ЗАДАЧА ДЕФАЗИФИКАЦИИ НЕЧЕТКОЙ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ АЛЬТЕРНАТИВ

УДК 518.81

ПИСКЛАКОВА Ольга Александровна
к.т.н., доцент кафедры управления и организации деятельности в сфере гражданской защиты
Национального университета гражданской защиты Украины.
Научные интересы: системный анализ, теория принятия решений, информационные технологии.
e-mail: coluchka@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

По определению В.М. Глушкова необходимыми условиями эффективности решений является их своевременность, полнота и оптимальность [1]. Перечисленные требования противоречивы и их удовлетворение связано с серьезными трудностями.

Обеспечение полноты (комплексности) решений требует как можно более полного учета внутренних и внешних факторов, влияющих на принятие решения, глубокого анализа их взаимосвязей, что ведет к росту размерности задачи принятия решений, ее многокритериальности. В свою очередь это приводит к росту неопределенности исходных данных, что обусловлено неполнотой знаний о взаимосвязи факторов и, как следствие, неточного ее описания, невозможностью или неточностью измерения некоторых факторов, случайных внешних и внутренних воздействий и т.д. Дополнительная сложность заключается в том, что неопределенности разнородны и могут быть представлены в виде случайных величин, нечетких множеств или просто интервальных величин.

Таким образом, повышение эффективности принимаемых решений связано с необходимостью решения задач многокритериальной оптимизации в условиях неопределенности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решение задачи принятия многокритериальных решений в условиях неопределенности требует реализации следующих задач:

- синтеза модели многокритериального скалярного оценивания полезности допустимых альтернативных решений;
- определения источников и вида неопределенности модели многофакторного оценивания и их формализации на основе аппарата нечетких множеств;
- вычисления фазифицированного (нечеткого) значения полезности допустимых альтернативных решений;
- дефазификации нечеткой функции полезности и определение точечной детерминированной полезности альтернатив и выбор на этой основе экстремального по эффективности решения.

В данной статье рассматривается проблема дефазификации нечеткой функции полезности, решение которой неизбежно связано с принятием некоторых эвристических допущений. Для оценки корректности этих допущений необходимо эталонное «внешнее дополнение». В качестве такого эталона в статье приняты результаты следующей детерминированной задачи.

Задано множество допустимых решений $X=\{x_i\},\ i=\overline{1,7}$. Для каждого из решений задан кортеж детерминированных точечных значений частных критериев $K(x_i)=<k_j(x_i)>,\ j=\overline{1,3}$ и соответственно кортеж весовых коэффициентов частных критериев $A =< a_j >,\ j = \overline{1,3}$. В статье использована аддитивная модель оценки полезности альтернатив вида [2]

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{3} a_j k_j(x_i)\ ; \tag{1}$$

$$0 \le a_j \le 1\ ,\ \sum_{j=1}^{3} a_j = 1\ . \tag{2}$$

Тогда экстремальное решение $x^{\circ} \in X$ определяется по формуле

$$x^{\circ} = \arg\max_{x_i \in X} P(x_i),\quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Исходные данные для расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1 –

Исходные данные для формирования «эталонного решения»

Альтернативы	Значения частных критериев			Значения весовых коэффициентов		
	k_1	k_2	k_3	a_1	a_2	a_3
x_1	0,45	0,7	0,52	0,32	0,45	0,23
x_2	0,28	0,5	0,47	0,32	0,45	0,23
x_3	0,3	0,6	0,53	0,32	0,45	0,23
x_4	0,39	0,59	0,24	0,32	0,45	0,23
x_5	0,48	0,34	0,65	0,32	0,45	0,23
x_6	0,25	0,58	0,39	0,32	0,45	0,23
x_7	0,48	0,67	0,32	0,32	0,45	0,23

Таблица 2 –

Оценки полезности альтернативных решений

Альтернатива	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$P(x)$	0,5786	0,4227	0,4879	0,4455	0,4561	0,4307	0,5287

Результаты расчетов полезности альтернатив приведены в табл. 2.

