НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ УКРАЇНИ

ЧЕРКАСЬКИЙ ІНСТИТУТ ПОЖЕЖНОЇ БЕЗПЕКИ ІМЕНІ ГЕРОЇВ ЧОРНОБИЛЯ

ФАКУЛЬТЕТ ПОЖЕЖНОЇ БЕЗПЕКИ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Григоренко К., Касярум С.

Методичні вказівки до виконання модульних контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» (частина 1)

Черкаси 2024

Алгебра і геометрія — єдині країни,

де панують тиша й мир.

(М. Аньєзі)

Даний навчальний посібник стане у нагоді курсантам та студентам при підготовці та виконанні модульних контрольних робіт по темам, які вивчаються у першому семестрі навчання. Якісно подано теоретичний матеріал, розв’язана велика кількість прикладів, подібних до контрольних. Ретельно підібрані завдання у роботах.

ЗМІСТ

1. Елементи лінійної алгебри

При розв'язуванні різних задач математики, техніки, економіки, особливо лінійних систем рівнянь, лінійних диференціальних рівнянь та їх систем, застосовують матриці, визначники та n-мірні вектори.

Матрицею називають прямокутну таблицю елементів, яка має n рядків та m стовпців. Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту $A, B, C, D, \ldots$ Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – елементи матриць, у яких індекс i показує номер рядка, а індекс j – стовпця.

Якщо число рядків і стовпців матриці співпадає ($m = n$), то така матриця називається квадратною. Так, матриця B, у якої $n = m = 2$, є квадратною.

Добутком двох матриць A (з n рядків та m стовпчиків) та B (з m рядків та l стовпчиків) називають матрицю з n рядків та l стовпчиків, у якої в i-му рядку на j-му місці стоїть сума $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

Наприклад, для матриць розмірності 2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначником називають число, яке ставиться у відповідність квадратній матриці. Визначник (детермінант) позначають символами $\Delta, \Delta B, \det B$. Так, наприклад, для матриці B визначник будемо позначати

$$\Delta = \Delta B = \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Порядком визначника називають його розмірність $m = n$.

Визначником 2-го порядку є число, яке дорівнює різниці добутків елементів головної $\left(a_{11},\, a_{22}\right)$ та побічної $\left(a_{12},\, a_{21}\right)$ діагоналей. Так,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначники вищих порядків $\left(n = m > 2\right)$ обчислюються іншим способом. Для його пояснення введемо поняття мінора та алгебраїчного доповнення визначника.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають визначник $n-1$-го порядку, який одержують з визначника n-го порядку при викреслюванні i-го рядка та j-го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають мінор M_{ij}, який береться зі знаком плюс, якщо сума індексів $i + j$ є парним числом і зі знаком мінус, якщо ця сума є непарним числом. Тобто, $A_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} M_{ij}$.

Визначником n-го порядку називають число, яке, наприклад, записують у вигляді

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \qquad (1)$$

Вираз (1) називають розкладом визначника n-го порядку по елементах i-го рядка.

Для визначника 3-го порядку формула (1) має вигляд $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$. Так, наприклад, розклад визначника 3-го порядку по елементах першого ($i = 1$) рядка має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

<u>Приклад 1</u>. Обчислити визначник 3-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>Розв'язання</u>. Згідно формул (1), (2) визначник 3-го порядку обчислимо так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 5) - (1 \cdot 2 - 3 \cdot 5) - (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 2(4-5) - (2-15) - (1-6) =$$

$$= 2 \cdot (-1) - (-13) - (-5) = -2 + 13 + 5 = 16.$$

<u>Невиродженою</u> називають квадратну матрицю, визначник якої відмінний від нуля.

<u>Одиничною</u> називають квадратну матрицю, у якої по головній діагоналі знаходяться одиниці, а решта елементів дорівнюють нулю.

<u>Оберненою</u> до квадратної матриці A називають матрицю A^{-1}, для якої виконується умова $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця. Для того, щоб для квадратної матриці існувала обернена матриця, необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою, тобто $\Delta A \neq 0$.

Так, для невиродженої матриці A обернену до неї матрицю A^{-1} можемо записати у вигляді

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Рангом матриці називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r=r(A)$.

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad ..... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \qquad (4)$$

де a_{ij} ($i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$) – коефіцієнти при невідомих $x_1,x_2,...,x_n$, b_k ($k=\overline{1,m}$) – вільні члени.

Для того, щоб система лінійних рівнянь (4) була сумісною (тобто, мала розв’язок), необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи $r(A)$ дорівнював рангу її розширеної матриці $r(B)$, де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ..... & ..... & ... & ..... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Якщо система лінійних рівнянь (4) сумісна, то вона має один або безліч розв’язків.

Розглянемо методи розв’язування лінійних рівнянь за допомогою визначників та матриць.

Правило Крамера.

Це правило можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають. Для простоти викладу розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими ($n = m = 3$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (5)$$

Позначимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ називають визначником системи і його складають з коефіцієнтів при невідомих, а у визначниках $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ коефіцієнти при відповідних невідомих замінені вільними членами.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (5) має єдиний розв’язок. Невідомі визначають за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \qquad (6)$$

і такий спосіб визначення невідомих називають правилом Крамера.

Якщо $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, то система (5) має безліч розв’язків, а правило Крамера застосувати не можна.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників Δx_i, $i = 1, 2, 3$, відмінний від нуля, то система (5) несумісна.

<u>Приклад 2</u>. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

<u>Розв’язання</u>. Складемо і обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8+2) - (4+8) + 3(1+8) = 3\cdot(-6) - 12 + 27 = -18 - 12 + 27 = -3;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8+2) - (4+2) + 3(1+2) = -6 - 6 + 9 = -3;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4+2) - (4+8) + 3(1-4) = 18 - 12 - 9 = -3;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2-1) - (1-4) + (1+8) = -9 + 3 + 9 = 3.$$

Підставимо одержані результати у формули (6). Маємо

$$x_1 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_3 = \frac{3}{-3} = -1.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

<u>**Матричний спосіб.**</u>

Матричний спосіб можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають, а крім того, матриця системи має обернену.

Запишемо систему (5) у матричному вигляді. Для цього введемо матриці виду:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Користуючись правилом множення матриць, систему (5) запишемо у матричному вигляді

$$A\cdot X=B. \qquad (7)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X=A^{-1}\cdot B, \qquad (8)$$

де A^{-1} є оберненою матрицею до матриці A.

<u>Приклад 3</u>. Розв'язати систему лінійних рівнянь попереднього прикладу матричним способом.

