# Розділ 3.

# Вектори.

## 3.1. Основні поняття, означення.

***Означення 1.*** *Вектором* називається напрямлений відрізок.

Позначення: **a**, $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.

***Означення 2.*** Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

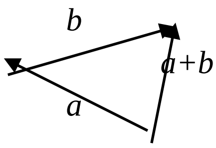
***Означення 3.*** Вектор називається *нульовим*, якщо його початкова і кінцева точки співпадають. Нульовий вектор не має певного напрямку.

***Означення 4.*** Два вектори називаються*рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакову довжину (модуль) і однаковий напрямок.

*Зауваження.* Таким чином, ми вивчаємо так звані вільні вектори, початкова точка яких може бути вибрана довільно. Вектори, для яких важлива точка прикладання, наз. зв'язаними і використовуються у деяких розділах фізики.

## 3.2. Лінійні операції над векторами.

***Означення 5.*** *Сумою* $a+b$ векторів $a$ і $b$ називається вектор, що виходить з початку вектора $a$ у кінець вектора $b$, якщо початок вектора $b$ співпадає з кінцем вектора $a$.




*Зауваження.* Таке правило додавання векторів називається*правилом трикутника.*

***Властивості додавання:***

*Властивість 1.*$a+b=b+a$.

*Зауваження.* Є ще одне  правило додавання векторів – *правило паралелограма*: сумма векторів $a$ і $b$ є діагональ паралелограма, побудованого на них, як на сторонах, що виходить з їх спільного початку.

*Властивість 2.*$(a+b)+c=a+(b+c)$.

*Властивість 3.* Для будь-якого вектора ***a*** існує нульовий вектор $O$ такий, що $a+O=a$.

*Властивість 4.* Для кожного вектора ***a*** існує протилежний йому вектор $a'$такий, що $a+a'=O$.

***Означення 6.*** *Різницею* $a–b$ векторів $a$ і $b$ називається такий вектор $c$, який у сумі з вектором $b$дає вектор $a$.

***Означення 7.*** *Добутком* $ka$ вектора $a$ на число $k$ називається вектор $b$, колінеарний вектору$a$, що має модуль, рівний $|k||a|$, і напрямок, що співпадає з напрямком $a$при $k>0$, і протилежний$a$ при $k<0$.

***Властивості множення вектора на число*:**

*Властивість 1. k(a+b)=ka+kb.*

*Властивість 2. (k+m)a=ka+ma.*

*Властивість 3.k(ma)=(km)a.*

*Наслідок.* Якщо ненульові вектори $a$ і $b$ колінеарні, то існує таке число $k$, що$b=ka$.

## 3.3. Лінійна комбінація векторів.

***Означення 8.*** *Лінійною комбінацією* векторів $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ називається вираз виду:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + ... + k_n a_n. \qquad (3.1)$$

де $k_i$– числа.

***Означення 9.*** Вектори $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі числа $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$, не всі рівні нулю, що відповідна лінійна комбінація векторів рівна нулю, тобто

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + ... + k_n a_n = 0. \qquad (3.2)$$

Якщо ж рівність (3.2) можлива тільки при усіх $k_i = 0$, вектори називаються*лінійнозалежними*.

*Зауваження 1*. Якщо система векторів містить нульовий вектор, то вона лінійно залежна.

*Зауваження 2*. Якщо серед $n$ векторів які-небудь ($n$–1) лінійно залежні, то й усі$n$ векторів лінійно залежні.

*Зауваження 3*. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.

***Означення 10.*** Вектори називаються*компланарними*, якщо вони лежать або у одній площині, або на паралельних площинах.

*Зауваження 4*. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність.

*Зауваження 5*. Будь-які чотири вектори у тривимірному просторі лінійно залежні.

## 3.4. Базис. Афінна та декартова системи координат.

***Означення 11.*** Два лінійно незалежні вектори на площині (або три лінійно незалежні вектори в просторі) утворюють *базис*, якщо будь-який вектор площини (простору) може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації. Числові коефіцієнти цієї лінійної комбінації називаються *координатами* даного вектора у базисі, що розглядається: якщо $a, b, c$ – базис і $d=ka+mb+pc$, то числа $k, m, p$ є координати вектора $d$ в базисі $a, b, c$.