Анализ табл. 2 показывает, что экстремальной по полезности является альтернатива $x_1(P(x_1) = 0{,}5786)$, а отношение порядка на множестве X имеет вид

$$x_1 \succ x_7 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_6 \succ x_2\ . \tag{4}$$

Для конструктивного решения задачи многокритериальной оптимизации необходимо определить численные значения весовых коэффициентов a_j. Эта задача может быть решена двумя способами: методом экспертного оценивания или методом компараторной идентификации. Однако в обоих случаях можно определить не точечную, а интервальную оценку значений a_j, $j = \overline{1,n}$. Это обусловлено тем, что оба метода базируются на определении, хотя и разными способами, некоторого ограниченного множества индивидуальных, субъективных оценок и последующей их обработке путем усреднения. Таким образом, исходную информацию можно представить в виде [3]

$$a_j^{\min} \le a_j \le a_j^{\max}\ ,\ \forall j = \overline{1,n}\ , \tag{5}$$

а точечную оценку, как

$$a_j^{cp} = \frac{a_j^{\min} + a_j^{\max}}{2}\ ;\ \forall j = \overline{1,n}\ . \tag{6}$$

При этом в общем случае

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^{\min} < 1,\quad \sum_{j=1}^{n} a_j^{\max} > 1,\quad \sum_{j=1}^{n} a_j^{cp} \ne 1, \tag{7}$$

т.е., не выполняется ограничение (2).

Целью данной статьи является устранение возникающей в процессе идентификации параметров a_j, $j = \overline{1,n}$ интервальной неопределенности, т.е. детерминизация параметров модели многокритериального оценивания (1).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Один из возможных подходов к решению сформулированной задачи заключается в интерпретации интервалов (5), как нечетких множеств.

Будем полагать, что кортеж весовых коэффициентов $A = < a_j >, \ j = \overline{1,n}$ задан в виде интервалов, на которых экспертным путем определены функции принадлежности $\mu(a_j), \ j = \overline{1,m}$. При этом значения a_j^* соответствуют функции принадлежности $\mu(a_j^*) = 1$. Носителем каждой нечеткой оценки $a_j, \ \forall j = \overline{1, \ n}$, является соответствующий интервал $[a_j^{\min}, a_j^{\max}]$, а a_j^* соответствует $\mu(a_j^*) = 1$. Для простоты, но без потери общности рассматриваются функции принадлежности треугольного вида. Необходимо определить детерминированные точечные значения $a_j^Д$, при этом должно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^{m} a_j^Д = 1 . \qquad (8)$$

Если $\sum_{j=1}^{m} a_j^* = 1$, то решение задачи тривиально, т.е. $a_j^Д = a_j^*$. В противном случае, т.е. в случае если $\sum_{j=1}^{m} a_j^* \neq 1$ необходимо определить такой кортеж значений $A^Д = < a_j^Д >$ для которого:

1) удовлетворяется условие $\sum_{j=1}^{n} a_i^* = 1$;

2) минимизируется отклонение

$$\Delta\mu_{\sum a_j} = \mu(\sum_{j=1}^{n} a_j^*) - \mu(\sum_{j=1}^{n} a_j^Д) \qquad (9)$$

или с учетом, что $\mu(\sum_{j=1}^{n} a_i^*) = 1$ максимизируется $\mu(\sum_{j=1}^{n} a_i^Д)$.

Так как, по определению, значение функции принадлежности суммы нечетких чисел определяется минимальным значением μ_{a_j} на множестве слагаемых, то очевидно, что условие (9) будет выполняться при равенстве всех $\mu(a_j)$, $\forall j = \overline{1, \ n}$. Это означает, что в качестве $a_j^Д$, $\forall j = \overline{1, \ n}$, необходимо выбрать такие значения из интервала неопределенности, для которых

$$\mu(a_j^Д) = \mu(\sum_{j=1}^{n} a_j^Д = 1), \ \forall j = \overline{1,n} . \qquad (10)$$

Для треугольных функций принадлежности нетрудно получить следующую формулу

$$a_j^Д = a_j^* \pm [1 - \mu(\sum_{j=1}^{n} a_i^Д = 1)] \cdot \frac{a_j^{\max} - a_j^{\min}}{2} . \qquad (11)$$

Знак (+) соответствует, случаю, когда

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* < 1 , \qquad (12)$$

а (-) противоположному случаю. Формула достаточно хорошо аппроксимирует и нелинейные (колоколообразные, гауссовы) функции принадлежности [3].

Исходные данные для расчетов приведены в табл. 3.

Проверяем значения a_j при которых функция принадлежности $\mu(a) = 1$ на выполнение условия (2).

