Розділ 5. Ряди.

5.1. Основні поняття числових рядів.

Ряди є основним обчислювальним засобом. Навіть у калькуляторах при обчисленні значень функцій використовуються ряди. Ряди застосовуються для наближених обчислень.

Нехай задано послідовність чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$.

Означення. Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ називається *рядом*, а самі числа $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ називаються *членами ряду*. Вираз u_n як функція від n називається *загальним членом ряду*.

Означення. Скінченні суми

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1, \\ &S_2 = u_1 + u_2, \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \end{aligned} \qquad , \tag{5.1}$$

називаються *частинними сумами ряду*.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *збіжним*, якщо існує границя частинних сум ряду

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n , \tag{5.2}$$

Означення. Границя частинних сум (5.2) називається *сумою ряду*. Якщо границя (5.2) не існує, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *розбіжним*.

Дослідимо збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

● Знайдемо значення частинної суми ряду:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Шукаємо границю частинних сум ряду: $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

Границя існує, отже, розглядуваний ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Розглянемо ряд геометричної прогресії

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots, \qquad (5.3)$$

I. Якщо $q \neq 1$, можемо знайти частинну суму ряду

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

II. Якщо $|q| < 1$, $q^n \to 0$ при $n \to +\infty$ і при цьому існує границя частинних сум ряду

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q},$$

ряд (5.3) збігається.

III. Якщо $|q| > 1$, границя частинних сум не існує і ряд (5.3) розбігається.

IV. Якщо $q = 1$, маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Його частинні суми

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Границя частинних сум не існує, отже, при $q = 1$ ряд (5.3) розбігається.

V. Якщо $q = -1$, маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$$

і частинні суми

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \ldots\ S_n = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n - \text{непарне}, \\ 0, \text{ якщо } n - \text{парне}. \end{cases}$$

Границя частинних сум S_n ряду не існує, і ряд (5.3) розбігається.

5.2. Необхідні і достатні умови збіжності числових рядів.

Теорема 1 *(Критерій Коші). Для того, щоб ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігався, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon>0$ *знайшлось таке* $N=N(\varepsilon)$, *що при будь-якому* $p>0$, $n \geq N$ *виконується нерівність:*

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} \right| < \varepsilon. \qquad (5.4)$$

Іншими словами, збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ рівносильна тому, що сума будь-якої кількості членів ряду, наступних за членом ряду з достатньо великим номером, може бути скільки завгодно малою.

Означення. Ряд

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+k} + \ldots \qquad (5.5)$$

називається *залишком ряду* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Очевидна теорема.

Теорема 2. *Для того, щоб збігався ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, *необхідно і достатньо, щоб збігався залишок ряду.*

Доведення. Розглянемо при фіксованому значенні n частинну суму ряду (5.5).

$$\sigma_p = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+p} = S_{n+p} - S_n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_p = \lim_{n\to+\infty} \left(S_{n+p} - S_n\right).$$

Існування границі $\lim\limits_{p\to+\infty} \sigma_p$ рівносильне існуванню границі $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$, що доводить правильність теореми.

З теореми 2 випливає, що збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не зміниться, якщо відкинути скінченну кількість перших членів.

З критерію Коші випливає, що збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ рівносильна тому, щоб усі частинні суми залишку ряду (5.5) були скільки завгодно малі, якщо номер n достатньо великий.

Теорема 3 (*Необхідна умова збіжності*). *Для того щоб ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігався, необхідно, щоб загальний член ряду прямував до нуля, тобто щоб виконувалась умова*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{5.6}$$

Доведення. Нехай ряд збігається, тобто існує границя частинних сум ряду

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

З рівності $u_n = S_n - S_{n-1}$ випливає, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

що і доводить правильність теореми.

Умова (5.6) не є достатньою для збіжності ряду, що можна бачити на прикладі так званого гармонічного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{5.7}$$

Дослідити збіжність ряду (5.7).

● Оцінимо знизу деякі частинні суми:

$$S_1 = 1,\ \ S_2 = 1 + \frac{1}{2},\ \ S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}.$$

$$S_8 = S_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{3}{2},\ \ldots$$

Аналогічним способом отримаємо оцінку

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}\ \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Оскільки частинні суми не обмежені згори, то не існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ і гармонічний ряд розбігається. Хоча для гармонічного ряду (5.7) виконана необхідна умова збіжності (5.6):

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$.

● Шукаємо границю загального члена ряду

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1000n+1} = \frac{1}{1000}.$$

Оскільки загальний член ряду не прямує до нуля, то розглядуваний ряд розбігається.

Розглянемо знову ряд геометричної прогресії (5.3): $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0)$.

● При $|q| > 1$ ряд розбігається, бо загальний член ряду $u_n = aq^n$ не прямує до нуля.

5.3. Властивості дій з рядами.

Теорема 4. *Задано числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{5.8}$$

Якщо помножити члени ряду на один і той самий числовий множник $a \neq 0$ і дістати ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots, \tag{5.9}$$

то із збіжності ряду (5.8) *випливає збіжність ряду* (5.9)*, і навпаки, зі збіжності ряду* (5.9) *випливає збіжність ряду* (5.3)*. При цьому для сум ряду справджується рівність:*

$$a\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} au_n, \quad a = \text{const}.$$

Отже, дії множення на число і підсумовування переставні.

Теорема 5. *Якщо два ряди збігаються, то їх можна почленно додавати і віднімати, тобто*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n). \tag{5.10}$$

Теорема 6. *Збіжність числового ряду не зміниться, якщо для нього приписати або відкинути скінченну кількість членів.*

Розглянемо збіжний ряд з нульовими членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-n) = (1-1) + (2-2) + (3-3) + \ldots + (n-n) + \ldots$$

● Розкривши дужки, дістанемо збіжний ряд

$$1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \ldots + n - n + \ldots,$$

загальний член якого не прямує до нуля.

5.4. Ознаки збіжності числових рядів.

5.4.1. Необхідна і достатня умова збіжності ряду з додатними членами.

Розглядається ряд з додатними членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad u_n > 0 \quad (u = 1, 2, \ldots, n, \ldots). \qquad (5.11)$$

Частинні суми ряду монотонно зростають, бо

$$S_2 - S_1 = u_2 > 0, \; S_3 - S_2 = u_3 > 0, \ldots, S_n - S_{n-1} = u_n > 0, \ldots$$

Звідси випливає правильність такої теореми.

Теорема 1. *Для того, щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмежені зверху.*

Доведення. Якщо ряд (5.11) збігається, то існує границя послідовності частинних сум. Відомо, що збіжна послідовність обмежена.

Нехай послідовність частинних сум ряду обмежена зверху. За теоремою Вейєрштрасса монотонно зростаюча обмежена послідовність має границю. Отже, послідовність частинних сум ряду має границю і ряд збігається.

5.4.2. Ознаки порівняння.

Розглядаємо два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (5.12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (5.13)$$

Теорема 2. *Нехай з деякого номера n виконується нерівність* $u_n \le v_n$*. Тоді із збіжності ряду* (5.13) *випливає збіжність ряду* (5.12), *а із розбіжності ряду* (5.12) *випливає розбіжність ряду* (5.13).

Доведення. Оскільки відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність, то можна вважати, що нерівність $u_n \le v_n$ виконується для всіх членів рядів. Якщо збігається ряд (5.13), то всі його частинні суми обмежені зверху. З огляду на це всі частинні суми ряду (5.12) теж обмежені зверху і, отже, ряд (5.12) збігається.

Якщо ряд (5.12) розбігається, то ряд (5.13) не може збігатися, бо за доведеним вище із збіжності ряду (5.13) випливає збіжність ряду (5.12). Теорему доведено.

При виконанні нерівності $u_n \le v_n$ кажуть, що ряд (5.13) *мажорує* ряд (5.12).

Дослідимо збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \qquad (5.14)$$

- Візьмемо збіжний ряд порівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \qquad (5.15)$$

Оскільки виконуються нерівності

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n},\ \ldots,$$

то за теоремою 2 ряд (5.14) збігається.

На практиці найбільш зручна *ознака порівняння у граничній формі*.

Теорема 3. *Нехай для членів рядів* (5.12), (5.13) *існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 < l < \infty)$.

Тоді обидва ряди (5.12), (5.13) *збігаються або розбігаються одночасно. Якщо* $l = 0$*, то зі збіжності ряду* (5.12) *випливає збіжність ряду* (5.13)*. Якщо* $l = +\infty$*, то з розбіжності ряду* (5.13) *випливає розбіжність ряду* (5.12).

Доведення. Нехай $0 < l < \infty$. Для довільного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < l$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon)$, такий що при $n > N$ виконуватимуться нерівності:

$$0 < l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon.$$

З нерівностей $(l - \varepsilon)v_n < u_n < (l + \varepsilon)v_n$ і збіжності ряду (5.12) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)v_n = (l-\varepsilon)\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. З розбіжності ряду (5.12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)v_n = (l+\varepsilon)\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, що остаточно доводить правильність теореми.

Порівняємо збіжність рядів (5.14), (5.15), що мають загальні члени $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

- Шукаємо границю відношення загальних членів

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2} = 1.$$

Згідно з теоремою 3 обидва ряди (5.14), (5.15) збігаються або розбігаються одночасно. Оскільки ряд (5.15) збігається, то й ряд (5.14) збігається.

Дослідимо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ порівнюючи з розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

- Оскільки існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}} = 1,$ то досліджуваний ряд також розбігається.

5.4.3. Ознака Даламбера.

Теорема 4. *Якщо для ряду з додатними членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{5.16}$$

починаючи з деякого номера n $\geq N$ *виконується нерівність*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1, \tag{5.17}$$

то ряд (5.16) збігається. Якщо починаючи з деякого номера $n \geq N$ *виконується нерівність*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \tag{5.18}$$

то ряд розбігається.

Доведення. З нерівності (5.17) випливає, що справджуються нерівності

$$u_{N+1} \leq q u_N, \;\; u_{N+2} \leq q u_{N+1} \leq q^2 u_N, \;\; u_{N+3} \leq q u_{N+2} \leq q^3 u_N, \ldots, u_{N+p} \leq q^p u_N, \ldots$$

Отже, члени ряду

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots + u_{N+p} + \ldots \tag{5.19}$$

мажоруються членами збіжного ряду

$$u_N + q u_N + q^2 u_N + \ldots + q^p u_n + \ldots, \;\; |q| < 1.$$

Звідси випливає збіжність ряду (5.19) і, отже, збіжність ряду (5.16).

Якщо виконується нерівність (5.18), то справджується нерівність

$$u_{N+1} \geq u_N, \;\; u_{N+2} \geq u_{N+1} \geq u_N, \;\; \ldots, \;\; u_{N+p} \geq u_{N+p-1} \geq u_N, \;\; \ldots$$

Оскільки загальний член ряду не прямує до нуля, то ряд (5.16) розбігається. Теорему доведено.

Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots, \;\; u_n = \frac{1}{n!}.$$

- Дамо оцінку відношення членів ряду при $n \geq 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \frac{\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n(n+1)}}{\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

З теореми 4 випливає збіжність ряду, який розглядається.

Теорема 5. *(Ознака Даламбера у граничній формі).*

Якщо для ряду (5.16) з додатними членами існує границя $q = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$*, то при q < 1 ряд збігається, при q > 1 ряд розбігається, при q = 1 ряд може збігатися і розбігатися.*

Доведення. Якщо $q < 1$, то при достатньо великих значеннях n буде виконуватись нерівність $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q_1 < 1$ $(q < q_1)$ і, отже, з огляду на теорему 4 ряд (5.16) збігається.

При $q > 1$ достатньо великих значеннях і буде виконуватися нерівність $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ і, отже, ряд (5.16) буде розбіжним.

При $q = 1$ ряд (5.16) може збігатися або розбігатися.

Розглянемо чисельний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\frac{4^2}{2^4}+...+\frac{n^2}{2^n}+...$$

- Знайдемо границю відношення членів ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\,2^n}{2^{n+1}\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}<1.$$

З теореми 5 випливає збіжність ряду.

Дослідимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{na^n}=\frac{2}{1\cdot a}+\frac{2^2}{2a^2}+\frac{2^3}{3a^3}+...+\frac{2^n}{na^n}+...,\ \ u_n=\frac{2^n}{na^n},$$

де a – параметр (a > 0).

- Знаходимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n\cdot a^n}{(n+1)a^{n+1}\cdot 2^n}=\frac{2}{a}.$$

Отже, при a < 2 ряд розбігається, а при a < 2 ряд збігається.

Дослідимо за ознакою Даламбера розбіжний гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

- Для першого ряду знаходимо $q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1.$

Для другого ряду маємо $q=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(u+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}=1.$

Отже, при q = 1 ряди можуть розбігатися або збігатися.

5.4.4. Радикальна ознака збіжності Коші.

Теорема 6. *Якщо для ряду з додатними членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n+... \qquad (5.20)$$

починаючи з деякого номера n ≥ N виконується нерівність $\sqrt[n]{u_n}\le q<1$,

то ряд збігається. Якщо починаючи з деякого номера n ≥ N виконується нерівність $\sqrt[n]{u_n}\ge 1$ *,то ряд розбігається.*

Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(3+(-1)^n)^{-n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^4}+...+\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}+...$

● Оскільки виконується нерівність

$$\sqrt[n]{(3+(-1)^n)^{-n}} \le \frac{1}{3+(-1)^n} \le \frac{1}{2},$$

то ряд, що досліджується, збігається.

***Теорема** 7 (Радикальна ознака Коші у граничній формі). Якщо для ряду (5.20) з додатними членами існує границя* $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$, *то при q < 1 ряд збігається, при q > 1 ряд розбігається, а при q = 1 ряди можуть збігатися або розбігатися.*

Дослідимо збіжність ряду з параметром a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{a}{1}\right)+\left(1+\frac{a}{2}\right)^{2^2}+\left(1+\frac{4}{3}\right)^{3^2}+\ldots+\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n^2}+\ldots$$

● Знаходимо границю

$$q = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n} = e^a.$$

При $a > 0$ ряд розбігається, при $a < 0$ ряд збігається.

Дослідимо за допомогою радикальної ознаки збіжність розбіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

● Знаходимо границі

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{n}} = e^0 = 1 \text{ і } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Отже, при $q = 1$ ряд може бути розбіжним або збіжним.

Зауваження. Значення границі q в ознаці Даламбера збігається зі значенням границі q в радикальній ознаці Коші. При $q = 1$ доцільно застосувати наведену далі інтегральну ознаку Коші.

5.4.5. Інтегральна ознака збіжності Коші.

Інтегральна ознака збіжності заснована на порівнянні ряду з невласним інтегралом.

Нехай для ряду з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

вдалося знайти неперервну, монотонно спадну при $x \ge 1$ функцію $y = f(x)$ таку, що $u_n = f(n)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) (див. рис.).

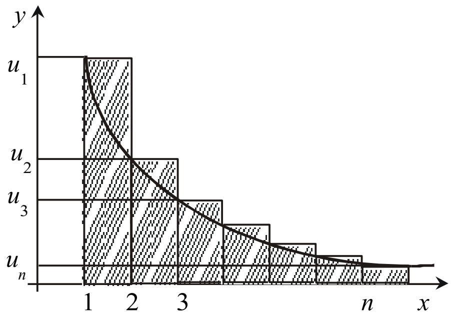


Рис. 5.1

Теорема 8. *Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і монотонно спадає при $x \ge 1$, то невласний інтеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *і ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *збігаються або розбігаються одночасно.*

Дослідимо збіжність гармонійного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

● Оскільки $u_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$, то можемо скористатися функцією $f(x) = \frac{1}{x}$.

Це неперервна, монотонно спадна при $x \ge 1$ функція. Отже, збіжність гармонійного ряду рівносильна збіжності невласного інтеграла

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln|x| \Big|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b \to +\infty} \ln|b| = +\infty.$$

Оскільки невласний інтеграл розбіжний, то ряд також розбіжний.

Дослідимо збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... + \frac{1}{n^s} + ... \quad (s > 0). \tag{5.21}$$

● Використаємо функцію $y = \frac{1}{x^s}$, яка при $x \ge 1$ неперервна і монотонно спадає. Тому збіжність ряду рівносильна збіжності невласного інтеграла

$$I_s = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} & \text{при } s > 1 \\ \infty & \text{при } s \le 1. \end{cases}$$

Отже, ряд (5.21) збігається при $s > 1$ і розбігається при $s \le 1$.

Наведемо окремі випадки ряду (5.21).

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$$

розбігається, бо $s = \frac{1}{2} < 1$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$$

збігається, бо $s = 2 > 1$.

5.5. Знакозмінні числові ряди.

5.5.1. Знакопочергові ряди. Ознака збіжності Лейбніца.

