_2^3 =$$

$$= 2(3-2) - 6(\ln 6 - \ln 5) = 2 - 6\ln\frac{6}{5}.$$

10. *Застосування визначених інтегралів*

Площу криволінійної трапеції для неперервної на сегменті $[a,b]$ функції $y = f(x) > 0$, згідно геометричного змісту інтеграла, обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (27)$$

Площу криволінійного сектора в полярній системі координат обчислюють за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,d\varphi, \qquad (28)$$

де $\rho = \rho(\varphi)$ неперервна $\forall\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$.

Довжину дуги лінії на сегменті $[a,b]$ неперервної разом зі своєю похідною функції $y = f(x)$ обчислюють за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx, \qquad (29)$$

або за формулою

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt, \qquad (30)$$

якщо функція задана параметрично $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2]$.

У випадку, коли крива задана полярним рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, то

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi. \qquad (31)$$

Об'єм тіла обертання криволінійної трапеції з основою $[a,b]$ навколо осі Ox, яка обмежена неперервною функцією $y = f(x)$, обчислюється за формулою

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx. \qquad (32)$$

Якщо криволінійна трапеція з основою $[c,d]$ обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла обертання обчислюють за формулою

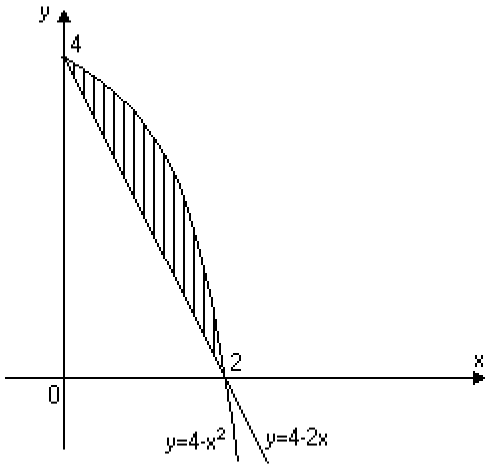
$$V = \pi\int_c^d \left(\varphi(y)\right)^2 dy = \pi\int_c^d x^2 dy, \qquad (33)$$

де $x = \varphi(y)$ неперервна для всіх $y \in [c,d]$.

Приклад 10. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = 4 - x^2$ та $y = 4 - 2x$.

Розв'язання. Зобразимо фігуру (рис. 10). Знайдемо точки перетину ліній. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 4 - 2x, \end{cases} \Rightarrow\ 4 - x^2 = 4 - 2x\ \Rightarrow\ x^2 - 2x = 0,\ x_1 = 0, x_2 = 2.$$



Площа фігури дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, площі яких обчислимо за формулою (27). Одержимо

$$S = S_2 - S_1 = \int_0^2 \left(4 - x^2\right)dx - \int_0^2 (4 - 2x)\,dx =$$

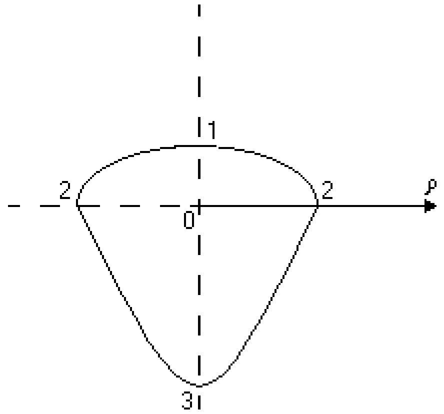
$$= \int_0^2 \left(4 - x^2 - 4 + 2x\right)dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}(\text{кв.од.})$$

Приклад 11. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = 2 - \sin\varphi$

Розв'язання. Побудуємо в полярних координатах лінію $\rho = 2 - \sin\varphi$ по точках (рис. 11).

φ	ρ
0	2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	2
$\frac{3}{2}\pi$	3
2π	2



Одержимо

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2 - \sin\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin\varphi + \sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin\varphi + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - 4\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} + 4\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\cdot 2\pi + 4\cos 2\pi - \frac{1}{4}\sin 4\pi - 4\cos 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(9\pi + 4 - 4) = \frac{9}{2}\pi(\text{кв.од.})$$

Приклад 12. Обчислити довжину дуги лінії $y = \sqrt{x^3}$, якщо $x \in [0,1]$.

Розв'язання. Згідно формули (29) необхідно знати похідну функції. Знайдемо $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Тоді

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\left.\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=$$

$$=\frac{8}{27}\left.\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\right|_0^1=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\right)^3}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right).$$

Приклад 13. Обчислити довжину однієї арки циклоїди
$x=a\left(t-\sin t\right),\ y=a\left(1-\cos t\right),\quad t\in\left[0,2\pi\right].$

Розв'язання. Довжину дуги лінії обчислимо за формулою (30). Для цього знайдемо x_t' та y_t', а також $\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2$. Одержимо

$$x_t'=a\left(1-\cos t\right),\ y_t'=a\sin t,\ \left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=a^2\left(1-\cos t\right)^2+a^2\sin^2 t=$$

$$=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=a^2\left(2-2\cos t\right)=2a^2\left(1-\cos t\right)=$$

$$=2a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}=4a^2\sin^2\frac{t}{2};$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