<u>Розв'язання</u>. Перепишемо задану систему у вигляді (7). Для цього складемо матриці виду

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи будемо шукати у вигляді (8). Необхідно знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A. Обернена матриця існує, бо $\Delta A=-3\neq 0$ (див. приклад 2). Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(4+8) = -12,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6-3) = 9,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7.$$

Складемо обернену матрицю згідно формули (3). Одержимо

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Помножимо обернену матрицю на матрицю B і одержимо шукану матрицю X. Маємо

$$X = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6-1+4 \\ -12+0+9 \\ 9+1-7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

Метод Гаусса.

Для розв'язування систем лінійних рівнянь застосовують метод, який називають методом Гаусса або методом виключення змінних. Суть методу Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь розглянемо за допомогою матриць. Його ідея полягає у зведенні розширеної матриці системи за допомогою елементарних перетворень матриці до трикутної матриці.

Трикутною називають матрицю, у якої під головною діагоналлю всі елементи рівні нулю.

Елементарними перетвореннями матриці є такі перетворення:

1) перестановка двох рядків матриці;
2) множення всіх елементів рядка на одне і те ж число, відмінне від нуля;
3) додавання елементів якого-небудь рядка матриці, помножених на одне і те ж число, до відповідних елементів іншого рядка;
4) відкидання рядків матриці, елементами яких є нулі.

Проводячи елементарні перетворення над матрицею системи, отримують нову систему рівнянь, яка еквівалентна заданій, але з новими коефіцієнтами та вільними членами. Одержують трикутну систему рівнянь, із якої визначають невідомі.

Приклад 4. Методом Гаусса розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи і будемо робити над нею необхідні елементарні перетворення, щоб одержати трикутну матрицю. На початку переставимо перше і третє рівняння місцями, а потім помножимо елементи першого рядка відповідно на мінус три, мінус два та мінус два і одержані результати додамо відповідно до елементів другого, третього та четвертого рядків. Аналогічно вчинимо з елементами другого, а потім третього рядків. Одержимо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&1&10&10\\0&0&-5&-5\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&1&10&10\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&1&10&10\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&1&10&10\\0&0&1&1\end{array}\right).$$

Система лінійних рівнянь матиме вигляд

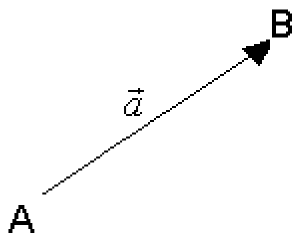
$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=4,\\ \quad x_2+10x_3=10,\\ \qquad x_3=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4-x_2-3x_3=1,\\ x_2=10-10x_3=0,\\ x_3=1.\end{cases}$$

З третього рівняння $x_3=1$. З другого рівняння одержали x_2, а з першого одержуємо x_1.

Відповідь: $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=1.$

2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Вектором називають напрямлений відрізок простору. Вектор позначають $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$, де A – початкова точка вектора, а B – кінцева.



Якщо точки A та B задані своїми координатами $A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2)$, то проекції вектора на відповідні осі координат будуть дорівнювати різниці відповідних координат: $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$.

Ортами (одиничними векторами) називають три взаємно-перпендикулярних вектори, довжини яких дорівнюють одиниці, їх позначають через $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ $\left(\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1,\ \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}\right)$. Тоді вектори $\overrightarrow{AB},\vec{a}$ можна записати через проекції (координати) у вигляді

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}, \qquad (9)$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} . \qquad (10)$$

Довжину (модуль) вектора можна знайти за формулами:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (11)$$

<u>**Скалярним добутком**</u> двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (12)$$

або

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \qquad (13)$$

якщо вектори задані координатами $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. З формули (12), з урахуванням формул (11) і (13) випливає, що косинус кута між двома векторами можна обчислити так:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} . \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (14)$$

<u>**Векторним добутком**</u> двох векторів називають третій вектор, який задовольняє умовам:

1) довжина вектора чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудований на заданих векторах;

2) вектор перпендикулярний до площини векторів-множників;

3) вектор направлений в той бік, що якщо дивитися з його кінця, то рух від першого вектора-множника до другого буде здійснюватися проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначають у вигляді $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, або

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані координатами.

Рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ простору можна записати за формулою

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (16)$$

<u>Задача 1</u>. Дано координати вершин піраміди $A(0;0;2)$, $B(2;2;1)$, $C(-2;1;0)$ та $D(-1;2;0)$. Знайти:

1) довжину ребра AB;

2) написати рівняння ребра AB;

3) обчислити кут між ребрами AB і AC;

4) обчислити площу основи ABC;

5) зробити схематичний малюнок піраміди.

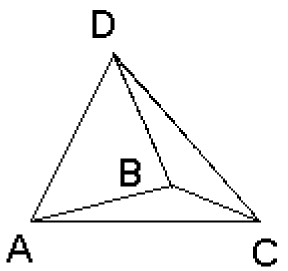


Рис. 1

<u>Розв'язання</u>. Зробимо схематичний малюнок піраміди (Рис. 1).

1) Знайдемо довжину ребра AB за формулою (11). Одержимо $AB=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{4+4+1}=3$.

2) За формулою (16) напишемо рівняння ребра AB:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-2}{1-2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

3) Для обчислення косинуса кута між ребрами AB і AC знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{AB}=\{2-0;2-0;1-2\}=\{2;2;-1\}$ і $\overrightarrow{AC}=\{-2-0;1-0;0-2\}=\{-2;1;-2\}$.

Тоді в силу формули (14) одержимо

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot(-2)+2\cdot1-1\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{-4+2+2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}=\frac{0}{9}=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

4) Площа основи ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, який побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Тобто $S_\Delta = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ обчислимо за формулою (15). Тоді

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-4+1\right)+\vec{j}\left(-4-2\right)+\vec{k}\left(2+4\right) = -3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k};$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \left|-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}\right| = \sqrt{\left(-3\right)^2+6^2+6^2} = \sqrt{81} = 9;$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot 9 = \frac{9}{2} = 4{,}5\ (\text{кв.одиниць}).$$

3. Криві другого порядку

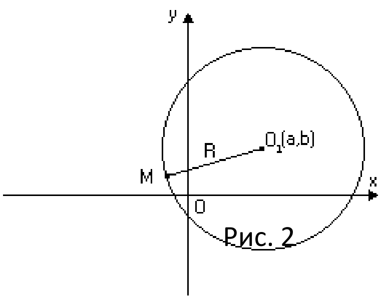


Рис. 2

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від однієї точки $O_1\left(a;b\right)$, яка називається центром. Канонічне рівняння кола має вигляд

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2 = R^2 \text{ або } x^2+y^2=R^2, \quad (17)$$

коли центр кола співпадає з початком координат. R – радіус кола (Рис. 2).