Означення. Ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots, \tag{5.22}$$

де $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), називається ***знакопочерговим*** рядом.

Лейбніц указав достатню умову збіжності ряду (5.22).

Теорема 1 *(Ознака збіжності Лейбніца)****.*** *Нехай у знакопочерговому ряді* (5.22) *послідовність a_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) монотонно спадає. Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$ *ряд* (5.22) *збігається і його сума не перевищує a_1.*

Дослідимо збіжність знакопочергового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

● Усі умови теореми 1 виконані, і тому ряд збігається.

5.5.2. Абсолютна й умовна збіжність.

Розглянемо довільний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{5.23}$$

Означення. Ряд (5.23) називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{5.24}$$

Збіжний ряд (5.23) називається ***умовно збіжним***, якщо ряд (5.24) розбіжний.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ є умовно збіжним, бо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний.

● Очевидно, що із збіжності ряду (5.24) випливає збіжність ряду (5.23), бо члени ряду (5.23) можуть мати різні знаки.

Теорема 2. *Абсолютно збіжний ряд збігається.*

Теорема 3. *Якщо для знакопочергового ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

існують границі

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|, \ \ q = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}\,,$$

то при $q < 1$ ряд абсолютно збіжний, а при $q > 1$ — розбіжний.

Дослідимо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}+...$

● Знаходимо границю

$$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}}\right|=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, ряд, що розглядається, збігається абсолютно.

Раніше відмічалося, що в довільному ряді не можна переставляти члени ряду. Наведемо без доведення такі твердження.

Теорема 4. *Якщо ряд збігається абсолютно, то за будь-якої перестановки членів ряд буде збігатися і сума його не змінюватиметься.*

Теорема 5 *(Теорема Рімана). Якщо ряд збігається умовно і s — будь-яке наперед задане число, то завжди можна переставити члени ряду так, щоб сума отриманого ряду дорівнювала s.*

Дамо пояснення до теореми Рімана. Умовна збіжність ряду виконується завдяки тому, що додатні і від’ємні члени взаємно знищуються. Якщо скласти ряд лише із додатних членів і ряд лише із від’ємних членів, то ці ряди розбігаються. Отже, можна почергово обирати лише додатні або від’ємні числа так, щоб значення частинних сум було як можна ближче до значення s. При цьому сума ряду дорівнюватиме s.

Розглянемо ряд Лейбніца: $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+...,\quad \frac{1}{2}<S<1.$

●Переставимо члени ряду так, щоб після додатного члена стояли два від’ємні.

При цьому дістанемо ряд

$$S_1=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+...=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+...=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+...\right)=\frac{1}{2}S.$$

За такого переставлення членів ряду сума ряду зменшилась удвічі.

5.6. Функціональні ряди.

5.6.1. Поняття функціонального ряду.

Означення. Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{5.25}$$

де членами ряду $u_n(x)$ є функції від аргументу x, називається *функціональним рядом.* При $x=x_0$ ряд (5.25) перетворюється на числовий:

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots \tag{5.26}$$

Якщо ряд (5.26) збігається (розбігається), то кажуть, що при $x=x_0$збігається (розбігається) функціональний ряд (5.25).

Означення. Усі значення аргументу *x*, при яких функціональний ряд збіжний, називаються *областю збіжності функціонального ряду.*

В області збіжності існує границя часткових сум функціонального ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x),$$

де функція $S(x)$ – сума ряду.

Ряд $r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$ називається *залишком ряду.*

В області збіжності функціонального ряду виконується формула $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$, де $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Означення. Ряд (5.25) збіжний для всіх *x* із області *X*, називається *рівномірно збіжним* у цій області, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий незалежний від *x* номер *N*, що при *n>N* виконується одночасно для всіх $x \in X$ така нерівність:

$$|\, S_n(x) - S(x) \,| < \varepsilon.$$

Ознака Вейєрштрасса. Якщо ряд, складений із абсолютних величин членів функціонального ряду, для всіх $x \in X$ мажорується одним і тим самим збіжним числовим рядом, то функціональний ряд буде *рівномірно збіжним* для $x \in X$.

: Дослідити характер збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

● Оскільки $u_n = \frac{1}{x^2 + n^2} = \left|\frac{1}{x^2 + n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, тобто члени даного функціонального ряду, для будь-якого *x,* мажоруються членами збіжного числового ряду Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, то за ознакою Вейєрштрасса даний ряд буде рівномірно збіжним для $x \in (-\infty; +\infty)$.

5.6.2. Властивості рівномірно збіжних рядів.

1. Сума рівномірно збіжного ряду неперервних функцій є неперервна функція.

2. Якщо ряд (5.25) рівномірно збіжний на інтервалі (*a*; *b*) та існують границі $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = A_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$, то виконується рівність

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n\to 1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_n(x).$$

3. Якщо члени збіжного ряду (5.25) мають неперервні похідні для $x \in (a; b)$ та ряд складений із похідних членів ряду (5.25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x)$ рівномірно збіжний для $x \in (a; b)$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in (a; b).$$

4. Якщо члени ряду (5.25) неперервні, а сам ряд рівномірно збіжний для $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

У загальному випадку, при дослідженні на збіжність функціонального ряду використовується та сама методика, що і для знакозмінного ряду.

Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}=\frac{\sqrt{1}}{x-2}+\frac{\sqrt{2}}{(x-2)^2}+\frac{\sqrt{3}}{(x-2)^3}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}+\ldots$$

● Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$. Цей ряд буде знакододатний. Отже, маємо право застосовувати до нього ознаку Даламбера, при цьому x вважатимемо деяким параметром:

$$|u_n(x)|=\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^2};\ |u_{n+1}(x)|=\frac{\sqrt{n}+1}{|x-2|^{n+1}};\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Даламбера ряд буде збігатись, якщо

$$\frac{1}{|x-2|}<1\Leftrightarrow|x-2|>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2>1\\x-2<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<1\end{array}\right.,$$

і розбігатись, якщо $\frac{1}{|x-2|}>1\Leftrightarrow|x-2|<1\Leftrightarrow\begin{cases}x-2<1\\x-2>-1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3$.

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках x=1 і x=3. При x=1 маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, а при x=3 – ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбігаються, бо, очевидно, для них не виконується необхідна умова збіжності. Таким чином, область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ буде $x\in(-\infty;\,1)\cup(3;\,+\infty)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

5.7. Степеневі ряди.

Означення. Функціональний ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (5.27)$$

називається *степеневим рядом*, його загальний член $u_n(x)=a_nx^n$; числа $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Розглядають і більш загальний вигляд степеневого ряду

$$a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\ldots+a_n(x-c)^n+\ldots \qquad (5.28)$$

Якщо в (5.28) візьмемо x–c=y, то дістанемо ряд типу (5.27), тому властивості ряду (5.27) неважко перефразувати і для ряду (5.28).

Теорема 6 *(Абеля). Якщо степеневий ряд (5.27):*

1) збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається для будь-якого x, що задовольняє нерівність $|x|<|x_0|$;

2) якщо ряд (5.27) розбігається при x=x₁, то він розбігається при всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$.

Ілюстрацію до теореми Абеля наведено на рис.

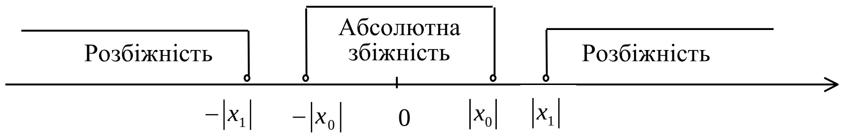


Рис. 5.2

5.7.1. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду.

Як наслідок із теореми Абеля для степеневого ряду (5.27) існує інтервал збіжності з центром у точці $x = 0$ (рис.).

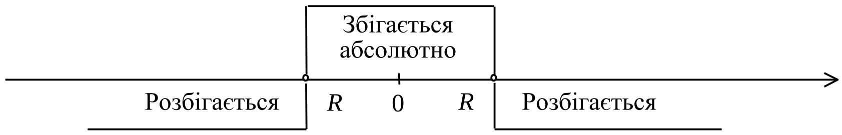


Рис. 5.3

Означення. *Інтервалом збіжності степеневого ряду* називається такий інтервал, у всіх внутрішніх точках якого ряд збігається абсолютно, а для всіх точок $|x| > R$ ряд є розбіжним; при цьому число $R > 0$ називається радіусом збіжності степеневого ряду.

Для узагальненого степеневого ряду (5.27) інтервал збіжності $(c - R;\ \ c + R)$ має центр симетрії в точці $x = c$.

! ***Зауваження.*** На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x=-R$, $x = R$ ряд може як збігатись, так і розбігатись. Це питання потребує спеціального дослідження в кожному випадку.

Виведемо формулу для знаходження радіуса збіжності ряду (5.27). Для цього побудуємо ряд із абсолютних величин членів ряду (5.27):

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \ldots + |a_n| \cdot |x|^n + \ldots \qquad (5.29)$$

Нехай існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$. Тоді, застосовуючи ознаку Даламбера до ряду (5.29), дістаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|x|^{n+1}}{|a_n|\cdot|x|^n} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot l .$$

При $|x|\cdot l < 1$ ряд (5.29) збігається, а отже, ряд (3) збігається абсолютно; при $|x|\cdot l > 1$ ряд (5.29) розбігається. Розбіжність ряду, установлена за ознакою Даламбера, означає, що для цього ряду не виконується необхідна умова збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)| \neq 0$, а тому не виконується необхідна умова збіжності і для ряду (5.27) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) \neq 0$, і ряд (5.27) при $|x|\cdot l > 1$ буде також розбіжним. Отже, нерівність $|x|\cdot l<1$ визначає інтервал збіжності ряду (5.27): $|x|\cdot l<1 \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{l} \Leftrightarrow -\frac{1}{l}<x<\frac{1}{l}$. Радіус збіжності визначається за формулою

$$R=\frac{1}{l}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{5.30}$$

Аналогічно, використовуючи радикальну ознаку Коші, можна дістати формулу для радіуса збіжності, степеневого ряду у вигляді: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Знайти інтервал і радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n+7^n}$.

● Порівнюючи загальні члени ряду (5.27) і досліджуваного ряду, знайдемо коефіцієнт степеневого ряду $a_n: u_n(x)=\frac{2^n x^n}{3^n+7^n}=a_n x^n \Rightarrow a_n=\frac{2^n}{3^n+7^n}$. За формулою радіуса збіжності (5.30) маємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(3^{n+1}+7^{n+1}\right)}{2^{n+1}\left(3^n+7^n\right)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=\frac{7}{2}.$$

Тоді інтервал збіжності буде $\left(-\frac{7}{2};\ \frac{7}{2}\right)$.

Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}=\frac{x^3}{1\cdot 2}+\frac{x^6}{2\cdot 4}+\frac{x^9}{3\cdot 8}+\ldots+\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

● Загальний член ряду можна записати так $u_n(x)=\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}$. Цей ряд містить не всі степені x, коефіцієнти a_{3n-2}, a_{3n-1} (n = 1, 2, 3, ...) дорівнюють нулю. Скористатися формулами для радіуса збіжності в даному випадку неможливо. Отже, будемо досліджувати ряд за загальною методикою дослідження функціональних рядів. Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду $|u_n(x)|=\left|\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}\right|=\frac{|x|^{3n}}{n\cdot 2^n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{3n}}{n\cdot 2^n}$, до якого застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n|x|^{3(n+1)}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}|x|^{3n}}=\frac{|x|^3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x|^3}{2}.$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду (на цьому інтервалі ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}$ збігатиметься абсолютно): $\frac{|x|^3}{2}<1 \Leftrightarrow |x|^3<2 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{2}$. Радіус збіжності буде: $R=\sqrt[3]{2}$.

Проведемо дослідження збіжності ряду на кінцях інтервалу збіжності:

При $x=-\sqrt[3]{2}$: $u_n\left(-\sqrt[3]{2}\right)=\frac{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^{3n}}{n\cdot 2^n}=\frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Одержали ряд Лейбніца, який умовно збігається.

При $x=\sqrt[3]{2}$, $u_n\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^n}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Маємо гармонічний ряд, який, як відомо, розбігається. Таким чином, $x\in[-\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{2})$ буде областю збіжності ряду.

5.7.2. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів.

Степеневий ряд $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ буде рівномірно збіжним на будь-якому відрізку із його інтервалу збіжності $(-R;\ R)$, а тому на такому відрізку його можна почленно диференціювати та інтегрувати, при цьому мають місце рівності:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+n\cdot a_nx^{n-1}+\ldots;$$

$$\int_0^x f(x)dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

Знайти суму ряду $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

- Позначимо суму ряду через $f(x)$ і знайдемо похідну $f'(x)$: $f'(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$. Одержали ряд геометричної прогресії зі знаменником $q=x$ і першим членом $u_1=1$. Цей ряд буде збіжним при $|x|<1$, а його сума має вигляд: $S(x)=\frac{1}{1-x}=f'(x)$. Розв'язуючи це диференціальне рівняння, дістаємо $f(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x}=\left(-\ln|1-x|\right)\Big|_0^x=-\ln(1-x),\ |x|<1$. Зауважимо, що формула $-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ справджується на інтервалі збіжності $x\in(-1;\ 1)$.

5.7.3. Зображення функцій степеневими рядами. Ряди Тейлора і Маклорена.

Формули, що подають функцію $f(x)$ у вигляді степеневих рядів, мають вигляд:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \tag{5.31}$$

$$f(x)=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}+\ldots \tag{5.32}$$

Кажуть, що ряд Маклорена (5.31) дає розвинення функції в ряд поблизу точки $x=0$, а ряд Тейлора (5.32) – поблизу точки $x=c$. Справді, як далі буде показано, чим ближче x до точки розвинення функції $f(x)$ у ряд, тим меншою кількістю членів ряду буде досягнуто більшої точності при обчисленні $f(x)$.

Теорема *(достатня умова розвинення функції в ряд Маклорена)****.*** *Якщо на проміжку* $[-R;\ R]$ *похідні будь-якого порядку для функції f(x) обмежені одним і тим самим числом*

$\left| f^{(n)}(x) \right| \le M$, *то на інтервалі* $(-R;\ R)$ *функція f(x) може бути розвинена в ряд Маклорена). Іншими словами, ряд Маклорена для f(x) у кожній точці із* $x \in (-R;\ R)$ *збігається абсолютно.*

Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x) = 2^x$.

- Знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = 2^x, & f(0) = 2^0 = 1, \\ f'(x) = 2^x \ln 2, & f'(0) = \ln 2, \\ f''(x) = 2^x (\ln 2)^2, & f''(0) = (\ln 2)^2, \\ \ldots & \ldots \\ f^n(x) = 2^x (\ln 2)^n, & f^n(0) = \ln^n 2, \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Оскільки $0 < \ln 2 < 1$, то для будь-якого фіксованого x маємо $\left| f^{(n)}(x) \right| = 2^x \ln^n 2 < 2^x$, тобто достатня умова розвинення функції $f(x) = 2^x$ у ряд Маклорена виконується і ряд Маклорена для неї $2^x = 1 + x \ln 2 + \dfrac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n \ln^n 2}{n!} + \ldots$ буде абсолютно збіжним для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Зауваження. Залишок ряду Маклорена $r_n(x)$ можна замінити одним залишковим членом $\bar{r}_n(x)$, який у формі Лагранжа такий:

$$\bar{r}_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), -R < \xi < R. \qquad (5.33)$$

Тоді ряд Маклорена (5.31) набирає вигляду формули Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \bar{r}_n(x). \qquad (5.34)$$

Теорема. *Для того щоб функцію f(x) можна було розвинути в ряд Маклорена на інтервалі* $x \in (-R;\ R)$, *необхідно і достатньо, щоб на цьому інтервалі* $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{r}_n(x) = 0$.

5.7.4. Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій.

$$\left[\begin{array}{l} e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots \\ \sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{(-1)^n} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \\ \cos = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{array} \right.$$

Область збіжності: $(-\infty; +\infty)$.

$\left[(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!} x + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \dfrac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n + \ldots \right.$ Інтервал збіжності: (–1; 1).

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$ Область збіжності (–1; 1).

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$ Область збіжності [–1; 1].

Використовуючи ці формули, можна у ряді випадків записати розвинення функції в ряд Маклорена без обчислення коефіцієнтів цього ряду (без обчислення похідних функцій).

Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sin^2 x$ і знайти область збіжності ряду.

- Перетворимо функцію так: $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Скористаємось формулою розвинення в ряд Маклорена функції $\cos x$, тоді дістанемо:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+\ldots=\frac{2}{2!}x-\frac{2^3}{4!}x^4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Область збіжності новоутвореного ряду для $f(x)=\sin^2 x$ буде така ж, як і для $\cos x$, тобто $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

5.8. Застосування рядів для наближених обчислень.