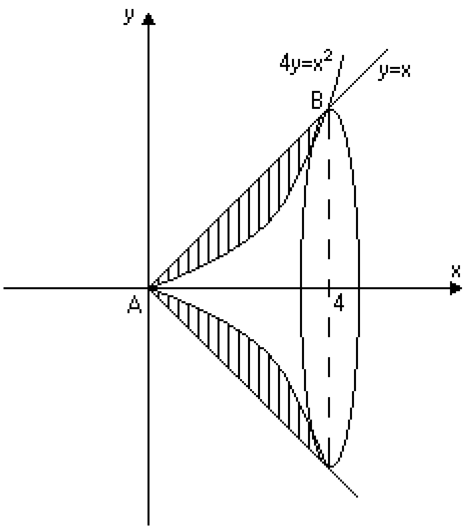
$$=-2a\cdot 2\cos\left.\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi}=-4a\left(\cos\pi-\cos 0\right)=-4a\left(-1-1\right)=8a.$$

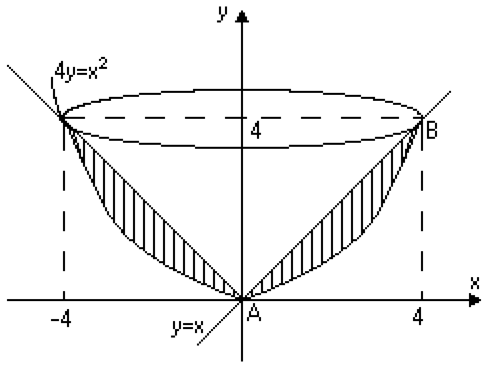
Приклад 14. Обчислити об'єми тіл обертання навколо осей Ox та Oy фігури, яка обмежена лініями $4y=x^2$ та $y=x$.

Розв'язання. Обчислимо об'єми тіл, які утворюються при обертанні фігури навколо осей. Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases}4y=x^2,\\ y=x,\end{cases}\Rightarrow\ 4x=x^2\Rightarrow x^2-4x=0,\ x\left(x-4\right)=0,\ \begin{matrix}x_1=0, & x_2=4\\ y_1=0, & y_2=4.\end{matrix}$$

Одержали дві точки з координатами $A\left(0;0\right)$ та $B\left(4;4\right)$. Зобразимо ці тіла схематично (рис. 12,13).





1) Об'єм тіла обертання навколо осі Ox дорівнює різниці двох об'ємів тіл, які ми обчислимо за формулою (32). Одержимо

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^4 x^2 dx - \pi\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \pi\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{16}\int_0^4 x^4 dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}x^3\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{16}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^4 = \frac{\pi}{3}\cdot 64 - \frac{\pi}{16}\cdot\frac{4^5}{5} = \frac{64\pi}{3} - \frac{64\pi}{5} =$$

$$= \frac{64\pi(5-3)}{15} = \frac{128}{15}\pi\ (\text{куб.од.})$$

2) Аналогічно обчислюємо об'єм тіла обертання навколо осі Oy, використавши формулу (33):

$$V = V_1 - V_2 = -\pi\int_0^4 y^2 dy + \pi\int_0^4 4y\,dy = -\pi\,\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^4 + 4\pi\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^4 =$$

$$= 2\pi y^2\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{3}y^3\Bigg|_0^4 = 2\pi\cdot 16 - \frac{\pi}{3}\cdot 16 = \frac{6\pi\cdot 16 - 16\pi}{3} =$$

$$= \frac{16\pi(6-1)}{3} = \frac{80}{3}\pi\,(\text{куб.од.})$$

Розрахункова робота № 1

Завдання 1. Знайти матрицю $D = 3A^2 - 2BC + A^{-1}$. (*4 x 1 = 0 – 4 бали*)

Варіант	Матриця A	Матриця B	Матриця C
1	$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&1\\0&1&4\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\\0&1\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&3&1\\0&1&5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\0&1\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\1&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&3\\0&2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\-1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\0&3\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}4&1&0\\-1&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}4&1\\-1&3\\0&1\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}4&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}3&1\\1&-2\\0&1\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}1&5&0\\-1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&2\\0&3\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&5&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&2&1\\0&1&5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&3&2\\0&1&6\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\\0&3\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix}4&-1&0\\1&3&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1&3\\-1&4\\0&1\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&-3&2\\0&1&-5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\\0&3\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}-2&-1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$

12	$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$
14	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & -3 & -2\\ 0 & -1 & -5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$
16	$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & -1\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$
18	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -3 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$
20	$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -4 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$

Завдання 2. Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими задана розширеною матрицею. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера, методом Гаусса та матричним методом. (*3 х 2 = 0 – 6 балів*)