***Властивості базису*:**

1. Будь-які два неколінеарних вектори утворюють базис на площині, а будь-які три некомпланарних вектори – базис у просторі.
2. Розклад даного вектора по даному базису єдиний, тобто його координати в даному базисі визначаються єдиним чином.
3. При додаванні двох векторів їх координати відносно будь-якого базисма додаються.

4. При множенні вектора на число усі його координати множаться на це число.

***Означення 12.*** *Проекцією вектора AB* на вісь $Ox$ називається довжина напрямленого відрізка $A^{/}B^{/}$ осі $Ox$, де $A^{/}$ і $B^{/}$ – основи перпендикулярів, опущених з точок $A$ і $B$ на вісь $Ox$.

Позначення: $пр_u a$.

***Властивості проекції*:**

1. $Пр_{Ox}a = |a|\cos\varphi$, де $\varphi$ – кут між $a$ і віссю $Ox$.
2. При додаванні двох векторів їх проекції на будь-яку вісьдодаються.
3. При множенні вектора на число його проекція на будь-яку вісь множиться на це число.

*Зауваження.* Властивості 2 і 3 назвемо лінійними властивостями проекції.

Розглянемо декартову систему координат, базис якої утворюють в просторі три попарно ортогональних одиничних вектори *i, j, k.* Тоді будь-який вектор *d*може бути представлений у вигляді їх лінійної комбінації:

$$d = Xi + Yj + Zk\ . \qquad (3.3)$$

***Означення 13.*** Числа *X, Y, Z* називаються *декартовими координатами вектора d.*

*Зауваження.* Декартові координати вектора рівні його проекціям на осі $Ox$, $Oy$ і $Oz$ декартової системи координат.

***Означення 14.*** Косинуси кутів, утворених вектором з осями декартової системи координат, називаються його *напрямними косинусами*.

***Властивості напрямних косинусів*:**

1. $X = |d|\cos\alpha,\ \ Y = |d|\cos\beta,\ \ Z = |d|\cos\gamma.$
2. $\cos\alpha = \dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$.
3. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

## 3.5. Скалярний добуток векторів.

***Означення.*** *Скалярним добутком двох ненульових векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (3.4)$$

де $\varphi$– кут між векторами. Використовуючи формулу проекції вектора, можна також записати:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|пр_{\vec{a}}\vec{b}\ .$$

***Властивості скалярного добутку*:**

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

4. $(\vec{a}\cdot\vec{a}) = |\vec{a}|^2;\ \sqrt{(\vec{a})^2} = |\vec{a}|$.

2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.

5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, і навпаки, $\vec{a}\perp\vec{b}$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0$.

Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тоді, використовуючи властивості скалярного добутку, умови $\vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$, маємо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \quad (3.5)$$

Отже, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

З рівності (3.5) випливає, що:

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

2. Кут між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

## 3.6. Векторний добуток векторів.

***Означення.*** *Векторним добутком вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) *довжина вектора* $|\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярний* до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) *вектор* $\vec{c}$ *спрямований* так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

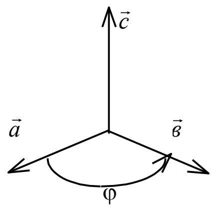



Рис. 3.1

*Модуль векторного добутку* двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

***Властивості векторного добутку***:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$ – колінеарні вектори.
2. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.
3. $(\lambda\vec{a}\times\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.
4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

$$\begin{gathered}\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)= \\ =\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}\end{gathered}\tag{3.6}$$

або

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\tag{3.7}$$

## 3.7. Мішаний добуток векторів.

***Означення.*** *Мішаним добутком векторів* $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

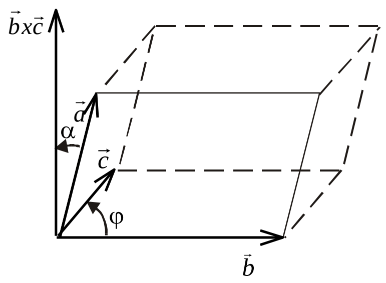



Рис. 3.2

Розглянемо геометричний зміст змішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед (рис. 3.2).