0,33+0,46+0,24=1.03

Таблица 3 –

Исходные данные для формирования решения в случае задания весовых коэффициентов – нечеткими числами

Альтернативы	Значения частных критериев			Значения весовых коэффициентов		
	k_1	k_2	k_3	a_1	a_2	a_3
x_1	0,45	0,7	0,52	(0,24;0,33;0,51)	(0,28;0,46;0,63)	(0,11;0,24;0,37)
x_2	0,28	0,5	0,47	(0,24;0,33;0,51)	(0,28;0,46;0,63)	(0,11;0,24;0,37)
x_3	0,3	0,6	0,53	(0,24;0,33;0,51)	(0,28;0,46;0,63)	(0,11;0,24;0,37)
x_4	0,39	0,59	0,24	(0,24;0,33;0,51)	(0,28;0,46;0,63)	(0,11;0,24;0,37)
x_5	0,48	0,34	0,65	(0,24;0,33;0,51)	(0,28;0,46;0,63)	(0,11;0,24;0,37)
x_6	0,25	0,58	0,39	(0,24;0,33;0,51)	(0,28;0,46;0,63)	(0,11;0,24;0.37)
x_7	0,48	0,67	0,32	(0,24;0,33;051)	(0,28;0,46;0,63)	(0,11;0,24;0,37)

т.е. сумма данных значений больше единицы, значит нужно промасштабировать весовые коэффициенты по формуле (6) и привести к условию (2). В результате получим следующие детерминированные значения коэффициентов a_j :

$a_1^Д = 0.320388; \quad a_2^Д = 0.4466; \quad a_3^Д = 0.23301.$

Проверяем полученные новые значения весовых коэффициентов на выполнение условия (2), условие выполняется. Определим величину отклонения детерминированных значений от эталонных по формуле:

$$\Delta a_j = a_j - a_j^Д \tag{13}$$

В результате получим следующие значения:

$\Delta a_1 = a_1^э - a_1^Д = 0.32 - 0.320388 = -0.000388;$

$\Delta a_2 = a_2^Э - a_2^Д = 0.45 - 0.4466 = 0.003;$

$\Delta a_3 = a_3^Э - a^Д = 0.23 - 0.23301 = -0.003.$

Вычисляем значения полезности альтернатив, которые представлены в таблице 4.

Таблица 4 –

Результаты расчетов полезности альтернатив для дефазифицированных весовых коэффициентов a_j

Альтернатива	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$P(x)*$	0,51184	0,27269	0,62524	0,58391	0,3777	0,54545	0,59307

Анализ табл. 4 показывает, что экстремальной по полезности является альтернатива $x_3(P(x_3) = (0.62524)$, а отношение порядка на множестве X имеет вид

$$x_3 \succ x_7 \succ x_4 \succ x_6 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_2 \text{ ,} \tag{14}$$

т.е. полностью совпадает с эталонным (4).

Найдем отклонение полученных функций полезности от «эталонных» по формуле

$$\Delta P(x) = P(x) - P(x)^*. \tag{15}$$

Значение	$\Delta P(x_1)$	$\Delta P(x_2)$	$\Delta P(x_3)$	$\Delta P(x_4)$	$\Delta P(x_5)$	$\Delta P(x_6)$	$\Delta P(x_7)$
	0,0025	-0,0021	0,0011	0,0032	-0,0032	0,0021	0,0032

Данные результаты были получены, когда значения весовых коэффициентов (функция принадлежности $\mu(a) = 1$) были сдвинуты в сторону увеличения исходных значений на 0,01, т.е. симметрично и изменение в одну сторону (случай №1).

Вычислим функцию полезности при задании весовых коэффициентов в виде нечетких чисел, только значения при которых функция принадлежности $\mu(a) = 1$ будут сдвинуты в разные стороны (весовые коэффициенты a_1, a_3 – в сторону увеличения на 0,03, а весовой коэффициент a_2 – в сторону уменьшения на 0,03) – случай №2.

Исходные данные для расчетов приведены в табл. 5.