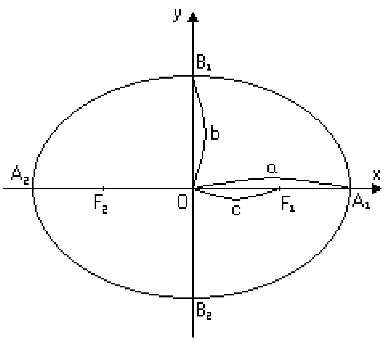


Рис. 3

Еліпсом називається множина всіх точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок, які називаються фокусами, є величина стала (Рис. 3). Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ де } b^2=a^2-c^2. \quad (18)$$

Величини a і b – півосі еліпса, а фокуси мають такі координати: $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$. Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ характеризує форму еліпса і називається його **ексцентриситетом**.

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для яких модуль різниці відстаней кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величина стала (Рис. 4). Канонічне рівняння гіперболи має вигляд

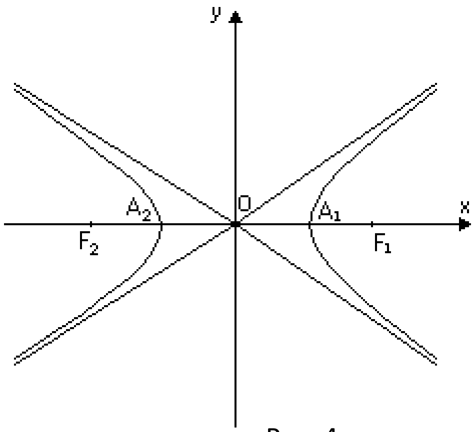
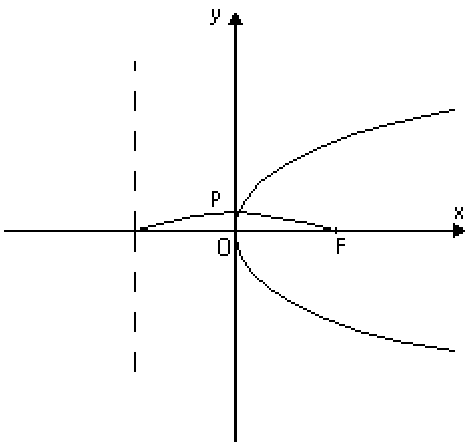


Рис. 4

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ де } b^2 = c^2 - a^2. \qquad (19)$$

Прямі лінії $y = \pm \frac{b}{a} x$ називаються асимптотами гіперболи. Гілки гіперболи наближаються до даних асимптот.

Параболою називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки F, яка називається фокусом, і даної прямої, яка називається директрисою (Рис. 5). Канонічне рівняння параболи має вигляд



$$y^2 = 2px, \qquad (20)$$

де величина p називається параметром параболи.

Зауваження. Якщо фокальна вісь параболи буде співпадати з віссю Oy, то рівняння параболи має вигляд

$$x^2 = 2py. \qquad (21)$$

Приклад 5. 1) Знайти координати центра і величину радіуса кола $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$.

2) Для гіперболи $16x^2-9y^2=144$ знайти величини півосей, координати фокусів, ексцентриситет та написати рівняння її асимптот.

Розв'язання. 1) Запишемо рівняння кола у канонічному вигляді (17), виділяючи повні квадрати відносно кожної змінної величини. Одержимо

$$\left(x^2+2x+1\right)-1+\left(y^2-10y+25\right)-25+1=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x+1\right)^2+\left(y-5\right)^2=25.$$

Центр кола лежить в точці $O_1\left(-1;5\right)$, а радіус $R=5$.

2) Якщо поділимо почленно рівняння гіперболи на 144, то одержимо канонічне рівняння вигляду (19):

$\dfrac{16x^2}{144}-\dfrac{9y^2}{144}=\dfrac{144}{144} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$, де $a=3,\ b=4$.

Значення c знайдемо з рівняння $b^2=c^2-a^2$. Тут $c^2=a^2+b^2=9+16=25, \quad c=5$.

Фокуси мають координати: $F_1\left(5;0\right)$ і $F_2\left(-5;0\right)$, а ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3},\ \varepsilon=\dfrac{5}{3}$.

Рівняння асимптот відповідно є $y=\pm\dfrac{b}{a}x,\ \ y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

4. Невизначений інтеграл

В диференціальному численні розв'язували таку задачу: для заданої функції знайти її похідну. В інтегральному численні розв'язують обернену задачу: по заданій похідній відновити первісну функцію.

Невизначеним інтегралом для неперервної функції $f\left(x\right)$ називають множину всіх первісних функцій $F\left(x\right)$ і позначають

$$\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C.$$

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$;

2) $\int\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int\varphi(x)dx$.

Таблиця основних інтегралів:

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$;
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;
4. $\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$;
5. $\int e^{u}du = e^{u} + C$;
6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$;
7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$;
8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\,u + C$;
9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\,u + C$;
10. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C$;
11. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
12. $\int \mathrm{tg}\,u\,du = -\ln|\cos u| + C$;
13. $\int \mathrm{ctg}\,u\,du = \ln|\sin u| + C$;
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;
15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;
16. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$;
17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+12}{x^2-3}dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину підінтегральної функції. Для цього поділимо чисельник на знаменник способом ділення многочлена на многочлен, або припишемо в чисельнику -3 та $+3$ і розглянемо суму дробів. Одержимо

$$\frac{x^2-3+3+12}{x^2-3}=\frac{x^2-3}{x^2-3}+\frac{15}{x^2-3}=1+\frac{15}{x^2-3}.$$

$$\int \frac{x^2+12}{x^2-3}dx=\int\left(1+\frac{15}{x^2-3}\right)dx=\int dx+15\int\frac{dx}{x^2-3}=x+\frac{15}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-x^2}}dx$.

Розв'язання. Розглянемо різницю двох інтегралів і до кожного із них застосуємо відповідну формулу із таблиці інтегралів. Одержимо

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-x^2}}dx=3\int\frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}-2\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}=I,$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}}=\left|\begin{matrix}u=5-x^2\\ du=-2xdx\end{matrix}\right|=\frac{1}{-2}\int\frac{-2xdx}{\sqrt{5-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{u}=-\sqrt{5-x^2};$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}=\left|\begin{matrix}u=x\\ du=dx\\ a=\sqrt{5}\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}};$$

$$I=3\left(-\sqrt{5-x^2}\right)-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C=-3\sqrt{5-x^2}-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2+5x+9}$.