Варіант	**Матриця системи**	**Варіант**	**Матриця системи**
1	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	**11**	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -1 \\ 8 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 1 & 5 & 16 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -5 & -8 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	**13**	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 & -8 \\ 5 & -6 & 4 & 20 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -16 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	**15**	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$	**17**	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 5 & -9 & -14 & 6 \\ 1 & 7 & 5 & 11 \\ 5 & -21 & -27 & -5 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & 2 & 18 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**19**	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 & 0 \\ 9 & 14 & -7 & 3 \\ 14 & 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Завдання 3. Задані координати точок

$$A_1(x_1;y_1;z_1),\ A_2(x_2;y_2;z_2),\ A_3(x_3;y_3;z_3),\ A_4(x_4;y_4;z_4).$$

Знайти:

1) довжини ребер A_1A_2 і A_1A_3;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3;
3) площу грані $A_1A_2A_3$;
4) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
5) довжину більшої діагоналі паралелограма, побудованого на векторах A_1A_2 і A_1A_3. *(5 x 1 = 0 – 5 балів)*
6)

Варіант	**Координати точки A_1**	**Координати точки A_2**	**Координати точки A_3**	**Координати точки A_4**
1	(0; 2; 3)	(6; 5; 5)	(2; –4; 6)	(–3; 4; 9)
2	(2; –1; 2)	(8; 2; 4)	(4; –7; 5)	(–1; 1; 8)
3	(2; 0; 1)	(8; 3; 1)	(4; –6; 2)	(–1; 2; 5)
4	(1; 1; 1)	(7; 4; 3)	(3; –5; 4)	(–2; 3; 7)
5	(–2; 2; 1)	(4; 5; 3)	(0; –4; 4)	(–5; 4; 7)
6	(4; 0; 3)	(8; 3; 5)	(4; –6; 6)	(–1; 2; 9)
7	(–1; 1; 0)	(5; 4; 2)	(1; –5; 3)	(–4; 3; 6)
8	(3; 2; 1)	(9; 5; 3)	(5; –4; 4)	(0; 4; 7)
9	(0; 7; 1)	(4; 1; 5)	(4; 6; 3)	(3; 9; 8)
10	(5; 5; 4)	(3; 8; 4)	(3; 5; 10)	(5; 8; 2)
11	(2; –2; 0)	(–1; 3; 2)	(–2; 0; –2)	(–2; 1; –3)
12	(2; 3; 1)	(–2; 1; 5)	(1; 2; 3)	(0; 2; 1)
13	(–1; 2; 3)	(4; –1; 2)	(3; 1; –2)	(1; –3; 0)
14	(0; 2; –4)	(–1; 2; 5)	(1; –1; 2)	(2; –3; 1)
15	(1; 0; –2)	(3; 4; –2)	(2; –3; –1)	(1; 0; –5)
16	(3; –5; 1)	(1; 1; 1)	(–2; 1; –2)	(0; 0; 1)
17	(1; 2; –3)	(5; 2; –3)	(3; 2; –1)	(–4; 1; 2)
18	(5; –2; 1)	(1; –1; –1)	(7; 0; 1)	(–5; 4; –1)
19	(–3; 4; –2)	(2; –4; –1)	(0; 6; –1)	(1; 1; –2)
20	(2; –1; 1)	(–1; 1; 0)	(2; 3; 1)	(–2; 1; –4)

Завдання 4. Дано координати вершин трикутника *ABC*. Знайти:

1) довжину сторони *AC*;
2) рівняння лінії *BC*;
3) рівняння висоти, проведеної з вершини *A*. (*1 x 3 = 0 – 3 бали*)

Варіант	**Координати точки *A***	**Координати точки *B***	**Координати точки *C***
1	(4; 3)	(6; –3)	(–3; –2)
2	(1; –1)	(6; 0)	(5; –7)
3	(–8; –1)	(–2; –3)	(–2; –5)
4	(2; 4)	(4; –4)	(6; 1)
5	(–4; –3)	(–5; 5)	(2; 5)
6	(–6; –2)	(2; 1)	(–3; 7)
7	(5; –1)	(–3; –2)	(3; –8)
8	(3; 6)	(7; –1)	(9; 5)
9	(3; –1)	(–3; 3)	(2; 6)
10	(4; 4)	(1; –3)	(–5; 1)
11	(1; –2)	(7; 6)	(–11; 3)
12	(3; 4)	(–1; 7)	(15; 9)
13	(5; –3)	(1; 0)	(17; 2)
14	(14; –6)	(20; 2)	(2; –1)
15	(2; –4)	(–2; –1)	(14; 1)
16	(2; –1)	(8; 7)	(–10; 4)
17	(–2; –6)	(–6; –3)	(10; –1)
18	(8; 2)	(14; 10)	(–4; 7)
19	(–6; 4)	(–10; –1)	(6; 1)
20	(12; 0)	(18; 8)	(0; 5)

Завдання 5. Скласти канонічне рівняння кривої другого порядку (a, b – півосі кривої, ε – ексцентриситет, r – фокальний радіус). Побудувати цю лінію.