Таблица 5 –

Исходные данные для формирования решения в случае задания весовых коэффициентов – нечеткими числами

Альтернативы	**Значения частных критериев**			**Значения весовых коэффициентов**		
	k_1	k_2	k_3	a_1	a_2	a_3
x_1	0,45	0,7	0,52	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,42;0,63)	(0,11;0,26;0,37)
x_2	0,28	0,5	0,47	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,42;0,63)	(0,11;0,26;0,37)
x_3	0,3	0,6	0,53	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,42;0,63)	(0,11;0,26;0,37)
x_4	0,39	0,59	0,24	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,42;0,63)	(0,11;0,26;0,37)
x_5	0,48	0,34	0,65	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,42;0,63)	(0,11;0,26;0,37)
x_6	0,25	0,58	0,39	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,42;0,63)	(0,11;0,26;0,37)
x_7	0,48	0,67	0,32	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,42;0,63)	(0,11;0,26;0,37)

Проверяем значения a_j при которых функция принадлежности $\mu(a)=1$ на выполнение условия (3.2).

0,35+0,42+0,26=1.03

т.е. сумма данных значений больше единицы, значит нужно промасштабировать весовые коэффициенты по формуле (11) и привести к условию (2). В результате получим следующие детерминированные значения коэффициентов a_j :

$a_1^Д = 0.339806 \qquad a_2^Д = 0.4078 \qquad a_3^Д = 0.252427$

Проверяем полученные новые значения весовых коэффициентов на выполнение условия (2), условие выполняется. Определим величину отклонения детерминированных значений от эталонных по формуле (3.13), и получаем следующие значения:

$\Delta a_1 = a_1^Э - a_1^Д = 0.32 - 0.339806 = -0.01981;$

$\Delta a_2 = a_2^Э - a_2^Д = 0.45 - 0.4078 = 0.042233;$

$\Delta a_3 = a_3^Э - a^Д = 0.23 - 0.252427 = -0.02243518.81$

Вычисляем значения полезности альтернатив, которые представлены в таблице 6.

Таблица 6 –

Результаты расчетов полезности альтернатив для дефазифицированных весовых коэффициентов a_j

Альтернатива	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$P(x)^*$	0,4784	0,2832	0,6013	0,5534	0,4059	0,5149	0,5631

Анализ таблицы 6 показывает, что экстремальной по полезности является альтернатива $x_3(P(x_3) = (0{,}6013)$, а отношение порядка на множестве X имеет вид

$$x_3 \succ x_7 \succ x_4 \succ x_6 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_2 \text{ ,} \qquad (16)$$

т.е. полностью совпадает с эталонным (4).

Найдем отклонение полученных функций полезности от «эталонных» по формуле (15)

Значение	$\Delta P(x_1)$	$\Delta P(x_2)$	$\Delta P(x_3)$	$\Delta P(x_4)$	$\Delta P(x_5)$	$\Delta P(x_6)$	$\Delta P(x_7)$
	0,036	-0,013	0,025	0,034	-0,031	0,033	0,033

Вычислим функцию полезности при задании весовых коэффициентов в виде нечетких чисел, только значения при которых функция принадлежности $\mu(a)=1$ будут сдвинуты в разные стороны (a_1 – в сторону увеличения на 0,03, a_2 – в сторону уменьшения на 0,04, a_2 – в сторону увеличения на 0,06) – случай №3.

Исходные данные для расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 7 –

Исходные данные для формирования решения в случае задания весовых коэффициентов – нечеткими числами

Альтернативы	**Значения частных критериев**			**Значения весовых коэффициентов**		
	k_1	k_2	k_3	a_1	a_2	a_3
x_1	0,45	0,7	0,52	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,41;0,63)	(0,11;0,29;0,37)
x_2	0,28	0,5	0,47	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,41;0,63)	(0,11;0,29;0,37)
x_3	0,3	0,6	0,53	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,41;0,63)	(0,11;0,29;0,37)
x_4	0,39	0,59	0,24	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,41;0,63)	(0,11;0,29;0,37)
x_5	0,48	0,34	0,65	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,41;0,63)	(0,11;0,29;0,37)
x_6	0,25	0,58	0,39	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,41;0,63)	(0,11;0,29;0,37)
x_7	0,48	0,67	0,32	(0,24;0,35;051)	(0,28;0,41;0,63)	(0,11;0,29;0,37)

Проверяем значения a_j при которых функция принадлежности $\mu(a)=1$ на выполнение условия (2).