Розв’язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції і зможемо застосувати відповідну формулу із таблиці інтегралів. Одержимо

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+9} = \left| \begin{array}{l} x^2+5x+9= \\ = x^2+5x+\dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{4}+9= \\ = \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x+\dfrac{5}{2} \\ du = dx \\ a = \dfrac{\sqrt{11}}{2} \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}}+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}+5}$.

Розв’язання. Часто доводиться вводити заміну для спрощення обчислення інтегралу. Замінимо $\sqrt{x-3}$ на нову змінну. Одержимо

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-3}+5} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{x-3}=t, & dx=2t\,dt \\ x-3=t^2, & x=t^2+3 \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^2+3\right)2t\,dt}{t+5} =$$

$$= 2\int \frac{t^3+3t}{t+5}dt = 2\int \left(t^2-5t+28-\frac{140}{t+5}\right)dt =$$

$$
\begin{array}{rl|l}
- & t^3+3t & t+5 \\
\cline{3-3}
 & \underline{t^3+5t^2} & t^2-5t+28-\dfrac{140}{t+5} \\
- & -5t^2+3t & \\
 & \underline{-5t^2-25t} & \\
- & 28t & \\
 & \underline{28t+140} & \\
 & -140 &
\end{array}
$$

$$
=2\int t^2dt-10\int t\,dt+56\int dt-280\int\frac{dt}{t+5}=
$$

$$
=2\frac{t^3}{3}-10\frac{t^2}{2}+56t-280\ln|t+5|+C=
$$

$$
=\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}-5(x-3)+
$$

$$
+56\sqrt{x-3}-280\ln\left|\sqrt{x-3}+5\right|+C.
$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int x^2\cos 2x\,dx$.

Розв'язання. Серед методів інтегрування важливим є метод інтегрування частинами. Формула інтегрування частинами має вид

$$
\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{24}
$$

При інтегруванні цю формулу застосовують один чи декілька раз. Застосуємо формулу для знаходження інтеграла:

$$
\int x^2\cos 2x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x^2,\ \ du=2x\,dx \\ dv=\cos 2x\,dx,\ \ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right|=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\cdot 2xdx=
$$

$$
=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\int x\sin 2x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x,\quad du=dx \\ dv=\sin 2x\,dx,\ \ v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right|=
$$

$$
=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right)=\frac{x^2}{2}\sin 2x+
$$

$$
+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.
$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int x^2\ln(x+2)\,dx$.

Розв'язання. Для знаходження інтеграла застосуємо формулу (24). Одержимо

$$\int x^2 \ln(x+2)\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln(x+2), & du=\dfrac{dx}{x+2}, \\ dv = x^2dx, & v=\dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right| = \frac{x^3}{3}\ln(x+2) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x+2} =$$

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3 \qquad\qquad & \qquad x+2 \\ \hline \underline{x^3+2x^2} \qquad & x^2-2x+4-\dfrac{8}{x+2} \\ -\;-2x^2 \qquad & \\ \underline{-2x^2-4x} & \\ -\;4x \quad & \\ \underline{4x+8} & \\ -8 & \end{array}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln|x+2| - \frac13\int\frac{x^3}{x+2}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln|x+2| -$$

$$-\frac13\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx = \frac{x^3}{3}\ln|x+2| -$$

$$-\frac13\int x^2\,dx+\frac23\int x\,dx - \frac43\int dx + \frac83\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln|x+2| -\frac13\cdot\frac{x^3}{3}+\frac23\cdot\frac{x^2}{2}-\frac43x+$$

$$+\frac83\ln|x+2|+C = \frac{x^3}{3}\ln|x+2| - \frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}-\frac{4x}{3}+\frac83\ln|x+2|+C.$$

<u>Приклад 7</u>. Знайти інтеграл $\int\left(e^{-3x}+\operatorname{ctg}5x-\sqrt[3]{x}+2\right)dx$.

<u>Розв’язання</u>.

$$\int\left(e^{-3x}+\operatorname{ctg}5x-\sqrt[3]{x}+2\right)dx = \int e^{-3x}dx+\int\operatorname{ctg}5x\,dx-\int\sqrt[3]{x}\,dx+2\int dx =$$

$$= -\frac13 e^{-3x}-\frac{1}{5\sin^2 5x}-\frac{3x^{\frac43}}{4}+2x+C = -\frac13 e^{-3x}-\frac{1}{5\sin^2 5x}-\frac34\sqrt[3]{x^4}+2x+C.$$

5. Визначений інтеграл

Для обчислення визначеного інтеграла застосовують формулу, яка зв'язує визначений інтеграл та первісну функцію. Ця формула має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{25}$$

де $F(x)$ – первісна функція, а a та b – межі (границі) інтегрування і її називають формулою Ньютона-Лейбніца.

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{2x}dx$.

Розв'язання. При обчисленні визначеного інтеграла за формулою (25) необхідно знайти первісну функцію для функції e^{2x}. Одержимо

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot 1} - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int_6^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}+3}$.

Розв'язання. Для знаходження первісної в заданому інтегралі необхідно застосувати метод заміни змінної. Разом із заміною змінної поміняємо межі інтегрування. Одержимо

$$\int_6^{11} \frac{dx}{\sqrt{x-2}+3} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x-2} = t, \;\; x = t^2 + 2, \;\; \textit{при} \;\; x = 6: \; t_1 = \sqrt{6-2} = 2, \\ x - 2 = t^2, \;\; dx = 2t\,dt, \;\; \textit{при} \;\; x = 11: \; t_2 = \sqrt{11-2} = 3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_2^3 \frac{2t\,dt}{t+3} = 2\int_2^3 \frac{(t+3)-3}{t+3}dt = 2\left(\int_2^3 dt - 3\int_2^3 \frac{dt}{t+3}\right) = 2t\Big|_2^3 - 6\ln|t+3|\Big|_2^3 =$$

$$= 2(3-2) - 6(\ln 6 - \ln 5) = 2 - 6\ln\frac{6}{5}.$$

6. Застосування визначених інтегралів

Площу криволінійної трапеції для неперервної на сегменті $[a,b]$ функції $y = f(x) > 0$, згідно геометричного змісту інтеграла, обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{27}$$

Площу криволінійного сектора в полярній системі координат обчислюють за формулою

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi, \tag{28}$$

де $\rho = \rho(\varphi)$ неперервна $\forall\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$.