Розвинення функцій у степеневі ряди використовується для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, наближеного розв'язування рівнянь і т. ін. При цьому в ряді Маклорена чи Тейлора для даної функції залишають кілька перших членів (як правило, не більше трьох), а решту відкидають. Похибка при наближених обчисленнях являє собою суму відкинутих членів ряду – залишок ряду. Для оцінки похибки, якщо ряд знакосталий, залишок ряду порівнюють із рядом нескінченно спадної геометричної прогресії. Якщо ряд знакопочерговий, то за наслідком теореми Лейбніца похибка за абсолютною величиною не перевищує першого із відкинутих членів ряду.

Обчислити з точністю до 0,001: $\sqrt[3]{9}$.

- Зробимо такі перетворення: $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$. Скористаємось рядом Маклорена для функції $(1+x)^m$, узявши $x=\frac{1}{8}$, $m=\frac{1}{3}$. Тоді дістанемо:

$$\sqrt[3]{9}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=2(1+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3+\ldots)=2+\frac{1}{12}-\frac{2}{3^2\cdot 64}+\frac{10}{3^4\cdot 512}-\ldots$$

За винятком першого члена дістали знакопочерговий ряд, він буде збіжним, бо $\frac{1}{8}\in(-1;1)$. Похибка r_n за абсолютною величиною буде меншою від першого із відкинутих членів. Послідовно обчислюємо: $|r_1| < \frac{1}{12}$; $|r_2| < \frac{1}{288}$; $|r_3| = \frac{2\cdot 5}{81\cdot 512} < 0{,}001$. Отже, щоб обчислити $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 0,001, достатньо залишити три перші члени: $\sqrt[3]{9} \approx 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{9\cdot 64} = 2\frac{23}{288} \approx 2{,}0798 \approx 2{,}080$.

Розв’язати рівняння $\cos x = \frac{x}{2}$, обмежуючись двома членами ряду Маклорена для $\cos x$.

● Візьмемо $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, тоді дістанемо квадратне рівняння $1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, яке має розв’язки $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

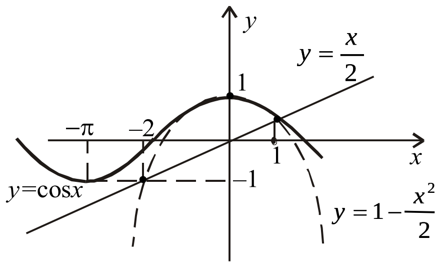


Рис. 5.4

Із рис. 5.2 видно, що $x_2 = -2$ не буде розв’язком початкового рівняння.

Отже, рівняння має єдиний розв’язок, наближене значення якого $x = 1$.

Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \left|\frac{0}{0}\right|$.

● Замінимо e^x і $\sin x$ відповідними рядами Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^3}{3!} + 2\cdot\frac{x^4}{4!} + \ldots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!} + 2\cdot\frac{2x}{4!} + \ldots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots} = 2.$$

Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,001.

● Оцінимо похибку наближеної рівності

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Ця похибка визначиться залишком ряду

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots = \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \ldots\right).$$

Якщо $\left|\dfrac{x}{n+1}\right|<1$, то $\dfrac{x}{n+1}+\left(\dfrac{x}{n+1}\right)^2+\ldots=\dfrac{\dfrac{x}{n+1}}{1-\dfrac{x}{n+1}}=\dfrac{x}{n+1-x}$ за формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $u_1=\dfrac{x}{n+1}$ і знаменником $q=\dfrac{x}{n+1}$. Отже, маємо таку оцінку залишку ряду

$$r_n(x)<\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{x}{n+1-x}.$$

Отже: $$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}+\frac{\frac{1}{4}}{2!}+\ldots+\frac{\frac{1}{2^n}}{n!}\quad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

5.9. Ряд Фур'є.

На практиці часто доводиться мати справу з періодичними процесами, що описуються кусково-гладкими функціями. Такі функції подають не степеневими, а тригонометричними рядами.

Означення. Функція $f(x)$ називається такою, що задовольняє *умови Діріхле* на відрізку $[a;b]$, якщо на цьому відрізку виконуються такі умови:

1. $f(x)$ має скінченне число розривів першого роду;
2. $f(x)$ має скінченне число екстремумів;
3. $f(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ для $x\in(a;b)$.

Теорема. *Функція $f(x)$, що задовольняє умови Діріхле на відрізку $[-l;\,l]$ на інтервалі $(-l;\,l)$, може бути визначена тригонометричним рядом Фур'є:*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\qquad (5.35)$$

де коефіцієнти Фур'є a_n та b_n обчислюються за такими формулами:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ – парна, то в (5.35) $b_n=0$, а якщо $f(x)$ – непарна, то $a_n=0$.

Теорема *(ознака Діріхле)**.** Якщо $f(x)$ – періодична функція з періодом 2π задовольняє умови Діріхле на відрізку $[-\pi;\,\pi]$, то її ряд Фур'є збіжний, а його сума в точці x_0 дорівнює:*

1. *$f(x_0)$, якщо $f(x)$ – неперервна в точці x_0;*
2. *$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, якщо x_0 — точка розриву для $f(x)$.*

Розкласти функцію $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ у ряд Фур'є на проміжку (0; 2π).

● Ця функція на відрізку $[0;\,2\pi]$ задовольняє умови Діріхле, а тому ряд Фур'є на інтервалі (0; 2π) для неї існує. Обчислимо коефіцієнти Фур'є, узявши $l=\pi$ в (5.35):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n}.$$

Отже, $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ x\in(0;\,2\pi).$

Термінологічний словник ключових понять.

Функціональний ряд: $u_n(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$

Степеневий ряд: $a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\ldots+a_n(x-c)^n+\ldots$

Інтервал збіжності $(-R;\,R)$, такий що $x\in(-R;\,R)$ – ряд збіжний абсолютно і $x\in(-\infty;-R)\cup(R;+\infty)$ – ряд розбіжний.

Ряд Тейлора $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$

Ряд Маклорена: $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$

Ряд Фур'є: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$

де $a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{e}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

Приклади розв'язування задач.

1. Знайти область збіжності функціонального ряду: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}.$

● Загальний член ряду $u_n(x)=\dfrac{1}{1+x^{2n}}$. Маємо право застосувати ознаку Даламбера, бо $u_n>0$:

$$u_{n+1}(x)=\frac{1}{1+x^{2n+2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}\left(x^{-2n}+1\right)}{x^{2n}\left(x^{-2n}+x^2\right)}=A.$$

Розглянемо можливі випадки.

1) Якщо $|x|<1$, тоді не виконується необхідна умова збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1 \neq 0.$

2) Якщо $|x|=1$, дістаємо ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots$, який також є розбіжним, бо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$

3) Якщо $|x|>1$, необхідна умова збіжності ряду виконується $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 0$, а за ознакою Даламбера $A=\frac{1}{x^2}<1$. Отже, ряд збіжний. Таким чином, область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$ визначається нерівністю $|x|>1$.

2. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

● Маємо, що $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = a_n x^n \Rightarrow a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = (-1)^n \frac{1}{n+1}$.

Знаходимо радіус збіжності степеневого ряду: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n \cdot (-1)^n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. Отже, інтервал збіжності ряду (–1; 1). Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. Підставляючи значення $x=1$ в даний ряд, дістаємо: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$. Цей знакопочерговий ряд умовно збіжний, бо є рядом Лейбніца. Якщо $x=-1$, дістаємо: $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Це розбіжний гармонічний ряд.

Таким чином, область збіжності ряду визначається нерівністю $-1<x\leq 1$.

3. Дослідити збіжність ряду:

$$(x-2)+\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(x-2)^3}{3^2}+\ldots+\frac{(x-2)^n}{n^2}+\ldots$$

● Візьмемо $x-2=y$ і одержимо ряд $y+\frac{y^2}{2^2}+\frac{y^3}{3^2}+\ldots+\frac{y^n}{n^2}+\ldots$ Знайдемо радіус збіжності цього ряду, беручи до уваги, що $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, тоді $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу (–1; 1).

1) Якщо $y=1$, дістаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Це ряд Діріхле з показником $p=2>1$. Він збіжний.

2) Якщо $y=-1$, дістаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, який є абсолютно збіжним. Тоді область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}y^n$ така: $-1\le y\le 1$.

Замінюючи змінну y на змінну x, дістаємо шукану область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\cdot(x-2)^n : -1\le x-2\le 1$ або $1\le x\le 3$.

4. Розкласти функцію $f(x)=x^3+5x^2-4x+1$ в ряд за степенями $x-2$.

● Маємо $f(x)=x^3+5x^2-4x+1,\ f(2)=21;$

$$f'(x)=3x^2+10x-4,\ f''(2)=28;$$
$$f''(x)=6x+10,\ f''(2)=22;$$
$$f'''(x)=6,\ f'''(2)=6;$$
$$f^{(4)}(x)=0,\ f^{(4)}(2)=0.$$

Похідні вище третього порядку дорівнюють нулеві. Ряд Тейлора для заданої функції має вигляд

$$f(x)=21+\frac{28}{1!}(x-2)+\frac{22}{2!}(x-2)^2+\frac{6}{3!}(x-2)^3=$$
$$=21+28(x-2)+11(x-2)^2+(x-2)^3.$$

5. Обчислити $1+2\cdot 0{,}3+3\cdot(0{,}3)^2+4\cdot(0{,}3)^3+\ldots$

● Зіставимо із заданим числовим рядом степеневий ряд $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+n\cdot x^{n-1}+\ldots$ Очевидно, що цей ряд збігається, якщо $|\,x\,|<1$.

Розглянемо ряд геометричної прогресії при $|x|<1$. Маємо $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$.

Продиференціюємо цей ряд

$$\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+\ldots\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+n\cdot x^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Тоді, узявши $x=0{,}3$, дістанемо:

$$1+2\cdot 0{,}3+3\cdot(0{,}3)^2+\ldots+n\cdot(0{,}3)^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-0{,}3)^2}=\frac{100}{49}.$$

6. Обчислити $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt.$

● Розклавши в ряд функції e^x і беручи $x=-t^2$, дістаємо: $e^{-t^2}=1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}+\ldots$ Цей степеневий ряд має нескінченний радіус збіжності. Почленно інтегруючи ряд, маємо:

$$I=\int_0^1 e^{-t^2}dt=\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{t^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\cdot\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75600}+\ldots$$

Для обчислення I візьмемо перші сім членів ряду, допускаючи похибку, яка за абсолютною величиною менша від модуля восьмого члена, тобто менша за $\frac{1}{75600}<1{,}4\cdot10^{-5}<10^{-4}$. Проводячи обчислення суми перших семи членів, знайдемо, що $I\approx0{,}7468$.

7. Розкласти в ряд Фур'є функцію:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } -\pi<x<0;\\ x, & \text{при } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

● Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi xdx=\frac{x^2}{2\pi}\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx=\frac{x\sin(nx)}{\pi n}\Bigg|_0^\pi-\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi\sin(nx)dx=\frac{\cos(\pi n)-1}{n^2\pi}=\begin{cases}0 & \text{при } n=2k;\\ -\dfrac{2}{(2k-1)^2\pi} & \text{при } n=2k-1,\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx=-\frac{x\cos(nx)}{\pi n}\Bigg|_0^\pi-\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi\cos(nx)dx=\frac{1}{n}=-\frac{\cos(\pi n)}{n}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Отже, розклад функції має вигляд:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{2}{9\pi}\cos3x+\frac{\sin3x}{3}-\frac{\sin4x}{4}-\ldots$$
$$x\in(-\pi;\pi).$$

Теми рефератів.

1. Ознаки Абеля та Діріхле рівномірної збіжності функціональних рядів.
2. Повторні та подвійні ряди.
3. Нескінченні добутки.
4. Формула Стірлінга.
5. Біноміальний ряд.
6. Перетворення рядів.
7. Підсумовування розбіжних рядів.
8. Асимптотичні ряди.
9. Комплексний ряд Фур'є.
10. Інтеграл Фур'є.

Вправи для самостійного розв'язування.

Дослідити збіжність числових рядів.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n-1)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n}}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n-2)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n-3)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{4n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3}}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (n-4)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{4n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^2}}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n (n+3)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{2n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^3}}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n (n+4)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^4}}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n (n-5)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-5}{4n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n}}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11^n (n+5)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{5n} \right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n^5}}$.

Розвинути функцію $y = f(x)$ в ряд Маклорена і знайти радіус збіжності одержаного ряду.

1. $f(x) = e^{-2x}$. 2. $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$. 3. $f(x) = e^{\frac{x}{5}}$.

4. $f(x) = \sin 2x$. 5. $f(x) = \sin \frac{x}{3}$. 6. $f(x) = \cos 3x$.

7. $f(x) = \cos \frac{x}{4}$. 8. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. 9. $f(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$.

10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Знайти область збіжності функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} x^n$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+3} x^n$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+4} x^n$.   6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+4} x^n$.   7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+5} x^n$.   8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n+5} x^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n+6} x^n$.   10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n+6} x^n$.

Розвинути підінтегральну функцію в ряд і обчислити з точністю до $0,001$ визначений інтеграл.

1. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$.   2. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}$.   3. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.   4. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{\left(1+x^3\right)^5}}$.

5. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^3}}$.   6. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[5]{\left(1+x^3\right)^2}}$.   7. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[6]{1+x^3}}$.   8. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[6]{1+x^5}}$.

9. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[7]{1+x^3}}$.   10. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[7]{1+x^4}}$.

Розділ 6. Диференціальні рівняння.

6.1. Основні поняття диференціальних рівнянь.

6.1.1. Попередній аналіз задач, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні означення.

Розв'язування різних геометричних, фізичних та інженерних задач часто приводять до рівнянь, які пов'язують незалежні змінні, що характеризують ту чи іншу задачу, з будь-якою функцією цих змінних і похідними цієї функції різних порядків.

У якості прикладу можна розглянути простий випадок рівноприскореного руху матеріальної точки.

Відомо, що переміщення матеріальної точки при рівноприскореному русі є функцією часу і виражається формулою:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

В свою чергу, прискорення *a* є похідною по часу *t* від швидкості *V*, яка також є похідною по часу *t* від переміщення *S*. Тобто

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тоді отримуємо: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t)\cdot t}{2}$ – рівняння пов'язує функцію *f(t)* з незалежною змінною *t* і похідною другого порядку функції *f(t)*.

Означення. *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, що пов'язує незалежні змінні, їх функції і похідні (або диференціали) цієї функції.

Означення. Якщо диференціальне рівняння має одну незалежну змінну, то воно називається *звичайним диференціальним рівнянням*, якщо ж незалежних змінних дві або більше, то таке диференціальне рівняння називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*.

Означення. Найвищий порядок похідних, що входять у рівняння, називається *порядком диференціального рівняння.*

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ – звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку. У загальному вигляді записується: $F(x, y, y') = 0$.

- $x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ – звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку. У загальному вигляді записується: $F(x, y, y', y'') = 0$.

$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ – диференціальне рівняння в частинних похідних 1-го порядку.

Означення. *Загальним розв’язком* диференціального рівняння називається така диференційована функція $y = \varphi(x, C)$, яка при підстановці у початкове рівняння замість невідомої функції перетворює рівняння у тотожність.

6.1.2. Властивості загального розв'язку.

1) Так як стала C – довільна величина, то, взагалі кажучи, диференціальне рівняння має нескінченну кількість розв'язків.

2) При будь-яких початкових умовах $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$ існує таке значення $C=C_0$, при якому розв’язком диференціального рівняння є функція $y=\varphi(x, C_0)$.

Означення. Розв'язок виду $y=\varphi(x, C_0)$ називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння.

Означення. *Задачею Коші* (Огюстен Луї Коші (1789–1857) – французький математик) називається знаходження будь-якого частинного розв'язку диференціального рівняння виду $y=\varphi(x, C_0)$, що задовольняє початковим умовам $y(x_0)=y_0$.

Теорема Коші *(теорема про існування та єдиність розв’язку диференціального рівняння 1-го порядку). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області D площини XOY і має в цій області неперервну частинну похідну $y' = f(x, y)$, то яка б не була точка (x_0, y_0) в області D, існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, визначений в деякому інтервалі, що містить точку x_0, і приймає при $x=x_0$ значення $\varphi(x_0)=y_0$, тобто існує єдиний розв'язок диференціального рівняння.*

Означення. *Інтегралом (розв’язком)* диференціального рівняння називається будь-яке рівняння, що не містить похідних, для якого дане диференціальне рівняння є наслідком.

Знайти загальний розв'язок ДР: $xy' + y = 0$.

● Загальний розв'язок ДР шукається за допомогою інтегрування лівої і правої частини рівняння, яке попередньо перетворене наступним чином:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Тепер інтегруємо:
$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ – це загальний розв'язок початкового ДР.