(*2 x 1 = 0 – 2 бали*)

Еліпс		Гіпербола		Парабола	
1	$c = 4$, $\varepsilon = 0.5$	**2**	$b = 4$, $\varepsilon = 5$	**3**	Проходить через точку $M(4;8)$
4	$b = 4$, $\varepsilon = 0.5$	**5**	$c = 3$, $\varepsilon = 1.5$	**6**	Має фокус $F(0;3)$
7	Проходить через точки $M_1(2;\sqrt{3})$, $M_2(0;3)$	**8**	Проходить через точки $M_1(-3;-4)$, $M_2(2;1)$	**9**	Має фокус $F(0;4)$
10	$b = 5$, $\varepsilon = 12/13$	**11**	$a = 8$, $\varepsilon = 5/4$	**12**	Проходить через точку $M(2;4)$
13	$c = 3$, $\varepsilon = 3/5$	**14**	$c = 4$, $\varepsilon = 2.5$	**15**	Має фокус $F(-3;0)$
16	Проходить через точки $M_1(4;0)$, $M_2(2;\sqrt{3})$	**17**	$c = 10$, рівняння асимптот $y = \pm 4x/3$	**18**	Має фокус $F(4;0)$
19	$a = 3$, $\varepsilon = 1/3$	**20**	$a = 4$, рівняння асимптот $y = \pm 4x/3$	**21**	Проходить через точку $M(1;1)$

Розрахункова робота № 2

В-1

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+9}{5x^2+3x-2}$ 2). $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{x+1}$

4). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x-\sin x}{\sin x}$ 5). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ 6). $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2x}-1}{\ln\sin x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot ctgx\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\sqrt{x}\cdot tgx$ 2) $y=\dfrac{\ln x}{4-3\cos x}$ 3) $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$

4) $\begin{cases}x=\arcsin2t\\ y=\dfrac{1}{1-4t^2}\end{cases}$ 5) $\cos5y=x^2y^3+2$ 6) $y=x-\ln\left(e^x+2\sqrt{e^{3x}+e^x}\right)$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{x^2}{x^2-1}$$

В-2

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$ 2). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 3). $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{2x^2+5x-3}$

4). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$ 5). $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$ 6). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin\pi x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\arcsin x\cdot ctgx\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\sin x\cdot\ln x$ 2) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{ctgx}$ 3) $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$

4) $\begin{cases}x=(1-t)^2\\ y=\cos(t-1)^2\end{cases}$ 5) $\sin2y=x^2y^4-1$ 6) $y=e^{2x}+\dfrac{1}{8}\left(2-\sin2x+e^{-3x}\right)$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=x^3\cdot e^x$$

В-3

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x-2)^3}{(x+3)^2}$ 2). $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^{12}+1}-x}$

4). $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{tg2x}$ 5). $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{6x^2+x-1}{x+\frac{1}{2}}$ 6). $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2\cdot x^2-x-1}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{tgx-tg2}{\sin(\ln(x-1))}$ 2) $\lim\limits_{x\to3}\left(9-x^2\right)\cdot tg\frac{\pi x}{6}$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=e^x\arcsin x$ 2) $y=3x\sqrt[3]{x}-\ln x$ 3) $y=\sqrt[4]{x^6+17x^4-2x}$

4) $\begin{cases}x=(t-1)^2\\ y=\sin(t-1)^2\end{cases}$ 5) $tg2y=xy^2+5$ 6)

$y=2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

В-4

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2+5}{x^3+1}$ 2). $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^3-8}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-\sqrt[3]{x+1}}{x+\sqrt[4]{x^2-1}}$

4). $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sqrt{1+x}-1}$ 5). $\lim\limits_{x\to-1}\frac{5x^2+4x-1}{x+1}$ 6). $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-2\cdot x-8}{x^2+4\cdot x-32}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{tg2x}-e^{-\sin2x}}{\sin x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\pi-2arctgx\right)\cdot\ln x$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\sqrt[3]{x^2}\ln x$ 2) $y=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x}$ 3) $y=\sqrt[5]{x^3+x+2}$

4) $\begin{cases}x=tg(t^2)\\ y=t^2-5\end{cases}$ 5) $ctg2y=x^2y^3+5$ 6) $y=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)+tge^x$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=(x-1)e^x$$

В-5

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x^2}{10x^3-3x+1}$ 2). $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^6+2}-x}$

4). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^3x-1}{x^2}$ 5). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$ 6). $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1-\cos\pi x}-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin x\cdot\ln(ctgx)\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=4x^2\sqrt[4]{x}+arctgx$ 2) $y=\dfrac{tg3x}{\ln x}$ 3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$

4) $\begin{cases}x=\ln(1-t^4)\\ y=\arccos(t^2)\end{cases}$ 5) $\cos3y=x^2y^5-3$ 6) $y=2(x-2)\sqrt{1+e^x}+\ln x$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{x^2-4}{x^2+4}$$

В-6

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{1+x^2}-x\right)$ 2). $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3}+8}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^6+x^3+1}-5x}$

4). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}$ 5). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{1-tg2x}$ 6). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\ln\sin3x}{(6x-\pi)^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos\dfrac{\pi x}{2}\cdot\ln(1-x)\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=5x\sqrt[5]{x}-7arcctgx$ 2) $y=\dfrac{3x^5}{e^x}$ 3) $y=\sqrt{1+x+\sin^2x}$