Довжину дуги лінії на сегменті $[a,b]$ неперервної разом зі своєю похідною функції $y = f(x)$ обчислюють за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx, \tag{29}$$

або за формулою

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}dt, \tag{30}$$

якщо функція задана параметрично $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2]$.

У випадку, коли крива задана полярним рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, то

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'\right)^2}d\varphi. \tag{31}$$

Об’єм тіла обертання криволінійної трапеції з основою $[a,b]$ навколо осі Ox, яка обмежена неперервною функцією $y = f(x)$, обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (32)$$

Якщо криволінійна трапеція з основою $\left[c,d\right]$ обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла обертання обчислюють за формулою

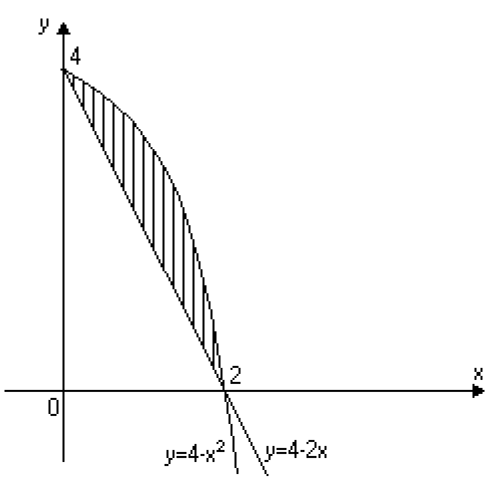
$$V=\pi\int_c^d\left(\varphi\left(y\right)\right)^2dy=\pi\int_c^d x^2dy, \qquad (33)$$

де $x=\varphi\left(y\right)$ неперервна для всіх $y\in\left[c,d\right]$.

Приклад 10. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y=4-x^2$ та $y=4-2x$.

Розв'язання. Зобразимо фігуру (рис. 10). Знайдемо точки перетину ліній. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=4-2x, \end{cases} \Rightarrow\ 4-x^2=4-2x\ \Rightarrow\ x^2-2x=0,\ x_1=0, x_2=2.$$



Площа фігури дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, площі яких обчислимо за формулою (27). Одержимо

$$S=S_2-S_1=\int_0^2\left(4-x^2\right)dx-\int_0^2\left(4-2x\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(4-x^2-4+2x\right)dx=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=$$

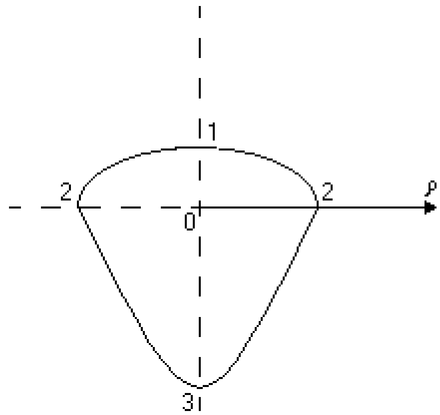
$$=\left(2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=4-\tfrac{8}{3}=\tfrac{4}{3}\left(\text{кв.од.}\right)$$

Приклад 11. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho=2-\sin\varphi$.

Розв'язання. Побудуємо в полярних координатах лінію $\rho=2-\sin\varphi$ по точках (рис. 11).

Застосуємо формулу (28). Одержимо

φ	ρ
0	2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	2
$\frac{3}{2}\pi$	3
2π	2



$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2-\sin\varphi\right)^2 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4-4\sin\varphi+\sin^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4-4\sin\varphi+\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-4\sin\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+4\cos\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\cdot 2\pi+4\cos 2\pi-\frac{1}{4}\sin 4\pi-4\cos 0+\frac{1}{4}\sin 0\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(9\pi+4-4\right)=\frac{9}{2}\pi\left(\text{кв.од.}\right)$$

Приклад 12. Обчислити довжину дуги лінії $y=\sqrt{x^3}$, якщо $x\in\left[0,1\right]$.

Розв’язання. Згідно формули (29) необхідно знати похідну функції. Знайдемо $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Тоді

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\,\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\right)^3}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right).$$

Приклад 13. Обчислити довжину однієї арки циклоїди

$$x=a\left(t-\sin t\right),\;\; y=a\left(1-\cos t\right),\quad t\in\left[0,2\pi\right].$$

Розв’язування. Довжину дуги лінії обчислимо за формулою (30). Для цього знайдемо x_t' та y_t', а також $\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2$. Одержимо

$$x_t'=a\left(1-\cos t\right),\; y_t'=a\sin t,\; \left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=a^2\left(1-\cos t\right)^2+a^2\sin^2 t=$$
$$=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=a^2\left(2-2\cos t\right)=2a^2\left(1-\cos t\right)=$$
$$=2a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}=4a^2\sin^2\frac{t}{2};$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$
$$=-2a\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4a\left(\cos\pi-\cos 0\right)=-4a\left(-1-1\right)=8a.$$

Приклад 14. Обчислити об’єми тіл обертання навколо осей Ox та Oy фігури, яка обмежена лініями $4y=x^2$ та $y=x$.

Розв’язування. Обчислимо об’єми тіл, які утворюються при обертанні фігури навколо осей. Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases}4y=x^2,\\ y=x,\end{cases}\Rightarrow\; 4x=x^2\Rightarrow x^2-4x=0,\; x\left(x-4\right)=0,\; \begin{matrix}x_1=0, & x_2=4\\ y_1=0, & y_2=4.\end{matrix}$$

Одержали дві точки з координатами $A\left(0;0\right)$ та $B\left(4;4\right)$. Зобразимо ці тіла схематично (рис. 12,13).