Припустимо, задані деякі початкові умови: x_0=1; y_0=2, тоді маємо

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При підстановці отриманого значення сталої у загальний розв'язок отримаємо частинний розв'язок при заданих початкових умовах (розв'язок задачі Коші).

$$y = \frac{2}{x}.$$

Означення. *Інтегральною кривою* називається графік $y=\varphi(x)$розв'язку ДР на площині *XOY*.

Означення. *Особливим розв'язком* ДР називається такий розв'язок, в усіх точках якого умова єдиності Коші не виконується, тобто в околі деякої точки *(x, y)* існує не менше двох інтегральних кривих.

Особливі розв'язки не залежать від сталої С.

Особливі розв'язки не можна отримати із загального розв'язку ні при яких значеннях сталої *C*. Якщо побудувати сімейство інтегральних кривих ДР, то особливий розв'язок буде зображуватися лінією, яка у кожній своїй точці дотикається хоча б до однієї інтегральної кривої.

Відмітимо, що не кожне ДР має особливі розв'язки..

Знайти загальний розв'язок ДР: $y' + y = 0$. Знайти особливий розв'язок (якщо він є).

- $\dfrac{dy}{dx} = -y \qquad \dfrac{dy}{y} = -dx \qquad \int \dfrac{dy}{y} = -\int dx \quad \ln y = -x + C \quad y = e^{-x} \cdot e^{C} \qquad y = C_1 \cdot e^{-x}$

Дане ДР має також особливий розв’язок y = 0. Цей розв'язок неможливо отримати із загального, однак при підстановці у початкове рівняння отримаємо тотожність.

6.1.3. Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Як слідує з означення, звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6.1}$$

де x – незалежна змінна, $y(x)$ – невідома функція. У формі, що дозволена відносно похідної, рівняння 1-го порядку записується так:

$$y' = f(x, y). \tag{6.2}$$

Якщо користуватися іншим позначенням похідної, то можна записати (6.2), як

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (6.3)$$

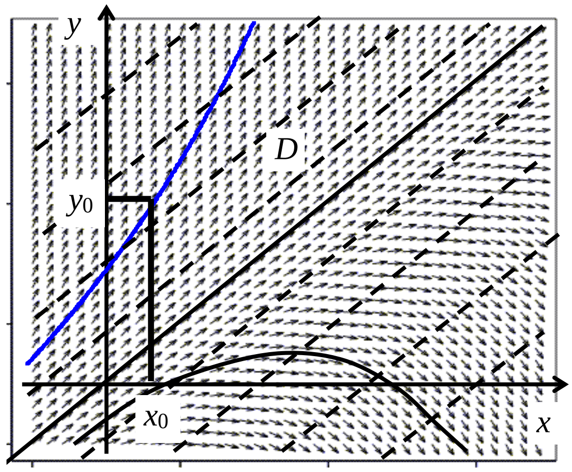
Загальний розв'язок рівняння при $n = 1$ має вигляд: $\Phi(x, y, C) = 0$ або $y = \varphi(x, C)$.

6.1.4. Геометричний зміст диференціального рівняння 1-го порядку.

Рівняння (6.2) у кожній точці (x, y) області D, у якій задана функція $f(x, y)$, визначає $y'(x)$ – кутовий коефіцієнт дотичної до розв'язку, що проходить через точку (x, y), тобто напрямок, по якому проходить розв'язок через цю точку. Кажуть, що рівняння (6.2) задає в D поле напрямків. Графік будь-якого розв'язку диференціального рівняння (*інтегральна крива*) в будь-якій її точці дотикається цього поля, тобто проходить в напрямку, що визначається полем.

Інтегрування ДР геометрично означає знаходження кривих, у яких напрямок дотичної у кожній точці співпадає з напрямком поля.

На рисунку справа зображено поле напрямків, що визначається рівнянням $y' = y - x + 1$, в три інтегральні криві (три частинні розв'язки) цього рівняння. Розв'язок можна провести через будь-яку точку області D; єдиний розв'язок можна виділити, якщо задати точку, через яку проходить інтегральна крива: $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

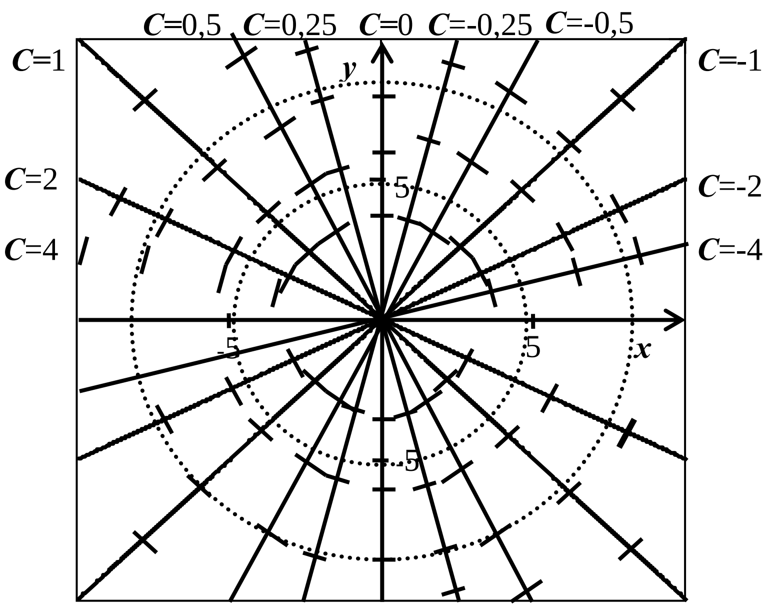


Для зображення поля напрямків, що задається диференціальним рівнянням, розглядають лінії рівня функції $f(x, y)$, тобто геометричні місця точок, у яких дотичні до інтегральних кривих зберігають сталий напрямок. Такі лінії називаються *ізоклінами*. За допомогою ізоклін можна наближено зобразити інтегральні криві.

Для прикладу побудуємо ізокліни рівняння $y' = -\dfrac{x}{y}$. Перебираємо різні значення сталої C, будуємо лінії рівня функції $f(x, y) = -\dfrac{x}{y}$, що відповідають цим значенням C (тобто прямі $-\dfrac{x}{y} = C$), і на цих лініях ставим рисочки у напрямку, що визначається значенням C ($\operatorname{tg}\alpha = C$, де α – кут між рисочкою і додатнім напрямком осі Ox): $C = 0 \Rightarrow x = 0$ – вісь Oy;

$C = 1 \Rightarrow -\dfrac{x}{y} = 1 \Rightarrow y = -x$;

$C = -1 \Rightarrow -\dfrac{x}{y} = -1 \Rightarrow y = x$;



$C = \pm 2 \Rightarrow -\dfrac{x}{y} = \pm 2 \Rightarrow y = \mp \dfrac{x}{2}$ і т.д.

Інформації про напрямок інтегральних кривих, що отримана з рисунка, достатньо, щоб зробити якісний висновок про їх поведінку: криві повинні огинати початок координат. Це можуть бути кола або спіралі.

6.2. Найпростіші диференціальні рівняння 1-го порядку.

6.2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними.

І. Рівняння з відокремленими змінними. Так називаються рівняння виду:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0. \tag{6.4}$$

Нехай $y(x)$ – розв’язок цього рівняння. Інтегруючи цю тотожність, отримаємо: $\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$ – загальний розв'язок цього рівняння.

Розв'язати задачу Коші $\begin{cases} 2(x-1)dx + 3y^2 dy = 0; \\ y(2) = 1. \end{cases}$

● Початкове рівняння – з відокремленими змінними, інтегруючи його, отримаємо:

$$\int 2(x-1)dx + \int 3y^2 dy = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^3 = C.$$

Співвідношення $(x–1)^2 + y^3 = C$ – загальний розв'язок рівняння.

Для того, щоб знайти частинний розв'язок, що задовольняє початковим умовам, потрібно підставити у загальний розв'язок дані значення x_0 і y_0, і знайти значення сталої C :

$$(2–1)^2 + 1^3 = 2 \Rightarrow C = 2.$$

Таким чином, розв'язок: $(x–1)^2 + y^3 = 2$.

ІІ. Рівняння з відокремлюваними змінними.

Так називаються рівняння виду:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{6.5}$$

або

$$f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0 \tag{6.6}$$

Ці рівняння легко зводяться до рівнянь з відокремленими змінними:

Записуємо рівняння (6.5) у формі $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$, потім ділимо на $g(y)$ і		Рівняння (6.6) ділимо на $f_2(x)\, g_1(y)$: $\dfrac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \dfrac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = 0$.

множимо на *dx*: $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.		
Ці рівняння – з відокремленими змінними. Інтегруючи, отримаємо загальний розв’язок:		
$\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$.		$\displaystyle\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \int \frac{g_2(y)dy}{g_1(y)} = C$.
В обох випадках можлива втрата розв'язків: ділення на функцію може призвести до рівняння, яке нееквівалентне даному.		

Знайти розв'язок задачі Коші:

$$(xy^2 - x)dx = (x^2 y - y)dy;$$

$$y\big|_{x=1} = 5.$$

● Розв’язуємо рівняння:

$$x(y^2 - 1)dx = y(x^2 - 1)dy \quad \Rightarrow \quad \frac{ydy}{y^2 - 1} = \frac{xdx}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{ydy}{y^2 - 1} = \int \frac{xdx}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + \frac{1}{2}\ln|C|$$

Далі, $\ln|y^2 - 1| = \ln|C(x^2 - 1)| \quad \Rightarrow \quad y^2 - 1 = C(x^2 - 1)$. Загальний розв'язок рівняння: $y^2 = C(x^2 - 1) + 1$.

III. Рівняння з однорідною правою частиною.

Так називаються рівняння із спеціальним видом залежності функції $f(x, y)$ від своїх аргументів:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6.7}$$

Це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними відносно нової невідомої функції $u(x)$ заміною $\dfrac{y(x)}{x} = u(x)$, або $y(x) = x \cdot u(x)$. Підставляючи в (6.7) $y = x\,u$, $y' = u + xu'$, отримаємо $u + xu' = f(u), x\dfrac{du}{dx} = f(u) - u,$ (це рівняння з відокремлюваними змінними), $\dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}, \displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$ – загальний розв'язок рівняння відносно змінних *x*, *u*.

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

● $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + u'x, \quad u + u'x = u + \dfrac{1}{u}, \quad x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{u}, \quad udu = \dfrac{dx}{x},$

$$\int udu = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{C}{2}, \quad u^2 = 2\ln|x| + C,$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + C, \quad y^2 = x^2\left(C + \ln x^2\right)$$

– загальний розв'язок рівняння.

$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$

● Тут коефіцієнти при диференціалах – однорідні функції другого степеня, тобто рівняння повинно приводитись до виду (6.4). Розв’язуємо рівняння відносно похідної: $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2}$, ділимо чисельник і знаменник правої частини на x^2: $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$ – це рівняння з однорідною правою частиною:

$$u = \frac{y}{x}, \qquad y = ux, \qquad y' = u + u'x, \quad u + u'x = 2u - u^2,$$

$$x\frac{du}{dx} = u - u^2, \quad \frac{du}{u - u^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u(1-u)} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{(1-u)+u}{u(1-u)}du = \int \frac{dx}{x}, \qquad \ln|u| - \ln|1-u| = \ln|x| + \ln|C|,$$

$$\frac{u}{u-1} = Cx, \qquad \frac{y/x}{y/x-1} = Cx, \qquad \frac{y}{y-x} = Cx.$$

Це загальний розв'язок рівняння.

6.2.2. Лінійні рівняння.

Означення. ДР 1-го порядку називається *лінійним*, якщо невідома функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ входять у рівняння в першому степені:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{6.8}$$

Тут $p(x)$, $q(x)$ – неперервні функції.

Для розв'язку рівняння (6.8) представимо $y(x)$ у вигляді добутку двох нових невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$: $y(x)=u(x)\ v(x)$. Тоді $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. І рівняння приводиться до виду $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$, або $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$.

Це рівняння розв’язуємо у два етапи: спочатку знаходимо функцію $v(x)$ як частинний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними $v' + p(x)v = 0$; потім знаходимо $u(x)$ з рівняння $u'v = q(x)$.

Отже,

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}$$ Тепер рівняння для $u(x)$ запишеться як $e^{-\int p(x)dx} \cdot u'(x) = q(x) \Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$. Загальний розв'язок рівняння (6.8)

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}, \ y(0) = 1.$

- $y = uv,\ y' = u'v + uv',\quad u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \dfrac{1}{\cos x},\qquad u'v + u\left(v' - v \operatorname{tg} x\right) = \dfrac{1}{\cos x},$
  $v' - v \operatorname{tg} x = 0,\quad \dfrac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v,$

Тепер для $u(x)$ отримаємо: $\dfrac{u'}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}$, $u(x) = x + C$, і загальний розв'язок рівняння $y(x) = \dfrac{x+C}{\cos x}$.

Для знаходження частинного розв’язку, що відповідає початковим умовам задачі Коші, підставимо у загальний розв’язок $x = 0,\qquad y = 1 : 1 = \dfrac{0+C}{\cos 0}\qquad \Rightarrow \qquad C = 1$.

Розв'язок задачі: $y(x) = \dfrac{x+1}{\cos x}$.

6.3. Однорідні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Означення. Функція *f(x, y)* називається *однорідною n-го виміру* відносно своїх аргументів *x* і *y*, якщо для будь-якого значення параметра*t* (крім нуля) виконується тотожність:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Чи є однорідною функція $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

- $f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$.

Таким чином, функція *f(x, y)* є однорідною 3-го порядку.

Означення. Диференціальне рівняння виду $y' = f(x, y)$ називається *однорідним*, якщо його права частина *f(x, y)* є однорідна функція нульового виміру відносно своїх аргументів.

Будь-яке рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ є однорідним, якщо функції *P(x, y)* і *Q(x, y)* – однорідні функції однакового виміру.

Розв’язок будь-якого однорідного рівняння ґрунтується на приведенні цього рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Розглянемо однорідне рівняння $y' = f(x, y)$.

Так як функція *f(x, y)* – однорідна нульового виміру, то можна записати:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Так як параметр *t* – довільний, покладемо, що $t = \dfrac{1}{x}$. Отримаємо:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Права частина отриманої рівності залежить фактично тільки від одного аргумента $u = \dfrac{y}{x}$, тобто

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Отже, початкове диференціальне рівняння можна записати у вигляді:

$$y' = \varphi(u).$$

Заміняємо $y = ux,\; y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким чином отримали рівняння з відокремлюваними змінними відносно невідомої функції u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далі, замінивши допоміжну функцію u на її вираз через x і y і, знайшовши інтеграли, отримаємо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

Розв'язати рівняння: $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

● Введемо допоміжну функцію u:

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Відмітимо, що введена нами функція u завжди додатня, так як у противному випадку втрачає зміст початкове ДР, що містить $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Підставляємо у початкове рівняння:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Відокремлюємо змінні: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x}$.

Інтегруючи, отримаємо: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходячи від допоміжної функції назад до функції, отримаємо загальний розв'язок:

6.4. Лінійні рівняння.

Означення. Диференціальне рівняння називається *лінійним* відносно невідомої функції і її похідної, якщо воно може бути записане у вигляді:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{6.9}$$

при цьому, якщо права частина *Q(x)* рівна нулю, то таке рівняння називається *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням, якщо ж права частина *Q(x)* не рівна нулю, то таке рівняння називається *лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням.

P(x) і *Q(x)* – функції, неперервні на деякому проміжку $a<x<b$.

Для розв’язування (6.9) представимо $y(x)$ у вигляді добутку двох нових невідомих функцій $u(x)$ и $v(x)$: $y(x) = u(x)\,v(x)$. Тоді $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, і рівняння зводиться до виду: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ або $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Це рівняння розв'язуємо у два етапи: спочатку знаходимо функцію $v(x)$ як частинний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними $v' + p(x)v = 0$; потім знаходимо $u(x)$ з рівняння $u'v = q(x)$. Отже

$$\frac{dv}{dx}+p(x)v=0\Rightarrow\frac{dv}{v}=-p(x)dx\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx\Rightarrow\ln|v|=-\int p(x)dx\Rightarrow v=e^{-\int p(x)dx}.$$

Тепер рівняння для $u(x)$ запишеться як $e^{-\int p(x)dx}\cdot u'(x)=q(x)\Rightarrow u'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}\Rightarrow$
$\Rightarrow u(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$.

Загальний розв'язок (6.9): $\quad y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$.

$y'-\operatorname{tg}x\cdot y=\dfrac{1}{\cos x}$, $y(0)=1$.