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ (рис. 3.2). Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ $s=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$. Висота дорівнює $|\vec{a}|\cos\alpha$. Отже, остаточно маємо:

$$V=|\vec{a}|\cos\alpha\cdot\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\sin\varphi=|\vec{a}|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cos\alpha=\left|\vec{a}\left(\vec{b}\times c\right)\right|\tag{3.8}$$

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. З рівності (3.8) маємо умову компланарності трьох векторів $\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}$.

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0.$$

Ураховуючи формули (3.6) і (3.7) знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}\vec{j}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}\vec{k}\right)=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix},$$

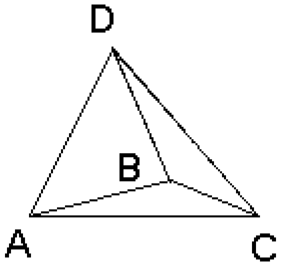
або $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.

***Властивості мішаного добутку***:

1. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.
2. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$.

Дано координати вершин піраміди $A(0;0;2)$, $B(2;2;1)$, $C(-2;1;0)$ та $D(-1;2;0)$. Знайти:

1) довжину ребра $AB$;
2) написати рівняння ребра $AB$;
3) обчислити кут між ребрами $AB$ і $AC$;
4) обчислити площу основи $ABC$;
5) зробити схематичний малюнок піраміди.




● Зробимо схематичний малюнок піраміди.

1) Знайдемо довжину ребра $AB$. Одержимо

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{4+4+1}=3.$$

2) Напишемо рівняння ребра $AB$:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-2}{1-2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

3) Для обчислення косинуса кута між ребрами $AB$ і $AC$ знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{AB}=\{2-0;2-0;1-2\}=\{2;2;-1\}$ і $\overrightarrow{AC}=\{-2-0;1-0;0-2\}=\{-2;1;-2\}$. Тоді одержимо

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot(-2)+2\cdot1-1\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{-4+2+2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}=\frac{0}{9}=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}\cdot$$

4) Площа основи $\Delta ABC$ дорівнює половині площі паралелограма, який побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Тобто $S_\Delta=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-4+1)+\vec{j}\,(-4-2)+\vec{k}\,(2+4)=-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k};$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}\right|=\sqrt{(-3)^2+6^2+6^2}=\sqrt{81}=9;$$

$$S_\Delta=\tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\tfrac{1}{2}\cdot9=\tfrac{9}{2}=4,5\ (\text{кв.одиниць}).$$

***Вправи для самостійного розв'язування.***

Дано координати вершин піраміди $ABCD$. Знайти:

1) довжину ребра $AB$;
2) написати рівняння ребра $AB$;
3) обчислити кут між ребрами $AB$ і $AC$;
4) обчислити площу основи $ABC$;
5) зробити схематичний малюнок піраміди.

**1.** $A(0;-1;2),\ B(2;1;1),\ C(-2;0;0),\ D(-1;1;0).$

**2.** $A(1;-1;2),\ B(3;1;1),\ C(-1;0;0),\ D(0;1;0).$

**3.** $A(2;-1;2),\ B(4;1;1),\ C(0;0;0),\ D(1;1;0).$

**4.** $A(3;-1;2),\ B(5;1;1),\ C(1;0;0),\ D(2;1;0).$

**5.** $A(4;-1;2),\ B(6;1;1),\ C(2;0;0),\ D(3;1;0).$

**6.** $A(-1;-1;2),\ B(1;1;1),\ C(-3;0;0),\ D(-2;1;0).$

**7.** $A(-2;-1;2),\ B(0;1;1),\ C(-4;0;0),\ D(-3;1;0).$

**8.** $A(-3;-1;2),\ B(-1;1;1),\ C(-5;0;0),\ D(-4;1;0).$

**9.** $A(-4;-1;2),\ B(-2;1;1),\ C(-6;0;0),\ D(-5;1;0).$

**10.** $A(-5;-1;2),\ B(-4;1;1),\ C(-7;0;0),\ D(-6;1;0).$