4) $\begin{cases}x=7+t^2\\ y=ctg(3t^2)\end{cases}$ 5) $\cos2y=x^2y^2-5$ 6) $y=\dfrac{1}{\ln x}+\ln\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{\ln x}{x}$$

В-7

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1-2x}+\frac{x}{2}\right)$ 2). $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}+7x^3}{\sqrt[4]{x^{12}+x+1}-x}$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$ 5). $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-14x+6}{x-3}$ 6). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin x}{x^2}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln^2 x}{1+\cos\pi x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\sqrt[4]{x}\sin x$ 2) $y=\frac{\ln x}{\arcsin x}$ 3) $y=\sqrt[3]{3x+\cos 5x}$

4) $\begin{cases} x=\frac{3}{1+t^2} \\ y=arctg(x) \end{cases}$ 5) $\sin 4y=x^2y^2+7$ 6) $y=\ln\left(e^x+1\right)+\frac{18e^x-7}{6\left(e^x+1\right)}$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{x^3}{3-x^2}$$

В-8

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1+x^2}-x\right)$ 2). $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3}+2}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^6+x^3+1}-5x}$

4). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1-tg2x}$ 5). $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-4x-1}{x-1}$ 6). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^x$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=e^x\arccos x$ 2) $y=\frac{ctgx}{2x^2}$ 3) $y=\sqrt{x^5+x^4+16}$

4) $\begin{cases} x=arctg(1+t^2) \\ y=\sqrt{t^2+2t+2} \end{cases}$ 5) $\sin y=x^3y^2+1$ 6) $y=2\left(\sqrt{2^x-1}-arctg\sqrt{2^x}\right)$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

В-9

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-8x+5}{11x^5+x}$ 2). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x+\sin x}$ 5). $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$ 6). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{4x}\right)^x$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{tg\,2x}}{\ln\frac{2x}{\pi}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{x-1}}\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3ctgx$ 2) $y=\dfrac{\ln x}{arcctgx}$ 3) $y=\sqrt{2x^2-4\sin^3 x}$

4) $\begin{cases}x=\sin^2(1-4t)\\ y=\cos^2(1-4t)\end{cases}$ 5) $\cos y=x^2y-3$ 6) $y=\dfrac{1}{2}e^{-2x}\left(\dfrac{\cos 2x+\sin 2x}{4+x}+e^{2x}\right)$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\ln\left(2x^2+3\right)$$

В-10

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$ 2). $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$ 3). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{2x\sin 5x}$ 5). $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}$ 6). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2\cdot x^2-x-1}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\dfrac{e^x}{\arcsin x}$ 2) $y=2^{3x}ctgx$ 3) $y=\sqrt[3]{-x^2+5tg\,2x}$

4) $\begin{cases}x=3e^{-t}\\ y=(2+e^{-t})^3\end{cases}$ 5) $\sin 2y=x^3y^5+7$ 6) $y=\dfrac{x+1}{1-e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=x^2\cdot e^{-x}$$

В- 11

1. *Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)*

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+1}{-9+14x-6x^2}$ 2). $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x}$ 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(x+1)}{x}$

4). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^3-1}}$ 5). $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}$ 6). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2\cdot x-8}{x^2+4\cdot x-32}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{\left(3^{\sin x}-1\right)^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\sqrt[3]{x^2}\sin x$ 2) $y=\dfrac{\ln x}{2-5\cos x}$ 3) $y=\sqrt[4]{\sin 2x-\cos^{-1} x}$

4) $\begin{cases} x=\arccos 3t \\ y=\dfrac{2}{1+4t^2}\end{cases}$ 5) $\cos 6y=x^2y^2+3$ 6) $y=\ln^3\left(e^x+\sqrt{\sin e^{-x}}\right)$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{4x^2}{3-x}$$

В-12

1. *Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)*

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2(x+1)^2}{x^4-2x^2}$ 2). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}$ 3). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

4). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x\cos 2x}{tg 4x}$ 5). $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}$ 6). $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\cos 2x\ln x$ 2) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{tgx}$ 3) $y=3e^{\sqrt{x}}\left(x-e^{\sin x}-\sqrt{x}\right)$

4) $\begin{cases} x=(1+t)^2 \\ y=\sin(t-1)^2\end{cases}$ 5) $\sin 3y=xy^4+2$ 6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x-4tgx}}$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=(x-1)^2\cdot e^x$$

В-13

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^3}{x(x^2+3x+3)}$ 2). $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{2x}}$

4). $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1+\cos x}$ 5). $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5x^2-24x-5}{x-5}$ 6). $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(2x-\pi)^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{e^{2x}-1}\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=e^x\arccos x$ 2) $y=2x^2\sqrt{x}-\ln x$ 3) $y=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$

4) $\begin{cases} x=(t+1)^2 \\ y=\cos(t+1)^2 \end{cases}$ 5) $tg3y=x^2y^2-5$ 6) $y=\sqrt[5]{5\ln 2x-2}$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=x\cdot\sqrt{x+3}$$