●

$y=uv,\ y'=u'v+uv',\ u'v+uv'-\operatorname{tg}x\cdot uv=\dfrac{1}{\cos x},\ u'v+u(v'-v\operatorname{tg}x)=\dfrac{1}{\cos x},\ v'-v\operatorname{tg}x=0,\ \dfrac{dv}{dx}=\operatorname{tg}x\cdot v,$

$\displaystyle\int\frac{dv}{v}=\int\frac{\sin x dx}{\cos x},\ \ln|v|=-\ln|\cos x|,\ v=\frac{1}{\cos x}$. Тепер для $u(x)$ отримаємо:

$\dfrac{u'}{\cos x}=\dfrac{1}{\cos x},\ u(x)=x+C$,

и загальний розв'язок рівняння $y(x)=\dfrac{x+C}{\cos x}$. Для знаходження частинного розв'язку, що відповідає початковим умовам задачі Коші, підставимо у загальний розв'язок $x=0,\ y=1:1=\dfrac{0+C}{\cos 0}\Rightarrow C=1$. Розв'язок задачі: $y(x)=\dfrac{x+1}{\cos x}$.

Цей метод розв'язування лінійних рівнянь часто реалізується інакше – у формі варіації довільної сталої.

Рівняння (6.9) називається *однорідним*, якщо $q(x)=0$.

Нехай дане неоднорідне рівняння (6.9) $y'+p(x)y=q(x)$. Воно також розв'язується у два етапи. Обнулимо праву частину і отримане рівняння називатимемо однорідним рівнянням, що відповідає рівнянню (6.9): $y'+p(x)y=0$. Розв'язуємо це рівняння:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=-p(x)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx\Rightarrow\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C|\Rightarrow y=Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Тепер знаходимо загальний розв'язок рівняння (6.9) у вигляді $y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$, де $C(x)$ – нова невідома функція; знаходимо похідну $y'(x)=C'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}$ і підставляємо у (6.9) y і y': $C'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x)$, або $C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}\Rightarrow C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_0$, де $C_0=\text{const}$. Тепер $y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}=C_0e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.

Зрозуміло, що обидві реалізації розв'язку мають один зміст (розв'язок однорідного рівняння грає роль функції $v(x)$, варійована стала $C(x)$ – роль функції $u(x)$).

Відмітимо ще одну важливу обставину. Змінні x і y, що входять у рівняння, рівноправні, тому при визначенні типу рівняння потрібно мати на увазі, що може виявитись переважніше шукати розв'язок у вигляді $x=x(y)$, а не у вигляді $y=y(x)$.

$(x+y^2)dy=ydx$.

● Якщо ми представимо це рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^2}$, то розв'язати його не зможемо, так як воно не належить жодному з розглядуваних типів. Якщо ж його представити у вигляді $\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^2}{y}=\frac{x}{y}+y$, то відносно функції $x = x(y)$ воно лінійне. Розв'язуємо його методом варіації сталої. Відповідне однорідне рівняння: $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$. Його розвязок: $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow \ln|x|=\ln|y|+\ln|C|\Rightarrow x=Cy$. Шукаємо розв'язок даного рівняння у формі $x = C(y)\,y$. Тоді:

$$x'=C'(y)y+C(y)\Rightarrow C'(y)y+C(y)=\frac{C(y)y}{y}+y\Rightarrow C'(y)=1\Rightarrow C(y)=y+C_0\Rightarrow x=y(y+C)$$

6.4.1. Рівняння Бернуллі.

Означення. *Рівнянням Бернуллі* називається рівняння виду:

$$y'+Py=Q\cdot y^n, \tag{6.10}$$

де P і Q – функції від x або сталі числа, n – стале число, не рівне 1.

Для розв'язування рівняння Бернуллі використовують підстановку $z=\frac{1}{y^{n-1}}$, за допомогою якої це рівняння зводиться до лінійного.

Для цього розділимо вихідне рівняння на y^n.

$$\frac{y'}{y^n}+P\frac{1}{y^{n-1}}=Q;$$

Використаємо підстановку, врахувавши, що $z'=-\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}}\cdot y'=-\frac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1}+Pz=Q$$

$$z'-(n-1)Pz=-(n-1)Q.$$

Тобто отримали лінійне рівняння відносно невідомої функціїz.

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$z=e^{-\int Pdx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx}dx+C\right)$$

$$Q_1=-(n-1)Q;\qquad P_1=-(n-1)P.$$

Розв'язати рівняння $xy'+y=xy^2\ln x$.

● Розділимо рівняння на xy^2: $\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=\ln x$.

Покладемо $z=\frac{1}{y}$; $z'=-\frac{y'}{y^2}$. $\quad -z'+\frac{1}{x}z=\ln x$; $\quad z'-\frac{1}{x}z=-\ln x$.

Нехай $P = -\dfrac{1}{x}, \quad Q = -\ln x.$

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C \right); \qquad z = e^{\ln x} \left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C \right);$$

$$z = x \left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C \right); \qquad z = x \left(-\int \ln x d(\ln x) + C \right);$$

$$z = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right)$$

Провівши обернену підстановку, матимемо:

$$\frac{1}{y} = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right).$$

[illegible]: Розв’язати рівняння $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}.$

- Розділимо обидві частини рівняння на $x\sqrt{y}$: $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{y}} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x} \sqrt{y} = x.$

Нехай $z = \sqrt{y}; \quad z' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} y'; \quad y' = 2\sqrt{y} z';$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} 2\sqrt{y} z' - \frac{4}{x} z = x; \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2};$$

Отримали лінійне неоднорідне ДР. Розглянемо відповідне йому лінійне однорідне рівняння:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x};$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dx}{x} + C_1; \quad \ln z = 2\ln x + \ln C; \quad z = Cx^2;$$

Нехай *C* = *C(x)* і підставимо отриманий результат у лінійне неоднорідне рівняння з урахуванням того, що:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x) + x^2 \frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2 C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}; \qquad C(x) = \frac{1}{2} \ln x + C_2;$$

Маємо: $z = x^2 \left(C_2 + \dfrac{1}{2} \ln x \right);$

Використовуючи обернену підстановку, отримаємо кінцеву відповідь:

$$y = x^4 \left(C_2 + \frac{1}{2} \ln x \right)^2.$$

6.5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах.

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку виду

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (6.11)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо ліва част1на цього рівняння представляє собою повний диференціал деякої функції $u = F(x,y)$.

Інтегрування такого рівняння зводиться до знаходження функціїu, після чого розв'язок легко знаходиться у вигляді: $du = 0; \quad u = C.$

Таким чином, для розв’язку потрібно визначити:
1) в якому випадку ліва частина рівняння представляє собою повний диференціал функціїu;
2) як знайти цю функцію.

Якщо диференціальна форма $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції u, то можна записати:

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Тобто $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}.$

Знайдемо мішані похідні 2-го порядку, про диференціювавши перше рівняння по y, а друге – по x:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} \end{cases}.$$

Прирівнюючи ліві частини рівнянь, отримаємо *необхідну і достатню умови* того, що ліва частина ДР є повним диференціалом. Ця умова називається *умовою тотальності.*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Тепер розглянемо питання про знаходження власне функціїu.

Проінтегруємо рівність $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$:

$$u = \int M(x,y)dx + C(y).$$

Внаслідок інтегрування отримаємо не сталу величину C, а деяку функцію $C(y)$, так як при інтегруванні змінна y покладається сталим параметром.

Визначимо функцію $C(y)$.

Продиференціюємо отриману рівність по y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y).$$

Звідки отримаємо: $C'(y) = N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$

Для знаходження функції $C(y)$ необхідно проінтегрувати наведену вище рівність. Однак, перед інтегруванням потрібно довести, що функція $C(y)$ не залежить від x. Цю умову буде виконано, якщо похідна цієї функції по x рівна нулю.

$$[C'(y)]'_x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$
$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Тепер визначаємо функцію *C(y)*:

$$C(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C$$

Підставляючи цей результат у вираз для функції u, отримаємо:

$$u = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Тоді загальний інтеграл вихідного ДР буде мати вигляд:

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy = C.$$

Слід відмітити, що при розв'язуванні рівнянь у повних диференціалах не обов'язково використовувати отриману формулу. Розв'язок можна отримати більш компактним, якщо просто використовувати сам метод, яким формула була отримана.

Розв'язати рівняння $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$.

● Перевіримо умову тотальності: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(3x^2+10xy)}{\partial y} = 10x;$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2-1)}{\partial x} = 10x.$$

Умова тотальності виконується, отже, вихідне ДР є рівнянням у повних диференціалах. Визначимо функціюu.

$$u = \int M(x,y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$$

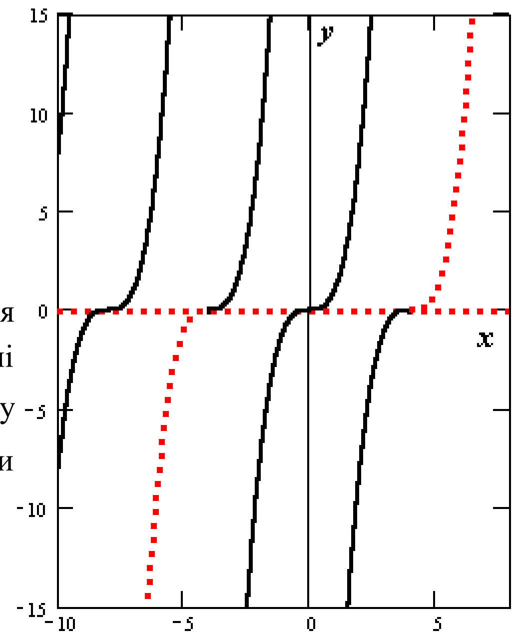
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x,y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1;$$

Отже, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1$.

Знаходимо загальний інтеграл вихідного ДР:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;.$$
$$x^3 + 5x^2y - y = C.$$



6.6. Особливі точки та особливі розв'язки рівняння першого порядку.

Якщо в околі точки (x_0, y_0) площин для рівняння $y' = f(x,y)$ виконуються умови існування і єдності задачі Коші (неперервність *f*(*x*, *y*) і $f'_y(x,y)$), то через цю точку проходить єдина інтегральна крива. Якщо ці умови порушуються, то точку (x_0, y_0) називають *особливою точкою* диференціального рівняння. Через особливу точку може не проходити жодної інтегральної кривої (тобто задача $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ не має розв'язку); може проходити одна інтегральна крива; може проходити декілька інтегральних кривих. Особливі точки можуть утворювати криву, яка сама є інтегральною кривою рівняння.

Розв'язок рівняння , у кожній точці якого порушується його єдність, називають *особливим розв'язком*. Для прикладу розглянемо рівняння $y' = 3y^{2/3}$. Тут $f(x,y) = 3y^{2/3}$ – неперервна у будь-якій точці (x, y), але $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y^{1/3}}$ – не має скінченної границі при $y \to 0$, тобто в будь-якій точці (x, y) при y=0 порушується умова існування неперервної похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$. Отже, будь-яка точка ($x$, 0) є особливою точкою рівняння. Пряма y=0, очевидно, інтегральна крива рівняння (функція y=0 задовольняє рівняння). Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Декілька таких функцій наведено на рисунку справа зверху разом із розв’язком y=0. В будь-якій точці (x, 0) порушується єдність розв'язку, таким чином, розв'язок y=0 – особливий. Насправді, через будь-яку точку (x, 0) проходить нескінченна кількість інтегральних кривих, так як будь-яка крива, складена з частин особливого і неособливого розв’язків (червоний пунктир), також є інтегральною кривою.

6.7. Найпростіші ДР вищих порядків.

6.7.1. Основні поняття.

Означення. *Диференціальним рівнянням порядку* n називається рівняння виду:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

В деяких випадках це рівняння можна розв’язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Означення. Розв'язок $y = \varphi(x)$ задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, якщо $\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \quad .... \quad , \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$

Означення. Знаходження розв’язку $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, що задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, називається *розв’язком задачі Коші.*

Теорема Коші *(Теорема про необхідні і достатні умови існування розв’язку задачі Коші).*

Якщо функція (n*–1)-ї змінних виду* $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *в деякій області* D*(*n*–1)-мірного простору неперервна і має неперервні частинні похідні по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$*, то яка б не була точка (*$x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$*) в цій області, існує єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$ *рівняння* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$*, визначеного у деякому інтервалі, що містить точку* x_0 *і задовольняє початковим умовам* $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

ДР вищих порядків, розв'язок яких може бути знайдений аналітично, можна розділити на декілька основних типів

6.7.2. Рівняння, що допускають послідовне інтегрування. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$.

Якщо $f(x)$ – функція, неперервна на деякому проміжку $a<x<b$, то розв'язок може бути знайдений послідовним інтегруванням:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

…………………………..…………………….

$$y = \int dx \int dx .... \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Розв’язати рівняння $y''' = e^{2x}$ з початковими умовами:

$$x_0 = 0;\ y_0 = 1;\ y'_0 = -1;\quad y''_0 = 0.$$

- $$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Підставимо початкові умови:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3;\quad -1 = \frac{1}{4} + C_2;\quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2};\quad C_2 = -\frac{5}{4};\quad C_3 = \frac{7}{8}.$$

Отримаємо частинний розв’язок (розв’язок задачі Коші): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

6.7.3. Рівняння, що допускають пониження порядку.

Це рівняння виду: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$.

У рівняннях такого типу можливе пониження порядку на kодиниць. Для цього проводять заміну змінної:

$$y^{(k)} = z;\quad y^{(k+1)} = z';\quad ...\quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тоді отримаємо: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0$.

Тепер припустимо, що отримане ДР про інтегроване і сукупність його розв'язків виражається співвідношенням:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Роблячи обернену підстановку, маємо:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Інтегруючи отримане співвідношення послідовноkразів, отримуємо кінцеву відповідь:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Знайти загальний розв'язок рівняння: $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

● Використовуємо підстановку: $z = y''$; $z' = y'''$;

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \qquad z = C_1 x;$$

Роблячи обернену заміну, маємо:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Відмітимо, що це співвідношення є розв'язком для усіх значень змінної x крім значення x=0.

I. Рівняння, що не містять явно незалежної змінної.

Це рівняння виду $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких рівнянь може бути понижений на одиницю за допомогою заміни змінних: $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p \right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 p; \text{ і т.д.}$$

Підставляючи ці значення у вихідне ДР, отримуємо:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}} \right) = 0$$

Якщо це рівняння проінтегрувати, і $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ – сукупність його розв'язків, то для розв'язку даного ДР залишається розв’язати рівняння 1-го порядку:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння: $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

● Заміна змінної: $p = y'$; $\qquad y'' = \dfrac{dp}{dy} p$;

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0;$$

1) $y\dfrac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \qquad \dfrac{dp}{dy} = 4 + \dfrac{p}{y}$;

Для розв'язку отриманого ДР проведемо заміну змінної: $u = \dfrac{p}{y}$.

$$u+\frac{du}{dy}y=4+u; \qquad du=4\frac{dy}{y}; \qquad \int du=4\int\frac{dy}{y}; \qquad u=4\ln|y|+4\ln C_1; \qquad u=4\ln|C_1y|;$$

$$p=4y\ln|C_1y|;$$

З урахуванням того, що $p=\frac{dy}{dx}$, отримуємо:

$$\frac{dy}{dx}=4y\ln|C_1y|; \qquad \int\frac{dy}{4y\ln|C_1y|}=\int dx; \qquad x=\frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1y|)}{\ln|C_1y|}=\frac{1}{4}\ln|\ln|C_1y||+C_2;$$

Загальний розв'язок має вигляд: $\ln|\ln|C_1y||=4x+C;$

2) $p=0;$ $\qquad y'=0;$ $\qquad y=C.$

Таким чином, отримали два загальних розв'язки.

6.8. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

6.8.1. Лінійні однорідні рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку:

$$y''+py'+gy=0, \tag{6.12}$$

де $p,\ q$ – дійсні числа.

Частинні розв'язки цього рівняння знаходимо у вигляді:

$$y=e^{kx} \tag{6.13}$$

де k – стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Підставивши функцію (6.13) в рівняння (6.12), дістанемо: $\quad e^{kx}\ (k^2+pk–q)=0.$

Оскільки $e^{kx}\neq 0$, то

$$k^2+pk+q=0 \tag{6.14}$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (6.14), то функція (6.13) буде розв'язком рівняння (6.12). Квадратне рівняння (6.14) називається *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (6.12).

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1 і k_2. Можливі три випадки:

I. k_1 і k_2 – дійсні і різні числа ($k_1\neq k_2$);

II. k_1 і k_2 – комплексні числа ($k_{1.2}=\alpha\pm\beta i$);

III. k_1 і k_2 – дійсні і рівні числа ($k_1=k_2$).

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні: $k_1\neq k_2$.