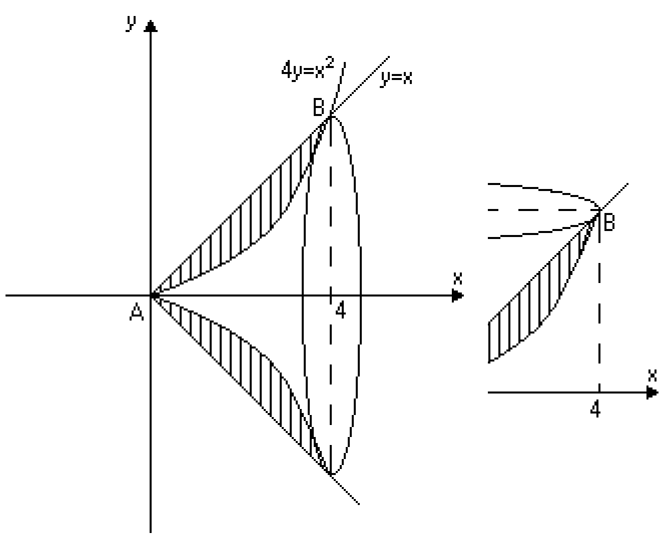


Рис. 13

1) Об’єм тіла обертання навколо осі Ox дорівнює різниці двох об’ємів тіл, які ми обчислимо за формулою (32). Одержимо

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^4 x^2dx - \pi\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \pi\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{16}\int_0^4 x^4dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}x^3\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{16}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^4 = \frac{\pi}{3}\cdot 64 - \frac{\pi}{16}\cdot\frac{4^5}{5} = \frac{64\pi}{3} - \frac{64\pi}{5} =$$

$$= \frac{64\pi(5-3)}{15} = \frac{128}{15}\pi\ (\text{куб.од.})$$

2) Аналогічно обчислюємо об’єм тіла обертання навколо осі Oy, використавши формулу (33):

$$V = V_1 - V_2 = -\pi\int_0^4 y^2dy + \pi\int_0^4 4y\,dy = -\pi\,\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^4 + 4\pi\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^4 =$$

$$= 2\pi y^2\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{3}y^3\Bigg|_0^4 = 2\pi\cdot 16 - \frac{\pi}{3}\cdot 16 = \frac{6\pi\cdot 16 - 16\pi}{3} =$$

$$= \frac{16\pi(6-1)}{3} = \frac{80}{3}\pi\,(\text{куб.од.})$$

Модульна робота № 1

(8 балів = 1бал * 4 + 2 бали * 2)

1. ***За координатами вершин піраміди ABCD знайти:***
   1) ***Кут між ребрами AB і AC;***
   2) ***площу грані ABC;***
   3) ***об’єм піраміди ABCD;***
   4) ***рівняння ребер AB і AC.***

Номер	Координати точки *A*	Координати точки *B*	Координати точки *C*	Координати точки *D*

1	(0, 2, 3)	(6, 5, 5)	(2, –4, 6)	(–3, 4, 9)
2	(2, –1, 2)	(8, 2, 4)	(4, –7, 5)	(–1, 1, 8)
3	(2, 0, –1)	(8, 3, 1)	(4, –6, 2)	(–1, 2, 5)
4	(1, 1, 1)	(7, 4, 3)	(3, –5, 4)	(–2, 3, 7)
5	(–2, 2, 1)	(4, 5, 3)	(0, –4, 4)	(–5, 4, 7)
6	(4, 0, 3)	(8, 3, 5)	(4, –6, 6)	(–1, 2, 9)
7	(–1, 1, 0)	(5, 4, 2)	(1, –5, 3)	(–4, 3, 6)
8	(3, 2, 1)	(9, 5, 3)	(5, –4, 4)	(0, 4, 7)
9	(0, 7, 1)	(4, 1, 5)	(4, 6, 3)	(3, 9, 8)
10	(5, 5, 4)	(3, 8, 4)	(3, 5, 10)	(5, 8, 2)
11	(6, 5, 5)	(–3, 4, 9)	(0, 2, 3)	(2, –4, 6)
12	(–1, 1, 8)	(2, –1, 2)	(8, 2, 4)	(2, –1, 2)
13	(–1, 2, 5)	(2, 0, –1)	(8, 3, 1)	(4, –6, 2)
14	(7, 4, 3)	(1, 1, 1)	(–2, 3, 7)	(3, –5, 4)
15	(–5, 4, 7)	(–2, 2, 1)	(4, 5, 3)	(0, –4, 4)
16	(8, 3, 5)	(4, 0, 3)	(–1, 2, 9)	(4, –6, 6)
17	(5, 4, 2)	(–1, 1, 0)	(–4, 3, 6)	(1, –5, 3)
18	(0, 4, 7)	(5, –4, 4)	(9, 5, 3)	(3, 2, 1)
19	(3, 9, 8)	(4, 6, 3)	(4, 1, 5)	(0, 7, 1)
20	(5, 8, 2)	(3, 5, 10)	(3, 8, 4)	(5, 5, 4)

2. Знайти розв’язок системи лінійних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним способом.

1. $\begin{cases} 4x+2y+3z=3 \\ 5x+y+z=4 \\ x+3y-2z=-7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x-9y-14z=6 \\ x+7y+5z=11 \\ 5x-21y-27z=-5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x+2y-z=2 \\ 13x+5y+2z=18 \\ x-3y=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x+3y-5z=0 \\ 9x+4y-7z=3 \\ 14x+6y-11z=6 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x-9y-14z=6 \\ x+7y+5z=11 \\ 5x-21y-27z=-5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+y-3z=-1 \\ 8x+3y-6z=-1 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+3y+4z=15 \\ x+y+5z=16 \\ 3x-2y+z=1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x+2y-z=2 \\ 13x+5y+2z=18 \\ x-3y=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7y-2z=-8 \\ 5x-6y+4z=20 \\ 6x+4y+3z=7 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7y-2z=-8 \\ 5x-6y+4z=20 \\ 6x+4y+3z=7 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=1, \\ x_1+3x_2+3x_3=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=2, \\ x_1+3x_2+3x_3=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2+x_3=3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 6x_1-x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2-x_3=4, \\ x_1+3x_2-3x_3=4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3=5, \\ 4x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-3x_3=5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x_1+4x_2+3x_3=6, \\ 3x_1+2x_2-x_3=6, \\ x_1+3x_2+3x_3=6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 3 \\ 5x + y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = -7 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5x - 9y - 14z = 6 \\ x + 7y + 5z = 11 \\ 5x - 21y - 27z = -5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x + 2y - z = 2 \\ 13x + 5y + 2z = 18 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 6x + 3y - 5z = 0 \\ 9x + 4y - 7z = 3 \\ 14x + 6y - 11z = 6 \end{cases}$

Модульна робота № 2

(8 балів = 1 бал * 3 + 1 бал * 4 + 1 бал)

1. Обчислити границі функцій, НЕ користуючись правилом Лопіталя.