В-14

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+1}{4x^3+3x-3}$ 2). $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{3x}+\sqrt[4]{x^3}}{1-x}$

4). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$ 5). $\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x^2+6x-8}{x+4}$ 6). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^{5x-2}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin 4x}{\ln\sin 2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ctg\frac{x}{4}\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=x^3\sqrt{x}-ctg3x$ 2) $y=\frac{\ln x}{e^{2x}}$ 3) $y=\sqrt{3x^3-2x+4e^x}$

4) $\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=t^2+5 \end{cases}$ 5) $ctg3y=x^2y-5$ 6) $y=\frac{e^{x^3}}{(1+x^3)^2}+\ln(1+x^3)$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+4}$$

В-15

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{5x^4+1}$ 2). $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$ 5). $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{x^3-2x^2-3x}$ 6). $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{x}-\ln x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{2}{\sin x}\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=5x^3\sqrt{x}-arcctgx$ 2) $y=\frac{\cos 3x}{e^{-2x}}$ 3) $y=\sqrt[4]{2x^3-4x^4+5x^5}$

4) $\begin{cases} x=7+t^3 \\ y=tg(2t^3) \end{cases}$ 5) $\cos 5y=x^2y^3-3$ 6) $y=x-3\ln\sqrt{1+\sqrt{e^x}}$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=x^2\cdot\ln x$$

В-16

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x-5x^2}{3-x+2x^2}$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}+x}$

4). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}$ 5). $\lim\limits_{x\to 10}\frac{5x^2-51x+10}{x-10}$ 6). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x-5}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{tg3-tgx}{\sin(\ln(x-2))}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arcsin x\cdot tgx\right)$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=5x^2\sqrt[3]{x}-3\arcsin x$ 2) $y=\frac{4x^6}{e^{-2x}}$ 3) $y=\sqrt{\cos^2 2x-3x}$

4) $\begin{cases} x=\ln 5t \\ y=\arcsin 5t \end{cases}$ 5) $\cos 3y=x^3y^5+8$ 6) $y=arctg^2\left(e^x-e^{-x}\right)+tg^2x$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{x}{x^2-1}$$

В-17

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-100x^2+1}{100x^3+15x}$ 2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 12x}{10x}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2\cdot x+7}{(1-x)\cdot(1+4\cdot x)}$

4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{2x}\right)^{4x}$ 5). $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$ 6). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-3}}$ 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\sqrt[5]{x^2}\cos x$ 2) $y=\dfrac{\ln x}{\arccos 2x}$ 3) $y=\sqrt{5\sqrt{x}-4\cos 3x}$

4) $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2+t^2} \\ y=arcctgx \end{cases}$ 5) $\sin 5y=x^3y^2-10$ 6) $y=e^{-x}\arcsin\left(1+e^{-x}\right)$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\ln\left(x^2+2x+2\right)$$

В-18

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+7}{4x^2-x+2}$ 2). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+13x^2+7}-2x^2\right)$

4). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-1}$ 5). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}$ 6). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{6x}}{3x^2+x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=e^{2x}\arcsin x$ 2) $y=\dfrac{\cos x}{2x^5}$ 3) $y=\sqrt[3]{\ln\sqrt{x}-2ctgx}$

4) $\begin{cases} x=arcctg(t^3) \\ y=\sqrt{t^3+t^2-1} \end{cases}$ 5) $\sin 2y=x^4y^2-7$ 6) $y=e^{\sin x}\left(x-\dfrac{1}{\cos x}\right)^2$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{x^2-2}{x-1}$$

В-19

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+5}{3x^4-3x+2}$ 2). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{2-\sqrt{x}}$ 3). $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

4). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin^2 x}{tgx-\sin x}$ 5). $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$ 6). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x-1}{5x}\right)^{2x}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{4x-1}}{2x^2+3x-5}$ 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{tg3x}$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+5ctg2x$ 2) $y=\dfrac{\ln x}{\arcsin 2x}$ 3) $y=\sqrt{tg5x-4\cos 2x}$

4) $\begin{cases} x=\sin^3 5t \\ y=\cos^3 5t \end{cases}$ 5) $\cos 2y=x^2y^5-8$ 6) $y=x-\dfrac{1}{3}\left(\ln\sqrt{1+e^{3x}}\right)^3$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{2x^2+1}{x-1}$$

В-20

1. ***Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя: (0 – 1 бал)***

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2+5x^3}{x^3+3x-12}$ 2). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ 3). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x}}{x+2}$

4). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-tg^2 x\right)$ 5). $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}}\dfrac{15x^2-2x-1}{x+\frac{1}{5}}$ 6). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{4x}$

2. *Обчислити границі* ***за правилом Лопіталя****: (0 – 2 бали)*

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{3+2x}}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$

3. *Обчислити похідні заданих функцій: (0 – 1 бал)*

1) $y=\sqrt[3]{x^2}\ln 5x$ 2) $y=\sqrt[4]{x^3}tgx$ 3) $y=\sqrt[4]{\sin 4x+3\cos^2 5x}$