Загальний розв'язок рівняння (6.12):

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}. \tag{6.15}$$

II. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:

$$k_1 = \alpha \pm \beta i,\ k_2 = \alpha - \beta i$$

Загальний розв'язок рівняння (6.11) запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) \qquad (6.16)$$

III. Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні: $k_1 = k_2 = k$.

Загальний розв'язок рівняння (6.11):

$$y = xe^{kx}(C_1 + C_2 x) \qquad (6.17)$$

Приклади розв'язування.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння k^2–$5k$ +6=0 і знайдемо його корені k_1=2, k_2=2. За формулою (6.15) шуканий розв'язок має вигляд: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

2. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Характеристичне рівняння k^2+4k+13 = 0 має комплексні корені: $k_{1.2}$ = – 2 ± 3i. Загальний розв'язок дістанемо за формулою (6.16):

$$y = e^{-2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x) .$$

6.8.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Рівняння із спеціальною правою частиною.

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' + py' + gy = f(x) \qquad (6.18)$$

де p, q – задані дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b).

Загальний розв'язок такого рівняння являє собою суму частинного розв'язку рівняння (6.18) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаходити вміємо, тому розглянемо детальніше питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

I. Нехай права частина в рівнянні (6.18) має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \qquad (6.19)$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n.

Можливі такі випадки:

а) число α не є коренем характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$.

Тоді диференціальне рівняння (6.18) має частинний розв'язок виду:

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x} = (A_0 + A_1x + ... + A_nx^n)e^{\alpha x} \qquad (6.20)$$

де $A_0, A_1, ..., A_n$ – невизначені коефіцієнти.

***б*)** якщо число α збігається з одним коренем характеристичного рівняння, тобто є простим коренем цього рівняння, то частинний розв'язок рівняння (6.18) треба шукати у вигляді:

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x} \qquad (6.21)$$

***в*)** якщо число α є двократним коренем рівняння, то частинний розв'язок рівняння (6.18) шукають у вигляді:

$$y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x} \qquad (6.22)$$

Об'єднаємо випадки *а*) – *в*): якщо права частина рівняння (6.18) має вигляд (6.19), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді:

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x) \qquad (6.23)$$

де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, а r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α. Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то приймаємо $r = 0$.

II. Нехай права частина в рівнянні (6.18) має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x) \qquad (6.24)$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, $R_m(x)$ – многочлен степеня m; α та β – дійсні числа.

Частинний розв'язок рівняння (6.18) треба шукати у вигляді:

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x) \qquad (6.25)$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами;
s – найвищий степінь многочленів $R_m(x)$ та $P_n(x)$, тобто $s = max\ (n, m)$; r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють $\alpha + \beta i$.

Зокрема, якщо права частина рівняння (6.18) має вигляд:

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x, \qquad (6.26)$$

де A, B – відомі дійсні числа, то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді:

$$y^* = x^r(a\cos\beta x + b\sin\beta x). \qquad (6.27)$$

де a, b – невідомі коефіцієнти; r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють βi.

Приклади розв'язування.

1. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 2x + 3$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\overline{y}(x) = e^x(C_1 + C_2x)$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x)e^{0\cdot x}$, причому $\alpha = 0$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то за формулою (6.20) частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_1(x)e^{0\cdot x}$,тобто $y^*=A+Bx$, де A і B – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y^{*\prime}=B$, $y^{*\prime\prime}=0$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо: $2B+A+Bx=2x+3$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} B = 2; \\ -2B + A = 3, \end{cases}$$ звідки $B= 2$, $A = 7$.

Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y^*=7+2x$, тому $y = \overline{y}(x) + y^*(x) = e^x(C_1 + C_2x) + 2x + 7$ – шуканий загальний розв'язок.

2. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 8e^{3x}$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$ має корені $k_1=1$ і $k_2=2$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_0(x)e^{3x}$, причому $\alpha=3$, $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$,то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^* = Q_0(x)e^{3x}$, тобто $y^* = Ae^{3x}$, де A – невідомий коефіцієнт.

Знайшовши похідні $(y^*)' = 3Ae^{3x}$, $(y^*)'' = 9Ae^{3x}$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо $9Ae^{3x} - 9Ae^{3s} + 2Ae^{3x} = 8e^{3x}$,звідки $A = 4$, тому $y^* = 4e^{3x}$ – частинний розв'язок даного рівняння, а y – його загальний розв’язок.

6.9. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

I. Рівняння Ейлера.

Це рівняння вигляду:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \qquad (6.28)$$

Таке рівняння зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною

$$x = e^t,\ x > 0, \qquad x = -e^{-t},\ x < 0 \qquad (6.29)$$

Дійсно
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} \qquad (6.30)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1}\frac{dy}{dt}\right)e^{-nt}.$$

Підставляючи (6.29) і (6.30) у диференціальне рівняння (6.28), ми отримаємо диференціальне рівняння *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n y = 0 \qquad (6.31)$$

Частинні розв′язки диференціального рівняння (6.31) знаходять у вигляді $y = e^{rt}$. Враховуючи (6.29), частинні розв′язки диференціального рівняння (6.28) можна зразу шукати у вигляді (6.29):

$$y = x^r. \qquad (6.32)$$

II. Рівняння Лагранжа має вигляд:

$$(ax+b)^n y^n + (ax+b)^{n-1} a_1 y^{n-1} + \cdots + (ax+b) a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (6.33)$$

Це рівняння заміною $ax + b = e^t$ також зводиться до диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

III. Рівняння

$$(1 - x^2) y'' - x y' + n^2 y = 0 \qquad (6.34)$$

називається *рівнянням Чебишова* і після заміни $x = \cos t$ при $|x| < 1$ воно набирає вигляду:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0 \qquad (6.35)$$

Дійсно
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right) = \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

Отже

$$\sin^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt} + n^2 y = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

Тобто отримали (6.35).

Розв′язати диференціальне рівняння $x^3 y''' + x y' - y = 0$.

● Випишемо і розв′яжемо характеристичне рівняння

$$r(r-1)(r-2) + r - 1 = 0,$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1.$$

Тому фундаментальна система розв′язків буде наступною

$$y_1 = x,\ y_2 = x \ln x,\ y_3 = x \ln^2 x.$$

Отже $\qquad y = x\left(c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x\right)$ – загальний розв′язок.

6.10. Системи диференціальних рівнянь.

6.10.1. Нормальні системи диференціальних рівнянь.

Означення. Сукупність співвідношень виду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ .... \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

де *x*– незалежна змінна, $y_1, y_2, ..., y_n$ – шукані функції, називається *системою ДР 1-го порядку*.

Означення. Система диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язуваних відносно похідних від невідомих функцій називається *нормальною системою ДР*.

Така система має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (6.36)$$

Теорема *(Теорема Коші). Якщо у деякій області (n–1)-мірного простору функції* $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, ..., $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *неперервні і мають неперервні частинні похідні по* $y_1, y_2, ..., y_n$, *то для будь-якої точки* $(x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ *цієї області існує єдиний розв'язок*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системи диференціальних рівнянь виду (6.36), визначене в деякому околі точки x_0ізадовольняє початковим умовам $x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Означення. *Загальним розв'язком системи ДР* виду (6.) буде сукупність функцій $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, …, $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, які при підстановці в систему (6.36) обертають її в тотожність.

6.10.2. Нормальні системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

При розгляді систем диференціальних рівнянь обмежимось випадком системи трьох рівнянь (*n*=3), що буде справедливим для систем довільного порядку.

Означення. Нормальна система ДР зі сталими коефіцієнтами називається *лінійною однорідною*, якщо її можна записати у вигляді:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\
\dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\
\dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u
\end{cases} \qquad (6.37)
$$

Розв'язки системи (6.37) мають такі властивості:

1) Якщо y, z, u – розв'язки системи, то Cy, Cz, Cu , де $C = const$ – теж є розв'язками цієї системи.

2) Якщо y_1, z_1, u_1 і y_2, z_2, u_2 – розв'язки системи, то $y_1+y_2, z_1+z_2, u_1+u_2$ – теж є розв’язками системи.

Розв'язки системи знаходяться у вигляді: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$.

Підставляючи ці значення в систему (6.37) і переносячи усі члени в одну сторону і скоротивши на e^{kx}, отримуємо:

$$
\begin{cases}
(a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\
a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\
a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0
\end{cases}
$$

Для того, щоб отримана система мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи був рівний нулю, тобто:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} - k
\end{vmatrix} = 0
$$

В результаті обчислення визначника отримуємо рівняння 3-го степеня відносно k. Це рівняння називається *характеристичним* і має три корені k_1, k_2, k_3. Кожному з цих коренів відповідає ненульовий розв'язок системи (6.37):

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x}, \\
y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x}, \\
y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.
\end{aligned}
$$

Лінійна комбінація цих розв'язків з довільними коефіцієнтами буде розв'язком системи (6.37):

$$
\begin{aligned}
y &= C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x}; \\
z &= C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x}; \\
u &= C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.
\end{aligned}
$$

Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$
\begin{cases}
x' = 5x + 2y \\
y' = 2x + 2y
\end{cases}
$$

● Складемо характеристичне рівняння:

$$
\begin{vmatrix}
5 - k & 2 \\
2 & 2 - k
\end{vmatrix} = 0; \qquad (5 - k)(2 - k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;
$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6;$$

Розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Покладаючи $\alpha_1 = 1$ (приймається будь-яке значення), отримаємо: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Покладаючи $\alpha_2 = 2$ (приймається будь-яке значення), отримаємо: $\beta_2 = 1$.

Загальний розв'язок системи: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}.$$

● Ця система не відноситься до розглянутого вище типу, так як не є однорідною (у рівняння входить незалежна змінна *x*).

Для розв’язування про диференціюємо перше рівняння по *x*. Отримаємо:

$$y'' = y' + z'.$$

Замінюючи значенняz' з другого рівняння отримаємо: $y'' = y' + y + z + x$.

З урахуванням першого рівняння, отримаємо: $y'' = 2y' + x$.

Розв’язуємо отримане ДР 2-го порядку.

$$y'' - 2y' = x; \qquad y'' - 2y' = 0; \qquad k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Тепер знаходимо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння по формулі $y = x^r e^{\alpha x} Q(x); \quad \alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax + B;$

$$y = Ax^2 + Bx; \quad y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A;$$

$$2A - 4Ax - 2B = x; \qquad A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4};$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4} x(x+1).$$

Підставивши отримане значення в перше рівняння системи, маємо:

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1).$$

Знайти розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$$

● Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \qquad -k\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k(k^2-1)+3k+3+3+3k=0; \qquad k^3-7k-6=0; \qquad k_1=-1; \quad k_2=-2; \quad k_3=3;$$

1) $k_1 = -1$.

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 3\alpha+\beta+\gamma=0; \\ 3\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \qquad \alpha=0; \quad \beta=-\gamma;$$

Якщо прийняти $\gamma = 1$, то розв'язки будуть:

$$y_1=0; \quad z_1=-e^{-x}; \quad w_1=e^{-x};$$

2) $k_2 = -2$.

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma=0; \\ 3\alpha+\beta+2\gamma=0 \end{cases} \qquad \alpha=-\gamma; \quad \beta=\gamma;$$

Якщо прийняти $\gamma = 1$, то:

$$y_2=-e^{-2x}; \quad z_2=e^{-2x}; \quad w_2=e^{-2x};$$

3) $k_3 = 3$.

$$\begin{cases} -3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 3\alpha-3\beta+\gamma=0 \\ 3\alpha+\beta-3\gamma=0 \end{cases}; \quad \alpha=\frac{2}{3}\gamma; \quad \beta=\gamma;$$

Якщо прийняти $\gamma = 3$, то:

$$y_3=2e^{3x}; \quad z_3=3e^{3x}; \quad w_3=3e^{3x};$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} y=-C_2e^{-2x}+2C_3e^{3x} \\ z=-C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3C_3e^{3x} \\ w=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3C_3e^{3x} \end{cases}$$

Вправи для самостійного розв’язування.

Знайти загальний розв’язок диференціальних рівнянь.

1. а) $\left(x^2-1\right)y'+2xy^2=0$; б) $\left(xy+x^2\right)y'=y^2$.
2. а) $x^2y^2y'=y+3$; б) $xy'+y=x+1$.
3. а) $\left(x^2+2\right)y'+2xy^2=0$; б) $\left(2xy+y^2\right)y'=y^2$.
4. а) $\left(3x+xy^2\right)y'=4$; б) $2xyy'=x^2-y^2$.
5. а) $\left(x^2+2\right)y'=2x-xy^2$; б) $xy'+4y=x^4$.

6. а) $y^2+4=\left(x^2y-4y\right)y'$; б) $xy'+2y=x^2$.

7. а) $\left(4+x^2\right)y'=3x+3y^2$; б) $x^2y'=xy-y^2$.

8. а) $\left(2+x^2\right)y'=x+3xy$; б) $y'-y=e^x$.

9. а) $\left(1+x^2\right)y'=x+2xy$; б) $xy^2y'=x^3+y^3$.

10. а) $\left(x^2+2\right)y'=-2xy^2$; б) $xy'+y=x+1$.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам.

1. $y''+3y'+2y=8x^2+4;\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$.
2. $y''-3y'+2y=18xe^{-x};\quad y(0)=-1,\ y'(0)=1$.
3. $y''-4y'+4y=8\cos x;\quad y(0)=2,\ y'(0)=-1$.
4. $y''+4y'+4y=x^2+x+2;\quad y(0)=-2,\ y'(0)=1$.
5. $y''-2y'+5y=3xe^{2x};\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$.
6. $y''-2y'+15y=-45x^2+7,2;\quad y(0)=2,\ y'(0)=-2$.
7. $y''+y'-6y=39\sin 3x;\quad y(0)=3,\ y'(0)=-1$.
8. $y''-y'-6y=27\cos 2x;\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$.
9. $y''+10y'+25y=-25x^2+25;\quad y(0)=4,\ y'(0)=3$.
10. $y''+4y'+8y=8x^2+16x+6;\quad y(0)=2,\ y'(0)=0$.

Розділ 7. Операційне числення.

Ми будемо вивчати операційне числення як один з методів розв’язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і систем таких рівнянь. Якихось переваг цей метод перед іншими не має, в той же час його простота зробила його основним інструментом при розв’язуванні задачі Коші у ряді прикладних наук (механіці, радіотехніці, електротехніці і т. і.).

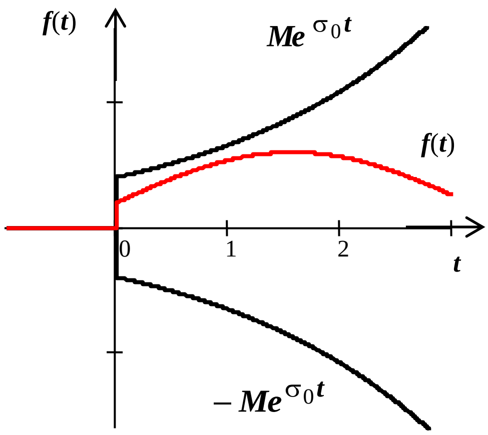
Ідея операційного числення полягає у наступному. Простір функцій, що задовольняє деяким достатньо загальним умовам (простір функцій-оригіналів) взаємно однозначно відображається в інший простір функцій (простір функцій-зображень) так, що операціям диференціювання та інтегрування у просторі функцій-оригіналів відповідають більш прості операції (множення та ділення) у просторі функцій-зображень. У результаті диференціальне рівняння у просторі функцій-оригіналів перетворюється у лінійне алгебраїчне рівняння у просторі функцій-зображень, розв'язок якого знаходиться без проблем. Остання дія – відновлення розв'язку рівняння по його зображенню.

Таким чином, ми повинні вивчити питання:

1. Які функції можуть бути функціями-оригіналами і які властивості функцій-зображень;
2. Які правила переводу оригіналів у зображення і навпаки;
3. Які зображення мають основні елементарні функції (таблиця стандартних зображень).

7.1. Означення функції-оригінала та її зображення по Лапласу.

Означення. *Функцією-оригіналом* називається дійснозначна або комплекснозначна функція $f(t)$ дійсної змінної t, що задовольняє умовам:



1. $f(t) = 0$ при $t < 0$;

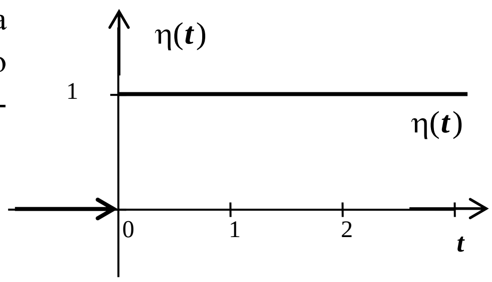
2. Існують такі сталі $M > 0$ і $\sigma_0 \geq 0$, що $|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma_0 t}$;

3. На будь-якому відрізку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\left(0 \leq \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < \infty\right)$ функція задовольняє умовам Діріхле (неперервна або має скінченну кількість усувних розривів і розривів першого роду; монотонна або має скінченну кількість екстремумів).