1\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+11}{7x^3-5x^2+x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{x}$

2\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$

3\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+5x}-10$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{4x}$

4\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+x-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{3x}\right)^{5x}$

5\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{3x}\right)^{x}$

6\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-8}{3x^2-5x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{5x}\right)^{4x}$

7\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+8}{3x^2+6x-15}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+7x+2}{3x^2-2x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2X}$

8\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-4}{4x^2+3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{4x}\right)^{x}$

9\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+9x^2+2x}{3x^3-8x+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2+x-1}{6x^2-x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{2x}\right)^{3x}$

10\. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{7x}\right)^{6x}$

11. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+11}{7x^3-5x^2+x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{x}$

12. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{2x}$

13. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+5x}-10$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{4x}$

14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+x-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{3x}\right)^{5x}$

15. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{3x}\right)^{x}$

16. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-8}{3x^2-5x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{5x}\right)^{4x}$

17. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+8}{3x^2+6x-15}$ 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+7x+2}{3x^2-2x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2X}$

18. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-4}{4x^2+3x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{4x}\right)^{x}$

19. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+9x^2+2x}{3x^3-8x+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0{,}5}\dfrac{2x^2+x-1}{6x^2-x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{2x}\right)^{3x}$

20. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$ 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{7x}\right)^{6x}$

2. Знайти похідні першого порядку, використовуючи правила обчислення похідних:

1. 1) $y=\frac{7}{x^3}+\sin 3x$

2) $y=x\cdot\arccos\frac{x}{2}$

3) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

4) $\begin{cases} x=arctg(1+t)^2 \\ y=\sqrt{t^2+2t+2} \end{cases}$

2. 1) $y=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-2\cos 4x$

2) $y=x^2\sin x++2x\cos x$

3) $y=arctg\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

4) $\begin{cases} x=tg(t^2) \\ y=t^2-5 \end{cases}$

3. 1) $y=7\sqrt[4]{x}-2\ln 2x$

2) $y=\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}$

3) $y=\frac{\arccos x}{x}$

4) $\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1)^2 \end{cases}$

4. 1) $y=2x^3-5\sqrt{x}+tg2x$

2) $y=x^2e^{2x}$

3) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

4) $\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=(2+e^{-t})^3 \end{cases}$

5. 1) $y=3\sqrt{x}+2\ln 4x-4e^{2x}$

2) $y=x\cdot\arcsin 3x$

3) $y=\frac{2\cos x-\sin x}{\sin 2x+4x}$

4) $\begin{cases} x=\frac{3}{1+t^2} \\ y=arctgt \end{cases}$

6. 1) $y=3e^{2x}+\sqrt{2x}$

2) $y=arctg\,2x\cdot\ln 2x$

3) $y=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$

4) $\begin{cases} x=7+t^2 \\ y=ctg(3t^2) \end{cases}$

7. 1) $y = \sin 3x + \cos^2 x - 4$

2) $y = \cos 2x \cdot \sin 3x$

3) $y = \dfrac{\ln 2x}{tg 3x}$

4) $\begin{cases} x = \arcsin 2t \\ y = \dfrac{1}{1 - 4t^2} \end{cases}$

8. 1) $y = e^{3x} + \sqrt[3]{2x} + x^2$

2) $y = \ln 3x \cdot 2^x$

3) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{\arccos 3x}$

4) $\begin{cases} x = (t-1)^2 \\ y = \sin (t-1)^2 \end{cases}$

9. 1) $y = \ln^2 x + 2\sqrt{\cos x}$

2) $y = 3\ln 4x \cdot e^{\sqrt{x}}$

3) $y = \dfrac{\sin 4x}{\cos 8x}$

4) $\begin{cases} x = \ln(1 - t^4) \\ y = \arccos(t^2) \end{cases}$

10. 1) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 7arctgx$

2) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \sin 4x$

3) $y = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x^4}}$

4) $\begin{cases} x = \sin^2 (1 - 4t) \\ y = \cos^2 (1 - 4t) \end{cases}$

11. 1) $y = \dfrac{7}{x^3} + \sin 3x$

2) $y = x \cdot \arccos \dfrac{x}{2}$

3) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

4) $\begin{cases} x = arctg(1 + t)^2 \\ y = \sqrt{t^2 + 2t + 2} \end{cases}$

12. 1) $y = \dfrac{3}{4} x \sqrt[3]{x} - 2\cos 4x$

2) $y = x^2 \sin x + +2x \cos x$

3) $y = arctg \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

4) $\begin{cases} x = tg(t^2) \\ y = t^2 - 5 \end{cases}$

13. 1) $y = 7\sqrt[4]{x} - 2\ln 2x$

2) $y = \sqrt{x} \cdot \arcsin \sqrt{x}$

3) $y = \dfrac{\arccos x}{x}$

4) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1)^2 \end{cases}$

14. 1) $y = 2x^3 - 5\sqrt{x} + tg2x$

2) $y = x^2 e^{2x}$

3) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

4) $\begin{cases} x = 3e^{-t} \\ y = \left(2 + e^{-t}\right)^3 \end{cases}$

15. 1) $y = 3\sqrt{x} + 2\ln 4x - 4e^{2x}$

2) $y = x \cdot \arcsin 3x$

3) $y = \dfrac{2\cos x - \sin x}{\sin 2x + 4x}$

4) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{1+t^2} \\ y = arctgt \end{cases}$

16. 1) $y = 3e^{2x} + \sqrt{2x}$

2) $y = arctg\, 2x \cdot \ln 2x$

3) $y = \ln \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

4) $\begin{cases} x = 7 + t^2 \\ y = ctg\left(3t^2\right) \end{cases}$

17. 1) $y = \sin 3x + \cos^2 x - 4$

2) $y = \cos 2x \cdot \sin 3x$

3) $y = \dfrac{\ln 2x}{tg3x}$

4) $\begin{cases} x = \arcsin 2t \\ y = \dfrac{1}{1-4t^2} \end{cases}$

18. 1) $y = e^{3x} + \sqrt[3]{2x} + x^2$

2) $y = \ln 3x \cdot 2^x$

3) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{\arccos 3x}$

4) $\begin{cases} x = (t-1)^2 \\ y = \sin(t-1)^2 \end{cases}$

19. 1) $y = \ln^2 x + 2\sqrt{\cos x}$

2) $y = 3\ln 4x \cdot e^{\sqrt{x}}$

3) $y = \dfrac{\sin 4x}{\cos 8x}$

4) $\begin{cases} x = \ln\left(1 - t^4\right) \\ y = \arccos\left(t^2\right) \end{cases}$

20. 1) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + 7arctgx$

2) $y = \sqrt[3]{x} \cdot \sin 4x$

3) $y = \frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x^4}}$

4) $\begin{cases} x = \sin^2(1-4t) \\ y = \cos^2(1-4t) \end{cases}$

3. Знайти інтервали зростання і спадання функції та екстремуми.