4) $\begin{cases} x=5e^{-t} \\ y=(3+e^{-t})^2 \end{cases}$ 5) $\sin 5y=x^2y^5-10$ 6) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{\sin\left(e^{-x}\right)}\right)^3$

4. *Провести повне дослідження функції і побудувати графік (0 – 4 бали)*

$$y=\frac{2x}{x^3-8}$$

Розрахункова робота № 3

В-1

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)dx$ 2) $\int (x+1)^{15}dx$ 3) $\int x\cos 5x dx$

4) $\int \frac{2x-5}{x^2+6x+8}dx$ 5) $\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}dx$ 2) $\int_0^1 xe^{3x}dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=4x-x^2$, $y=2x$. Знайти її площу. (0 – 3 бали)

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=\frac{x^2}{4}$, $y=\frac{x^3}{8}$., навколо осі Ох. (0 – 3 бали)

В-2

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$ 2) $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$ 3) $\int x\sin 2x dx$

4) $\int \frac{x+3}{x^2-2x+3}dx$ 5) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin x dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=x^3$, $y=8$, $x=0$. Знайти її площу. (0 – 3 бали)

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=\frac{x^3}{3}$, $-2\le x\le 2$., навколо осі Ох. (0 – 3 бали)

В-3

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \sqrt[5]{x^7 \sin^2 x + x^7 \cos^2 x}dx$ 2) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx$ 3) $\int e^{x^2+2x}(x+1)dx$

4) $\int \frac{x+3}{3x^2+2x+1}dx$ 5) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$ 2) $\int_2^3 (x+3)\ln x dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y^2 = 3x,\ y \geq 0,\ x = \frac{16}{3}$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4 - x,\ x = 0$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-4

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \sqrt{1-6x^2+9x^4}dx$ 2) $\int \sqrt{8-2x}dx$ 3) $\int \sqrt{1-2x^3}x^2dx$

4) $\int \frac{8x-1}{4x^2-4x+17}dx$ 5) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_1^e \frac{1-\ln x}{x}dx$ 2) $\int_1^2 x\ln x dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y = x^2 + 3,\ y = 12$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2,\ y = 0$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-5

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int\left(\sqrt{x^3+4}-2\right)\left(\sqrt{x^3+4}+2\right)dx$ 2) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ 3) $\int(9x-3)\cos 3xdx$

4) $\int\frac{3x-2}{2x^2-x-1}dx$ 5) $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 xdx$ 2) $\int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}}\arcsin 3xdx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $x=4-y^2$, $x=0$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $x=y^2$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-6

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int\sqrt{16+8e^{3x}+e^{6x}}dx$ 2) $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 3) $\int x3^x dx$

4) $\int\frac{2x+1}{4x^2+2x+5}dx)$ 5) $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_1^3\frac{dx}{x^2+3}$ 2) $\int_{-1}^0\frac{dx}{9x^2-9x+2}$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $x=4-y^2$, $x=0$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $x=y^2$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-7

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \frac{dx}{(1-\cos 5x)(1+\cos 5x)}$ 2) $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2}\,dx$ 3) $\int x\ln(x-1)dx$

4) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$ 5) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$ 2) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=\frac{4}{x}$, $y+x=5$. *Знайти її площу.* *(0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y^2=4+x$, $x=2$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-8

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)\left(1-\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)dx$ 2) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}}$ 3) $\int (2x+1)arctgxdx$

4) $\int \frac{2x-3}{x^2+8x-2}dx$ 5) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^3 x dx$ 2) $\int_1^{\sqrt{3}} xarctgxdx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=x^2-8x$, $y=2x$. *Знайти її площу.*
(0 – 3 бали)

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y^2=4x$, $x=4$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-9

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \sqrt{1-2\cdot 3^x+9^x}\,dx$ 2) $\int \sin^3 x \cos x dx$ 3) $\int x^2 \ln(1+x) dx$

4) $\int \dfrac{4x-5}{3x^2-2x+3}dx$ 5) $\int \dfrac{dx}{4\sin x - 7\cos x + 1}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int\limits_1^4 \left(2x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int\limits_{-2}^{0} xe^{\frac{x}{2}}dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2$, $y=0$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-10

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \dfrac{x^2 2^x - 8^x + 7}{2^x}dx$ 2) $\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ 3) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$

4) $\int \dfrac{3x+2}{x^2+3x+4}dx$ 5) $\int \dfrac{dx}{4-3\cos x + 5\sin x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1+\cos^2 x}dx$ 2) $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \dfrac{xdx}{e^{2x}}$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=x^2-3x+1$, $y=x-2$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=x^3$, $x=0$, $y=8$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-11

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int\left(\sqrt[4]{3x+2}-\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}\right)\left(\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}\right)dx$ 2) $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

3) $\int\left(x^2-2x+3\right)\sin x\,dx$ 4) $\int\frac{3x-1}{3x^2-2x+7}dx$ 5) $\int\frac{dx}{\sin x+4\cos x+5}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{1+x^4}$ 2) $\int\limits_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos\ln x\,dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=x^2-4x+3,\ y=-x+1$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y^2=2x,\ x=0,\ x=2$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-12