Зміст цих умов такий.

1. Так як одне з основних застосувань операційного числення – розв’язування задач з початковими умовами, то поведінка функції до початкового моменту $t = 0$ несуттєва;

2. Параметр σ_0 у другій умові прийнято називати показником росту функції $f(t)$. Сама друга умова означає, що швидкість росту функції-оригінала не може бути експоненціальною. У сукупності з третьою умовою це забезпечує існування і певні властивості функції-зображення.



Наведемо приклади функцій-оригіналів. Перша і тертя властивості для них очевидні, тому перевірятимемо лише другу.

1. Одинична функція Хевісайда.

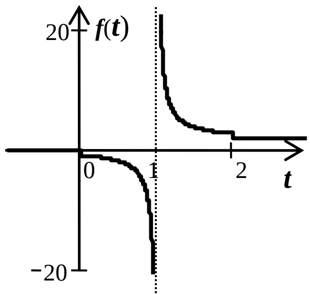
Так називається функція $\eta(t)=\begin{cases}0, \ t<0;\\ 1, \ t\ge 0.\end{cases}$ Це – функція-оригінал ($\eta(t)\le e^t$).

2. $f(t)=\begin{cases}0, \ t<0;\\ t^{\alpha}, \ t\ge 0;\end{cases}$ $(\alpha\ge 0)$.

Відмітимо, що за допомогою одиничної функції Хевісайда $\eta(t)$ визначення цієї функції можна записати коротше: $f(t)=t^{\alpha}\cdot\eta(t)\ (\alpha\ge 0)$, так як функція $\eta(t)$ в якості множника обнуляє будь-яку другу функцію при $t<0$. Далі ми будемо писати просто $f(t)=t^{\alpha}$, $f(t)=e^{\alpha t}$, $\boldsymbol{f(t)=\sin t}$, $f(t)=\cos t$ і т.д., маючи на увазі, що усі функції починаються у момент $t=0$, і при $t<0$ тотожньо рівні нулю.

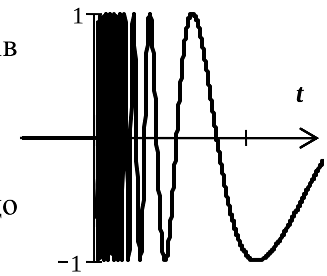
Для функції $f(t)=t^{\alpha}$ отримуємо: $t<e^t$ при $t\ge 0$, тому $t^{\alpha}<e^{\alpha t}$.

3. $f(t)=\sin t$. $|\sin t|\le 1=1\cdot e^{0\cdot t}$ і т.д.



Приклади функцій, які не є оригіналами:

1. $f(t)=\begin{cases}0, \ t<0;\\ 1/(t-1), \ t\ge 0.\end{cases}$ Ця функція має розрив другого роду в точці $t=1$.



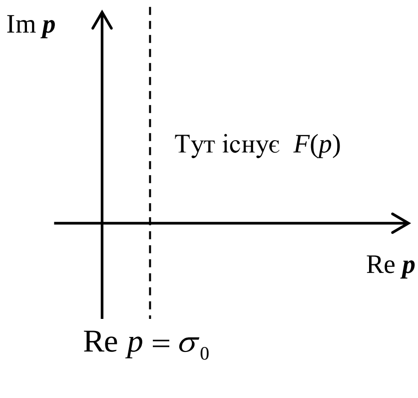
2. $f(t)=\begin{cases}0, \ t<0;\\ \sin\left(1/t\right), \ t\ge 0.\end{cases}$ Функція має нескінченну кількість екстремумів на відрізку [0,1].

3. $f(t)=\begin{cases}0, \ t<0;\\ (t+1)\cdot e^{t^2}, \ t\ge 0.\end{cases}$ Не існує таких констант M і σ_0, що $|f(t)|\le M\cdot e^{\sigma_0 t}$.

Означення. *Зображенням по Лапласу* функції-оригінала $f(t)$ (або *перетворенням Лапаласа* функції $f(t)$) називається функція комплексної змінної *p*, що визначається рівністю

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot f(t)\,dt.$$

Інтеграл в правій частині цього означення збіжний абсолютно в будь-якій точці *p*, що задовольняє нерівність $\operatorname{Re} p\ge\sigma_1$, де σ_1 – довільне число, таке, що $\sigma_1>\sigma_0$. Дійсно, $|e^{-pt}\cdot f(t)|=|e^{-pt}|\cdot|f(t)|\le|e^{-(\operatorname{Re}p+i\operatorname{Im}p)t}|\cdot Me^{\sigma_0 t}=M\,|e^{-\operatorname{Re}p\cdot t}|\cdot|e^{-i\operatorname{Im}p\cdot t}|\cdot e^{\sigma_0 t}=$ (так як $|e^{-i\operatorname{Im}p\cdot t}|=|\cos(\operatorname{Im}p\cdot t)-i\sin(\operatorname{Im}p\cdot t)|=1$)$=M\,|e^{-\operatorname{Re}p\cdot t}|\cdot e^{\sigma_0 t}=Me^{-(\operatorname{Re}p-\sigma_0)t}\le Me^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}$, а інтеграл $\int_0^{+\infty} Me^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}dt=-\dfrac{M}{\sigma_1-\sigma_0}e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{M}{\sigma_1-\sigma_0}$ збігається.



Таким чином, ми довели, що зображення *F*(*p*) визначене в будь-якій точці *p*, такий що $\operatorname{Re} p>\sigma_0$, тобто у півплощині справа від прямої $\operatorname{Re} p=\sigma_0$. Як наслідок, показник швидкості росту оригінала число σ_0 називають *абсцисою збіжності*.

Відмітимо, що ми довели також, що $F(p) \underset{\operatorname{Re} p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$: так як $|e^{-pt} \cdot f(t)| \le Me^{-(\operatorname{Re} p - \sigma_0)t}$, то $|F(p)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t)\,dt\right| \le \int_0^{+\infty} \left|e^{-pt} \cdot f(t)\right| dt \le \quad \le M \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} p - \sigma_0)t} dt = \dfrac{M}{\operatorname{Re} p - \sigma_0} \underset{\operatorname{Re} p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Як і в теорії степеневих рядів, цього достатньо, щоб збіжність інтеграла була рівномірною по змінній *p*, тому функцію *F*(*p*) можна диференціювати і інтегрувати по цій змінній.

7.2. Зображення найпростіших функцій.

1. Одинична функція Хевісайда $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \ge 0. \end{cases}$

Її зображення: $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot 1 \cdot dt = -\dfrac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{1}{p}$, так як $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt} = 0$. Відповідність між функцією-оригіналом і зображенням будемо позначати так: $f(t) \risingdotseq F(p)$ і $f(t) \fallingdotseq F(p)$. Отже, доведено: $\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$.

2. $f(t) = e^{\alpha t}$.

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot e^{\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = -\frac{1}{p-\alpha} \cdot e^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}.$$

3. $f(t) = \sin \omega t$.

$$\boldsymbol{F(p)} = \int_0^{+\infty} \boldsymbol{e^{-pt}} \sin \omega \boldsymbol{t}\, \boldsymbol{dt} = -\frac{1}{\boldsymbol{p}} \int_0^{+\infty} \sin \omega \boldsymbol{t}\, \boldsymbol{de^{-pt}} = -\frac{1}{\boldsymbol{p}} \sin \omega \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{e^{-pt}}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\boldsymbol{p}} \int_0^{+\infty} \boldsymbol{e^{-pt}}\, \boldsymbol{d} \sin \omega \boldsymbol{t} = \frac{\omega}{\boldsymbol{p}} \int_0^{+\infty} \boldsymbol{e^{-pt}} \cdot \cos \omega \boldsymbol{t}\, \boldsymbol{dt} =$$

$$= -\frac{\omega}{p^2} \int_0^{+\infty} \cos \omega t\, de^{-pt} = -\frac{\omega}{p^2} e^{-pt} \cdot \cos \omega t\Big|_0^{+\infty} + \frac{\omega}{p^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, d\cos \omega t = \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \sin \omega t\, dt.$$

Для $F(p)$ отримали рівняння:

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2} - \frac{\omega^2}{p^2} F(p) \Rightarrow (p^2 + \omega^2) F(p) = \omega \Rightarrow F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.\ \text{Отже, } \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

4. $f(t) = \cos \omega t$. Аналогічно попередньому доводиться, що $\cos \omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$.

5. Степенева функція $f(t) = t^n$. При $n = 1$ знаходимо

$$t \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot t \cdot dt = -\frac{1}{p} \int_0^{+\infty} t \cdot de^{-pt} = -\frac{1}{p}\left(t \cdot e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot dt\right) = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot dt = \frac{1}{p^2},$$ так як

$\lim\limits_{t \to +\infty} t \cdot e^{-pt} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^{pt}} = (\text{по правилу Лопіталя}) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{p \cdot e^{pt}} = 0$. Отже, $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$. Аналогічно можна довести, що $t^2 \to \frac{2}{p^3}$, $t^3 \to \frac{3\cdot 2}{p^4}$, і, взагалі, при цілому n $t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}$. Далі ми отримаємо більш просте виведення цих формул за допомогою теореми про диференціювання зображень.

7.3. Властивості перетворення Лапласа.

7.3.1. Лінійність перетворення Лапласа.

Якщо $f(t)$, $g(t)$ – функції-оригінали, які мають зображення $F(p)$, $G(p)$, то їх лінійна комбінація $\alpha f(t)+\beta g(t)$ $(\alpha=\text{const}, \beta=\text{const})$ – теж функція-оригінал, і $\alpha f(t)+\beta g(t) \to \alpha F(p)+\beta G(p)$.

Ця властивість слідує із властивості лінійності невласного визначеного інтеграла. З його допомогою можна простіше вивести зображення функцій $f(t)=\sin\omega t$, $f(t)=\cos\omega t$, виходячи з зображення $e^{\alpha t} \to = \frac{1}{p-\alpha}$:

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} \to \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{(p+i\omega)-(p-i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p+i\omega)+(p-i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)}=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Далі,

$$\operatorname{sh}\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2};$$

$$\operatorname{ch}\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

Теорема подібності. *Якщо $f(t)$ – функція-оригінал і $f(t) \to F(p)$, то для будь-якого $\lambda>0$: $f(\lambda t) \to \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$.*

Доведення.

$$f(\lambda t) \to \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\lambda t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{p}{\lambda}\right)\cdot(\lambda t)} f(\lambda t)\frac{1}{\lambda}d\lambda t=\left|t_1=\lambda t\right|=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{p}{\lambda}\right)\cdot t_1} f(t_1)dt_1=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Якщо $e^t \to \frac{1}{p-1}$, то $e^{\alpha t} \to \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\frac{p}{\alpha}-1}=\frac{1}{p-\alpha}$; якщо $\operatorname{sh} t \to \frac{1}{p^2-1}$, то $\operatorname{sh}\omega t \to \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2-1}=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$ і т.д.

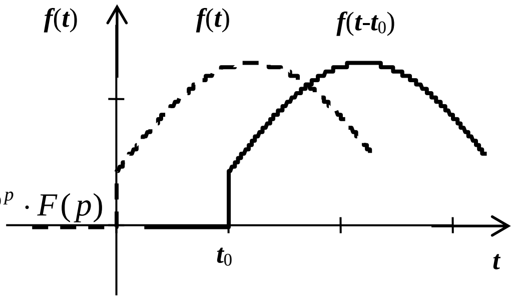
Теорема зміщення. Якщо $f(t) \to F(p)$, то $e^{\alpha t}f(t) \to F(p-\alpha)$. Тут α – довільне комплексне число.

Доведення. $e^{\alpha t}f(t) \to \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}f(t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}f(t)dt=F(p-\alpha)$.

Якщо $\eta(t) \overset{\cdot}{\to} \dfrac{1}{p}$, то $e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \cdot \eta(t) \overset{\cdot}{\to} \dfrac{1}{p-\alpha}$; якщо $\cos\omega t \overset{\cdot}{\to} \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, то $e^{\alpha t} \cdot \cos\omega t \overset{\cdot}{\to} \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2} = \dfrac{p-\alpha}{p^2-2p\alpha+(\alpha^2+\omega^2)}$ і т.д.

Теорема запізнення. Якщо $f(t) \overset{\cdot}{\to} F(p)$ (тобто $f(t)\cdot\eta(t) \overset{\cdot}{\to} F(p)$), то $f(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0) \overset{\cdot}{\to} e^{-t_0 p}\cdot F(p)$ для будь-якого $t_0 \ge 0$.

Доведення. $f(t-t_0)\cdot\eta(t-t_0) \overset{\cdot}{\to} \int\limits_0^{+\infty} e^{-tp} f(t-t_0)dt =$



$$= \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-tp} f(t-t_0)dt = \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-(t-t_0)p}\cdot e^{-t_0 p}\cdot f(t-t_0)dt =$$

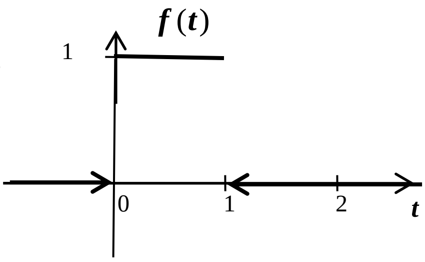
$$= e^{-t_0 p}\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-(t-t_0)p}\cdot f(t-t_0)dt = \begin{vmatrix} t_1 = t-t_0 \\ dt = dt_1 \end{vmatrix} = e^{-t_0 p}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t_1 p}\cdot f(t_1)dt_1 = e^{-t_0 p}\cdot F(p)$$

$$= e^{-t_0 p}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t_1 p}\cdot f(t_1)dt_1 = e^{-t_0 p}\cdot F(p).$$

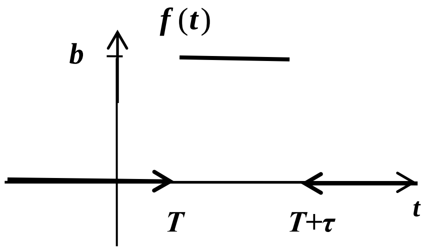
Ця теорема використовується для зображення функцій ***імпульсних, складних, періодичних***. Розглянемо їх докладніше.

7.3.2. Імпульсні функції.

Одиничний імпульс: $f(t) = \begin{cases} 0,\ t<0; \\ 1,\ 0 \le t \le 1; \\ 0,\ t>1. \end{cases}$ За допомогою функції Хевісайда ця функція записується так:



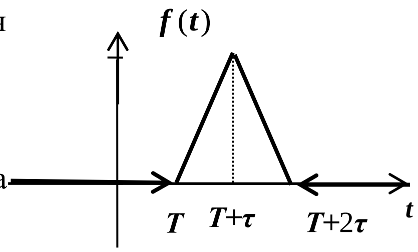
$f(t) = \eta(t) - \eta(t-1)$. $\eta(t) \overset{\cdot}{\to} \dfrac{1}{p}$; по теоремі запізнення $(t_0 = 1)$ $\eta(t-1) \overset{\cdot}{\to} \dfrac{e^{-p}}{p}$, тому $f(t) \overset{\cdot}{\to} \dfrac{1}{p} - \dfrac{e^{-p}}{p} = \dfrac{1-e^{-p}}{p}$.



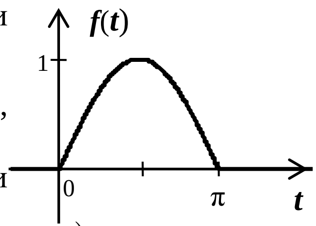
Запізнілий прямокутний імпульс:
$f(t) = \begin{cases} 0,\ t<T; \\ b,\ T \le t \le T+\tau; \\ 0,\ t>T+\tau; \end{cases}$

Тут $f(t) = b\cdot\big(\eta(t-T) - \eta(t-(T+\tau))\big) \overset{\cdot}{\to} b\cdot\left(\dfrac{e^{-pT}}{p} - \dfrac{e^{-p(T+\tau)}}{p}\right) = \dfrac{b\cdot e^{-pT}\cdot\left(1-e^{-p\tau}\right)}{p}$.