1	$y = x^4 - 18x^2 + 81$	**11**	$y = x^4 - 2x^2 + 3$
2	$y = x^3 - 6x^2 - 15$	**12**	$y = x^3 + 3x^2 - 9x$
3	$y = x^4 - 8x^2 - 5$	**13**	$y = x^3 - 48x$
4	$y = x^2 + 2x - 3$	**14**	$y = x^3 - x^2 - 5x - 3$
5	$y = 3x^2 - 6x + 7$	**15**	$y = 4x^3 + 3x^2$
6	$y = x^2 + 8x - 12$	**16**	$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$
7	$y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$	**17**	$y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$
8	$y = x + \frac{16}{x}$	**18**	$y = 12 + 72x + 3x^2 - x^3$
9	$y = x^3 - 18x$	**19**	$y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 12$
10	$y = 3x^5 - 5x^3 + 1$	**20**	$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$

Модульна робота № 3

(8 балів = 1 бал * 3 + 1 бал + 4 бали)

1. Обчислити невизначені інтеграли.

1\. 1) $\int \frac{5x^2 dx}{5-2x^3}$ 2) $\int \frac{dx}{2+tgx}$ 3) $\int x\cos 5x dx$

2\. 1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-4}}$ 2) $\int \frac{dx}{1-\sin^2 x}$ 3) $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3} dx$

3\. 1) $\int e^{x^2+2x}(x+1)dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot tg^2 x}$ 3) $\int xe^{3x-5}dx$

4\. 1) $\int \sqrt{1-2x^3}\, x^2 dx$ 2) $\int \sin 3x \cos 5x dx$ 3) $\int (x+1)\cos 2x dx$

5\. 1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 2) $\int \sin^5 2x dx$ 3) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

6\. 1) $\int \frac{\sqrt{2+tgx}}{\cos^2 x} dx$ 2) $\int \frac{dx}{4+2\sin x}$ 3) $\int x\cos 5x dx$

7\. 1) $\int \frac{dx}{\sin^2(3-2x)}$ 2) $\int \frac{2-\sin x}{2+2\cos x} dx$ 3) $\int x\ln(x-1)dx$

8\. 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$ 2) $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$ 3) $\int (2x+1) arctgx dx$

9\. 1) $\int \frac{\cos x}{3-5\sin^2 x} dx$ 2) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$ 3) $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$

10\. 1) $\int e^{3-5x}dx$ 2) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$ 3) $\int \arcsin x dx$

11\. 1) $\int \frac{5x^2 dx}{5-2x^3}$ 2) $\int \frac{dx}{2+tgx}$ 3) $\int x\cos 5x dx$

12\. 1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3-4}}$ 2) $\int \frac{dx}{1-\sin^2 x}$ 3) $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3} dx$

13. 1) $\int e^{x^2+2x}(x+1)dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot tg^2 x}$ 3) $\int xe^{3x-5}dx$

14. 1) $\int \sqrt{1-2x^3}\,x^2dx$ 2) $\int \sin 3x \cos 5x dx$ 3) $\int (x+1)\cos 2x dx$

15. 1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 2) $\int \sin^5 2x dx$ 3) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

16. 1) $\int \frac{\sqrt{2+tgx}}{\cos^2 x}dx$ 2) $\int \frac{dx}{4+2\sin x}$ 3) $\int x\cos 5x dx$

17. 1) $\int \frac{dx}{\sin^2(3-2x)}$ 2) $\int \frac{2-\sin x}{2+2\cos x}dx$ 3) $\int x\ln(x-1)dx$

18. 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$ 2) $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$ 3) $\int (2x+1)arctgx dx$

19. 1) $\int \frac{\cos x}{3-5\sin^2 x}dx$ 2) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$ 3) $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$

20. 1) $\int e^{3-5x}dx$ 2) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$ 3) $\int \arcsin x dx$

2. Обчислити визначений інтеграл.

1. $\int_{1}^{3} x^3\sqrt{x^2-1}dx$

2. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x^4}$

3. $\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos\ln xdx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$

5. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$

6. $\int_{0}^{2\pi} \cos 5x \cos xdx$

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2xdx$

8. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+x}$

9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos xdx$

10. $\int_{-1}^{1} xarctgxdx$

11. $\int_{1}^{3} x^3\sqrt{x^2-1}dx$

12. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x^4}$

13. $\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos\ln xdx$

14. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$

15. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$

16. $\int_{0}^{2\pi} \cos 5x \cos xdx$

17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2xdx$

18. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+x}$

19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos xdx$

20. $\int_{-1}^{1} xarctgxdx$

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмежену кривими. Зробити схематичний рисунок області.

1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \quad x=0, \; y=0, \; (x \ge 0, \; y \ge 0).$
2. $y^2=4x, \quad x^2=4y.$
3. $4y=x^2, \quad y=2.$
4. $x^2+y^2 \le 9, \quad y=0 \; (y \ge 0).$
5. $x^2+4y-16=0, \; y=0.$
6. $y^2=-x+9, \quad x=0.$
7. $y=x^2, \quad y=2-x^2.$
8. $x^2+y^2+2x=0, \; y=0 \; (y \ge 0).$
9. $y=\ln x, \quad y=0, \; x=e.$
10. $y=-\sqrt{4-x^2}, \quad y=0 \; (y \le 0).$
11. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \quad x=0, \; y=0, \; (x \le 0, \; y \le 0).$
12. $y^2=4x, \quad x^2=4y.$
13. $4y=x^2, \quad y=2.$
14. $x^2+y^2 \le 9, \quad y=0 \; (y \le 0).$
15. $x^2+4y-16=0, \quad y=0.$
16. $y^2=-x+9, \quad x=0.$
17. $y=x^2, \quad y=2-x^2.$
18. $x^2+y^2+2x=0, \quad y=0 \; (y \le 0).$
19. $y=\ln x, \quad y=0, \; x=e.$
20. $y=\sqrt{4-x^2}, \quad y=0 \; (y \ge 0).$

ЛІТЕРАТУРА

1. Григоренко, К.В. Вища математика : навч. посіб. / К.В. Григоренко, С.О. Касярум, І.П. Частоколенко. – Черкаси : ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля, 2017. – 92 с.
2. Касярум, С.О. Диференціальне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / С.О. Касярум, К.В. Григоренко, І.П. Частоколенко. – Черкаси : ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля, 2022. – 50 с.
3. Касярум, С.О. Основи вищої математики та математичної статистики : навч. посіб. / С.О. Касярум, К.В. Григоренко, І.П. Частоколенко. – Черкаси : ЧІПБ ім. Героїв Чорнобиля, 2018. – 116 с.