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+tg^2x}}$ 2) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$ 3) $\int x^2e^{-x}dx$

4) $\int\frac{3x-4}{x^2+4x+4}dx$ 5) $\int\frac{dx}{\sin x-\cos x+5}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{e^x-1}$ 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=x^2+6x+5,\ y=0$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=x^3,\ x=0,\ x=1/2$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-13

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$ 3) $\int xe^{3x-5}dx$

4) $\int \frac{3x-4}{2x^2+x+2}dx$ 5) $\int \frac{dx}{3\sin x+5\cos x-2}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^8+1}$ 2) $\int_0^{2\pi} \cos 5x \cos x\,dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ y=0$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=-\frac{x^2}{2}+2,\ y=0$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-14

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \left(1+ctg^2 3x\right)dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ 3) $\int \ln^2 x\,dx$

4) $\int \frac{4x+2}{2x^2-3x+6}dx$ 5) $\int \frac{dx}{5\sin x+\cos x-2}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1)

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=x^3/4,\ x=0,\ y=2$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2,\ y=-x+2$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-15

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \frac{\sin 4x}{\cos 2x} dx$ 2) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ 3) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

4) $\int \frac{5x-1}{2x^2+2x+3} dx$ 5) $\int \frac{dx}{4\sin x + 2\cos x + 1}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2+4} dx$ 2) $\int_{1}^{2} (x-2)\ln x dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y^2 = 4 - x,\ x + 3y = 0$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 1 - x^2,\ y = 1,\ x = 1$*, навколо осі Ox. (0 – 3 бали)*

В-16

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \frac{x^3 5^x - \sqrt[3]{x} + 2x^2}{x^3} dx$ 2) $\int \frac{dx}{2x^2+9}$ 3) $\int \sin \ln x dx$

4) $\int \frac{x+4}{3x^2 - x + 1} dx$ 5) $\int \frac{dx}{4 + 2\sin x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 - \sin^2 x}$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $xy = 3,\ x + y = 4$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x^3,\ y = 0,\ x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$*, навколо осі Ox. (0 – 3 бали)*

В-17

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}}$ 3) $\int e^{\sin x} \sin 2x dx$

4) $\int \frac{2x-4}{3x^2 - 3x + 4}dx)$ 5) $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x - 5}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}dx$ 2) $\int_{-1}^{1} xarctgx dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y = 1 - x^2$, $y = 1 + x^2$, $x = 1$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y = \ln x,\ x = 2,\ y = 0$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-18

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x}dx$ 2) $\int \frac{xdx}{x^4 + 1}$ 3) $\int e^x \cos 2x dx$

4) $\int \frac{2x-3}{3x^2 + 4x + 5}dx$ 5) $\int \frac{dx}{3 - 2\cos x}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}$ 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x-1)\cos\frac{x}{3}dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $xy = 4,\ x = 1,\ x = 5,\ y = 0$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y = \sin x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, *навколо осі Ох. (0 – 3 бали)*

В-19

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$ 2) $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$ 3) $\int x\,arctgx\,dx$

4) $\int\frac{3x-4}{x^2+7x+2}dx$ 5) $\int\frac{dx}{5\cos x+2\sin x-6}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(3x+5)dx$ 2) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{4x^2-9}$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $y=x^2$, $y=x+2$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=(x-1)^2$, $x=2$, $y=0$, *навколо осі Ox. (0 – 3 бали)*

В-20

1. Обчислити невизначені інтеграли. (0 – 2 бали)

1) $\int\frac{dx}{1-\cos 8x}$ 2) $\int\frac{dx}{x^2-2x-3}$ 3) $\int\arccos 2x\,dx$

4) $\int\frac{x+1}{4x^2-12x+3}dx$ 5) $\int\frac{dx}{\cos x+4\cos x-2}$

2. Обчислити визначений інтеграл. (0 – 2 бали)

1) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{-2x}dx$ 2) $\int\limits_1^2\left(2x^2+\frac{2}{x^4}\right)dx$

3. Побудувати область, обмежену лініями: $xy=6$, $y=x-1$, $x=6$. *Знайти її площу. (0 – 3 бали)*

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворене обертанням фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $8x=y^2$, *навколо осі Ox. (0 – 3 бали)*

ЛІТЕРАТУРА

1. Григоренко, К.В. Вища математика : навч. посіб. / К.В. Григоренко, С.О. Касярум, І.П. Частоколенко. – Черкаси : ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля, 2017. – 92 с.
2. Касярум, С.О. Диференціальне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / С.О. Касярум, К.В. Григоренко, І.П. Частоколенко. – Черкаси : ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля, 2022. – 50 с.
3. Касярум, С.О. Основи вищої математики та математичної статистики : навч. посіб. / С.О. Касярум, К.В. Григоренко, І.П. Частоколенко. – Черкаси : ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля, 2018. – 116 с.