Трикутний імпульс: Аналітично ця функція записується так: $f(t)=\begin{cases}0,\ t<T;\\ \frac{b}{\tau}(t-T),\ T\le t<T+\tau;\\ -\frac{b}{\tau}(t-T-2\tau),\ T+\tau\le t<T+2\tau;\\ 0,\ t>T+2\tau.\end{cases}$ Зміна функції на



переході від ділянки $T\le t\le T+\tau$ до ділянки $T+\tau<t\le T+2\tau$ рівна $-\frac{b}{\tau}(t-T-2\tau)-\frac{b}{\tau}(t-T)=-\frac{2b}{\tau}(t-T-\tau)$; при переході до ділянки $t>T+2\tau$ зміна функції рівна $0-\left[-\frac{b}{\tau}(t-T-2\tau)\right]=\frac{b}{\tau}(t-T-2\tau)$, тому можна переписати



$$f(t)=\frac{b}{\tau}(t-T)\cdot\eta(t-T)-\frac{2b}{\tau}(t-T-\tau)\cdot\eta(t-T-\tau)+\frac{b}{\tau}(t-T-2\tau)\cdot\eta(t-T-2\tau)$$

, і, так як $t\dot{\to}\frac{1}{p^2}$, $\frac{b}{\tau}(t-T)\cdot\eta(t-T)\dot{\to}\frac{b}{\tau}\cdot\frac{e^{-Tp}}{p^2}$, то $f(t)\dot{\to}\frac{b}{\tau}\cdot\frac{e^{-Tp}}{p^2}-\frac{2b}{\tau}\cdot\frac{e^{-(T+\tau)p}}{p^2}+\frac{b}{\tau}\cdot\frac{e^{-(T+2\tau)p}}{p^2}=$

$$=\frac{b}{\tau}\cdot e^{-Tp}\cdot\frac{1-2e^{-\tau p}+e^{-2\tau p}}{p^2}=\frac{b}{\tau}\cdot e^{-Tp}\cdot\frac{\left(1-e^{-\tau p}\right)^2}{p^2}.$$

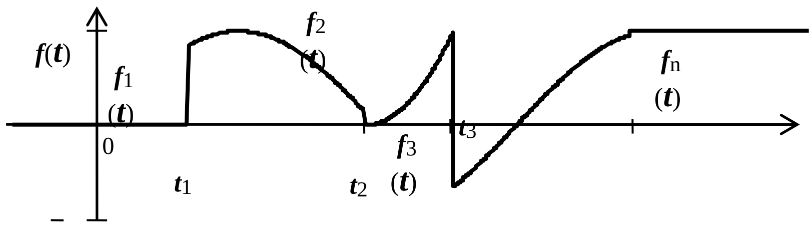
Синусоїдальний імпульс: $f(t)=\begin{cases}0,\ t<0;\\ \sin t,\ 0\le t\le\pi;\\ 0,\ t>\pi.\end{cases}$ Тут

$f(t)=\sin t\cdot\eta(t)+\sin(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi)$, тому $f(t)\dot{\to}\frac{1}{p^2+1}+\frac{e^{-\pi p}}{p^2+1}=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$.

7.3.3. Складені функції.

Нехай $f(t)$ задається різними виразами на різних ділянках області визначення:

$$f(t)=\begin{cases}0,\ t<t_0=0;\\ f_1,\ 0\le t<t_1;\\ f_2,\ t_1\le t<t_2;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_{n-1},\ t_{n-2}\le t<t_{n-1};\\ f_n,\ t\ge t_{n-1}.\end{cases}.$$



За допомогою функції Хевісайда $f(t)$ записується так:

$$\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\cdot\eta(t)+\left[f_2(t)-f_1(t)\right]\cdot\eta(t-t_1)+\left[f_3(t)-f_2(t)\right]\cdot\eta(t-t_2)+\ldots+\left[f_n(t)-f_{n-1}(t)\right]\cdot\eta(t-t_{n-1})=$$

$=\sum_{k=1}^{n-1}f_k(t)\cdot\left[\eta(t-t_{k-1})-\eta(t-t_k)\right]+f_n(t)\cdot\eta(t-t_{n-1})$, і теорема запізнення дозволяє отримувати зображення цієї функції.

7.3.4. Періодичні функції.

Нехай $f(t)$ – періодична при t>0 функція з основним періодом, рівним T. Позначимо $f_1(t)$ функцію, що описує перший період функції $f(t)$:

$$f_1(t)=\begin{cases} f(t) \text{ при } 0\le t\le T; \\ 0 \text{ при } t<0 \text{ и при } t\ge T \end{cases}.$$

Тепер $f(t)=f_1(t)\cdot\eta(t)+f_1(t-T)\cdot\eta(t-T)+f_1(t-2T)\cdot\eta(t-2T)+\ldots+f_1(t-nT)\cdot\eta(t-nT)+\ldots=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_1(t-nT)\cdot\eta(t-nT)$ (кожен доданок описує відповідний період). Нехай $F_1(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot f_1(t)\,dt=\int\limits_0^{T}e^{-pt}\cdot f_1(t)\,dt$ – зображення функції $f_1(t)$. Тоді

$$f(t)\risingdotseq F_1(p)+F_1(p)\cdot e^{-pT}+F_1(p)\cdot e^{-2pT}+F_1(p)\cdot e^{-3pT}+\ldots+F_1(p)\cdot e^{-npT}+\ldots=$$

$$=F_1(p)\cdot\left(1+e^{-pT}+e^{-2pT}+e^{-3pT}+\ldots+e^{-npT}+\ldots\right)=\frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}.$$

Знайдемо в якості прикладу зображення функції $\{t\}$ – дробової частини числа t. Ця функція визначається так: $\{t\}=t-n$ при $n\le t<n+1,\ n$ – ціле число. Для неї

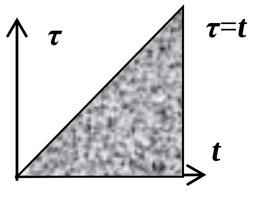
$$f_1(t)=\begin{cases} t \text{ при } 0\le t\le 1; \\ 0 \text{ при } t<0 \text{ и при } t\ge 1 \end{cases}, \quad \text{або} \quad f_1(t)=t\cdot[\eta(t)-\eta(t-1)]=t\cdot\eta(t)-(t-1)\cdot\eta(t-1)-1\cdot\eta(t-1),$$

тому $F_1(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p}=\frac{1-e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p}$, і $F(p)=\frac{F_1(p)}{1-e^{-p}}=\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p(1-e^{-p})}$.

7.3.5. Інтегрування оригінала.

Якщо $f(t)$ – функція-оригінал, і $f(t)\risingdotseq F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ – теж функція-оригінал, і $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\risingdotseq\frac{F(p)}{p}$.

Доведення. $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\risingdotseq\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right)dt=$ (це повторний інтеграл, що обчислюється по області $\{0\le t<+\infty,\ 0\le\tau\le t\}$; змінюємо порядок інтегрування, це можна зробити, так як невласний подвійний інтеграл збіжний абсолютно)



$$\int\limits_0^{+\infty}d\tau\int\limits_\tau^{+\infty}e^{-pt}f(\tau)dt=\int\limits_0^{+\infty}f(\tau)d\tau\int\limits_\tau^{+\infty}e^{-pt}dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}f(\tau)d\tau\cdot\left.\frac{-e^{-pt}}{p}\right|_\tau^{+\infty}=\int\limits_0^{+\infty}f(\tau)d\tau\cdot\frac{e^{-p\tau}}{p}=\frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty}e^{-p\tau}f(\tau)d\tau=\frac{F(p)}{p}.$$

7.3.6. Диференціювання оригінала.

Якщо функція-оригінал $f(t)$ має похідну $f'(t)$, що теж є оригіналом, і $f(t)\overset{\cdot}{\to}F(p)$, то $f'(t)\overset{\cdot}{\to}pF(p)-f(+0)$.

Доведення. $f'(t)\overset{\cdot}{\to}\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}f'(t)dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot d\,f(t)=e^{-pt}\cdot f(t)\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cdot de^{-pt}=$

$=-f(+0)+p\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot f(t)\,dt=pF(p)-f(+0).$ Пишемо тут $f(+0)$, а не $f(0)$, так як оригінал може мати розрив (першого роду) в точці $t = 0$.

Формула диференціювання оригінала може використовуватись неодноразово. Якщо функція-оригінал $f(t)$ має похідні $f'(t)$, $f''(t), f'''(t), f^{(4)}(t),..., f^{(n)}(t)$, і всі вони теж є оригіналами, що мають зображення $F_1(p)$, $F_2(p)$, $F_3(p)$, …, $F_n(p)$, то, як тільки що доведено, $f'(t)\overset{\cdot}{\to}F_1(p)=pF(p)-f(+0)$.

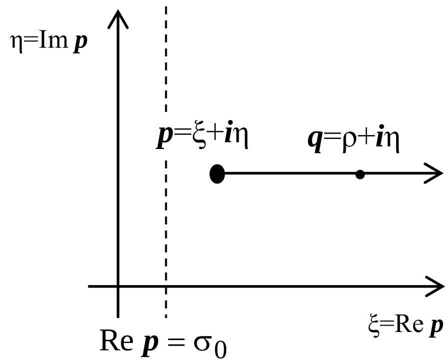
Тоді $f''(t)\overset{\cdot}{\to}F_2(p)=pF_1(p)-f'(+0)=p^2F(p)-pf(+0)-f'(+0)$,

$f'''(t)\overset{\cdot}{\to}F_3(p)=pF_2(p)-f''(+0)=p^3F(p)-p^2f(+0)-pf'(+0)-f''(+0)$, …,

$f^{(n)}(t)\overset{\cdot}{\to}F_n(p)=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-p^{n-3}f''(+0)-...-pf^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0).$

7.3.7. Інтегрування зображення.

Нехай $f(t)$ – функція-оригінал, $f(t)\overset{\cdot}{\to}F(p)$ і функція $\dfrac{f(t)}{t}$ обмежена в околі точки t=0. Тоді $\dfrac{f(t)}{t}$ теж є оригіналом і $\dfrac{f(t)}{t}\overset{\cdot}{\to}\int\limits_p^{\infty}F(q)dq$.



Доведення. Проінтегруємо рівність $\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-qt}dt=F(q)$ по змінній $q=\rho+i\eta$ по горизонтальному променю, проведеному з точки $p=\xi+i\eta$, де $\xi\le\rho=\operatorname{Re}q<+\infty$:

$$\int\limits_p^{\infty}F(q)dq=\int\limits_p^{\infty}dq\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-qt}dt=\int\limits_{\xi}^{+\infty}d\rho\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-(\rho+i\eta)t}dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_{\xi}^{+\infty}f(t)e^{-(\rho+i\eta)t}d\rho=\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-i\eta t}dt\int\limits_{\xi}^{+\infty}e^{-\rho t}d\rho=\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-i\eta t}dt\cdot\left(-\frac{e^{-\rho t}}{t}\right)\Bigg|_{\xi}^{+\infty}=\int\limits_0^{+\infty}f(t)\frac{e^{-\xi t}}{t}e^{-i\eta t}dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-\xi t-i\eta t}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-(\xi+i\eta)t}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt\overset{\bullet}{\longleftarrow}\frac{f(t)}{t}.$$

Приклад: Знайти зображення інтегрального синуса $\operatorname{Si}t=\int\limits_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

- $\sin t \mathrel{\dot{\to}} \dfrac{1}{p^2+1} \Rightarrow \dfrac{\sin t}{t} \mathrel{\dot{\to}} \int\limits_p^{\infty} \dfrac{dq}{q^2+1} = -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{q}\right)\Bigg|_p^{\infty} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{p}\right) \Rightarrow$

$$\operatorname{Si} t = \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \mathrel{\dot{\to}} \frac{1}{p}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{p}\right).$$

Знайти зображення функції $\displaystyle\int\limits_0^t \frac{\cos\alpha\tau-\cos\beta\tau}{\tau}\,d\tau$.

- $\cos\alpha\tau-\cos\beta\tau \mathrel{\dot{\to}} \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}-\dfrac{p}{p^2+\beta^2} \Rightarrow \dfrac{\cos\alpha\tau-\cos\beta\tau}{\tau} \mathrel{\dot{\to}} \int\limits_p^{\infty}\left(\dfrac{q}{q^2+\alpha^2}-\dfrac{q}{q^2+\beta^2}\right)dq =$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(q^2+\alpha^2)-\ln(q^2+\beta^2)\right)\Big|_p^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{q^2+\alpha^2}{q^2+\beta^2}\right)\Bigg|_p^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{p^2+\alpha^2}{p^2+\beta^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{p^2+\beta^2}{p^2+\alpha^2}\right) \Rightarrow$$

$$\int\limits_0^t \frac{\cos\alpha\tau-\cos\beta\tau}{\tau}\,d\tau = \frac{1}{2p}\left(\ln\frac{p^2+\beta^2}{p^2+\alpha^2}\right).$$

7.3.8. Диференціювання зображення.

Якщо $f(t)$ – функція-оригінал, і $f(t)\mathrel{\dot{\to}}F(p)$, то $-t\cdot f(t)\mathrel{\dot{\to}}F'(p)$.

Доведення. $F(p)=\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot f(t)dt \mathrel{\dot{\leftarrow}} f(t)$. Диференціюючи це співвідношення по параметру p, отримаємо

$$F'(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\left(e^{-pt}\right)}{dp}\cdot f(t)dt=\int\limits_0^{+\infty}(-t)e^{-pt}\cdot f(t)dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot\left(-t\cdot f(t)\right)d \mathrel{\dot{\leftarrow}} -t\cdot f(t).$$

З його допомогою отримуються зображення степеневих функцій:

$$1\mathrel{\dot{\to}}\frac{1}{p}\Rightarrow -t\mathrel{\dot{\to}}\left(\frac{1}{p}\right)'=-\frac{1}{p^2}\text{, або } t\mathrel{\dot{\to}}\frac{1}{p^2};$$

$$-t\cdot t\mathrel{\dot{\to}}\left(\frac{1}{p^2}\right)'=-\frac{2}{p^3}\text{, або } t^2\mathrel{\dot{\to}}\frac{2}{p^3},$$

$$-t\cdot t\mathrel{\dot{\to}}\left(\frac{1}{p^2}\right)'=-\frac{2}{p^3}\text{, або } t^2\mathrel{\dot{\to}}\frac{2}{p^3};$$

$$-t\cdot t^2\mathrel{\dot{\to}}\left(\frac{2}{p^2}\right)'=-\frac{2\cdot 3}{p^4}\text{, або } t^3\mathrel{\dot{\to}}\frac{3!}{p^4}\text{, і } t^n\mathrel{\dot{\to}}\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

$$e^{\alpha t}\mathrel{\dot{\to}}\frac{1}{p-\alpha}\Rightarrow t\cdot e^{\alpha t}\mathrel{\dot{\to}}-\left(\frac{1}{p-\alpha}\right)'=\frac{1}{(p-\alpha)^2},$$

$$t^2\cdot e^{\alpha t}\mathrel{\dot{\to}}-\left(\frac{1}{(p-\alpha)^2}\right)'=\frac{2}{(p-\alpha)^3},\ \ldots,\ t^n\cdot e^{\alpha t}\mathrel{\dot{\to}}-\left(\frac{1}{(p-\alpha)^2}\right)'=\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

$$\mathrm{sh}\,t \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p^2-1} \Rightarrow t\cdot\mathrm{sh}\,t \xrightarrow{\cdot} -\left(\frac{1}{p^2-1}\right)' = \frac{2p}{\left(p^2-1\right)^2};\; t^2\cdot\mathrm{sh}\,t \xrightarrow{\cdot} -\left(\frac{2p}{\left(p^2-1\right)^2}\right)' = -\frac{2\left(3p^2+1\right)}{\left(p^2-1\right)^3}$$

7.4. Таблиця стандартних зображень.

Зведемо у таблицю отримані раніше зображення елементарних функцій.

	$f(t)$	$F(p)$			$f(t)$	$F(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}$		9.	$e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
2.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$		10.	$e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
3.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$		11.	$e^{\alpha t}\cdot\mathrm{sh}\,\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$
4.	$e^{\alpha t}\cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$		12.	$e^{\alpha t}\cdot\mathrm{ch}\,\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$
5.	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$		13.	$t\cdot\sin\beta t$	$-\left(\frac{\beta}{p^2+\beta^2}\right)'=\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$
6.	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$		14.	$t\cdot\cos\beta t$	$-\left(\frac{p}{p^2+\beta^2}\right)'=\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
7.	$\mathrm{sh}\,\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$		15.	$t\cdot\mathrm{sh}\,\beta t$	$-\left(\frac{\beta}{p^2-\beta^2}\right)'=\frac{2p\beta}{(p^2-\beta^2)^2}$
8.	$\mathrm{ch}\,\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$		16.	$t\cdot\mathrm{ch}\,\beta t$	$-\left(\frac{p}{p^2-\beta^2}\right)'=\frac{p^2-\beta^2}{(p^2-\beta^2)^2}$

Вправи для самостійного розв'язування.

Знайти початкову функцію, зображення якої:

$F(p)=\frac{5}{p^2+4}+\frac{20p}{p^2+9}$ $\qquad F(p)\frac{7}{p^2+2p+10}$ $\qquad F(p)\frac{7}{p^2+10p+41}$