0,35+0,42+0,26=1.05

т.е. сумма данных значений больше единицы, значит нужно промасштабировать весовые коэффициенты по формуле (11) и привести к условию (2). В результате получим следующие детерминированные значения коэффициентов a_j :

$$a_1^Д = 0.333333 \qquad a_2^Д = 0.3905 \qquad a_3^Д = 0.27619$$

Найдем отклонение полученных детерминированных весовых коэффициентов от заданных «эталонных» по формуле (13). Определим величину отклонения детерминированных значений от эталонных по формуле (3.13), и получаем следующие значения:

$$\Delta a_1 = a_1^Э - a_1^Д = 0.32 - 0.333333 = -0.013;$$

$$\Delta a_2 = a_2^Э - a_2^Д = 0.45 - 0.3905 = 0.0595;$$

$$\Delta a_3 = a_3^Э - a^Д = 0.23 - 0.27619 = -0.046$$

Проверяем полученные новые значения весовых коэффициентов на выполнение условия (2), условие выполняется, после чего, вычисляем значения полезности альтернатив, которые представлены в табл. 8.

Таблица 8 –

Результаты расчетов полезности альтернатив для дефазифицированных весовых коэффициентов a_j

Альтернатива	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$P(x)^*$	0,4678	0,301	0,6022	0,5333	0,4267	0,5076	0,5429

Анализ табл. 8 показывает, что экстремальной по полезности является альтернатива $x_3 (P(x_3) = (0{,}6022)$, а отношение порядка на множестве X имеет вид

$$x_3 \succ x_7 \succ x_4 \succ x_6 \succ x_1 \succ x_5 \succ x_2 \quad , \qquad (17)$$

т.е., полностью соответствует «эталонному» (4).

Найдем отклонение полученных функций полезности от «эталонных» по формуле (15)

Значение	$\Delta P(x_1)$	$\Delta P(x_2)$	$\Delta P(x_3)$	$\Delta P(x_4)$	$\Delta P(x_5)$	$\Delta P(x_6)$	$\Delta P(x_7)$
	0,0466	-0,0304	0,02408	0,0538	-0,0522	0,04	0,0534

Для анализа результатов вычисления полезности при заданных нечетких весовых коэффициентов и детерминированных частных критериев приведем все результаты в табл. 9.

Таблица 9 –

Результаты вычисления функции полезности при заданных нечетких весовых коэффициентов и детерминированных частных критериев

$P(x)$	**Эталонное решение**	**Случай №1**	**Случай №2**	**Случай№3**
$P(x_1)$	0,5144	0,5118	0,4784	0,4678
$P(x_2)$	0,2706	0,2727	0,2832	0,301
$P(x_3)$	0,6263	0,6252	0,6013	0,6022
$P(x_4)$	0,5871	0,5839	0,5534	0,5333
$P(x_5)$	0,3745	0,3777	0,4059	0,4267
$P(x_6)$	0,5476	0,5455	0,5149	0,5076
$P(x_7)$	0,5963	0,5931	0,5631	0,5429

Если сравнивать полученные результаты, то можно сказать, что порядок предпочтений функций полезности остается неизменным.

Если сравнивать полученные оптимальные решения по альтернативе x_3 , то можно сказать, что наилучшим решением будет «эталонное», затем идет случай №1, потом случай №3, и только потом случай №2.

ВЫВОДЫ

В статье рассмотрен метод, который позволяет устранить возникающую в процессе идентификации параметров a_j , $j=\overline{1,n}$ интервальную неопределенность, т.е. детерминизировать параметры модели многокритериального оценивания, найдено решение задачи многокритериальной оптимизации в условиях задания частных критериев нечетких чисел, а весовых коэффициентов – в виде дефазифицированных чисел, а также рассмотрен случай вычисления функции полезности для нечетких частных критериев $k_j(x)$ и весовых коэффициентов $a_j^Д$, заданных в виде нечетких чисел и предложена модель принятия решений в нечетких условиях.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Glushkov V.M. Vvedenie v teoriju samosovershenstvujushhihsja sistem /V.M. Glushkov. – K.: Izd-vo KVIRTU. – 109 s.
2. Ovezgel'dyev A.O. Sintez i identifikacija modelej mnogofaktornogo ocenivanija i optimizacii /A.O. Ovezgel'dyev, Je.G. Petrov, K.Je. Petrov. – K.: Nauk. dumka, 2002. – 164 s.
3. Petrov Je.G. Determinizacija nechetkih parametrov modeli mnogokriterial'nogo ocenivanija /Je.G. Petrov, O.A. Pisklakova, N.A. Brynza //Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehnicheskogo universiteta. – 2008. – №2 (31). – S.71-75.

Рецензент: *д.т.н., проф. Петров Э.Г., Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.*