Розділ 2.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2.1. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Нехай маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими x_1, x_2 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

В даному пункті розглядатимемо лише такі системи.

Означення. *Розв'язком* такої системи називається вектор $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, де c_1, c_2 – числа, для якого мають місце такі числові рівності:

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = b_1;$$
$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = b_2.$$

Система може не мати розв'язків, може мати єдиний розв'язок, або мати більше одного розв'язку.

Приклад: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$ • Дана система розв'язків не має.

Приклад: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$ • Дана система має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Приклад: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$ • Дана система має безліч розв'язків $\begin{pmatrix} a \\ 1-2a \end{pmatrix}$, де a – довільне число.

Справді, $2a + (1-2a) = 1$ і $4a + 2(1-2a) = 2$ для довільного числа a.

Означення. Дві системи рівнянь називаються *рівносильними* (*еквівалентними*), якщо вони мають однакові множини розв'язків. Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Система рівнянь називається *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку, тобто множина розв'язків є порожня множина Ø.

Означення. Матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається матрицею системи (2.1). Систему (2.1) зручно записувати в матричному вигляді.

$$A\vec{x}=\vec{b}, \tag{2.2}$$

де $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Форму (2.2) запису системи (2.1) називають *матричною*.

Теорема. *Система* (2.1) *має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриця цієї системи неособлива.*

Наслідок. Система $A\vec{x}=\vec{o}$, де $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{o}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ має лише нульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\det(A)\neq 0$.

2.2. Системи лінійних рівнянь: основні означення.

Нехай маємо систему з k лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \tag{2.3}$$

де $a_{ij}\left(i=1,2,\ldots,k;\quad j=1,2,\ldots,n\right)$ – деякі числа. Зокрема, можливо, що $k=1$.

Означення. *Розв'язком* системи (2.3) називається будь-яка впорядкована сукупність чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, яка задовольняє систему, що означає наступне: якщо в кожне рівняння системи замість x_i підставити $c_i\left(i=1,2,\ldots,n\right)$, то одержимо k правильних числових рівностей. Отже, розв'язок системи можна вважати вектором з n компонентами.

Означення. Систему називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок; у протилежному випадку система називається *несумісною* (тобто коли не існує жодної впорядкованої системи чисел $\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$, що задовольняє систему.

Система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0; \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$ є сумісною, оскільки $\vec{c}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ – її розв'язок.

• Справді, $2\cdot 1+\left(-2\right)=0$ і $1+\left(-2\right)=-1$ – сукупність правильних числових рівностей.

Система $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ є несумісною.

• Справді, якби вектор $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ був її розв'язком, то тоді б $0 = c_1 + c_2 - c_3 = 1$, але $0 \neq 1$, тобто ми отримали б суперечність.

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (2.3) можна записати у матричному вигляді:

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{2.4}$$

Матриця $A = \left[a_{ij} \right]$ називається матрицею системи (2.3). Приєднавши до матриці *A* стовпець вільних членів $\vec{b}$, одержимо так звану розширену матрицю системи:

$$\left(A \middle| \vec{b} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array} \right) \tag{2.5}$$

Зрозуміло, що система лінійних рівнянь однозначно визначається своєю розширеною матрицею.

Означення. Дві системи називаються *рівносильними* (*еквівалентними*), якщо множини їх розв'язків співпадають. З цього випливає, що несумісні системи рівносильні.

2.3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним способом.

Матричний спосіб можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають, а крім того, матриця системи має обернену.

Запишемо систему (2.3) у матричному вигляді. Для цього введемо матриці виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Користуючись правилом множення матриць, систему (2.3) запишемо у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B \tag{2.6}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{2.7}$$

де A^{-1} є оберненою матрицею до матриці A.

Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$ матричним способом.

● Складемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи будемо шукати у вигляді (2.7). Необхідно знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A. Обернена матриця існує, бо $\Delta A = -3 \neq 0$. Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(4+8) = -12,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6-3) = 9,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7.$$

Складемо обернену матрицю. Одержимо:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Помножимо обернену матрицю на матрицю B і одержимо шукану матрицю X. Маємо

$$X = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 - 1 + 4 \\ -12 + 0 + 9 \\ 9 + 1 - 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

2.4. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.

Це правило можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають. Для простоти викладу розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими ($n = m = 3$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2.8}$$

Позначимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Означення. Визначник Δ називають *визначником системи* і його складають з коефіцієнтів при невідомих, а у визначниках $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ коефіцієнти при відповідних невідомих замінені вільними членами.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (2.8) має єдиний розв'язок. Невідомі визначають за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \tag{2.9}$$

і такий спосіб визначення невідомих називають *правилом Крамера*.

Якщо $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, то система (2.8) має безліч розв'язків, а правило Крамера застосувати не можна.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників Δx_i, $i = 1, 2, 3$, відмінний від нуля, то система (2.8) несумісна.

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

● Складемо і обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8+2) - (4+8) + 3(1+8) = 3 \cdot (-6) - 12 + 27 = -18 - 12 + 27 = -3;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-8+2) - (4+2) + 3(1+2) = -6 - 6 + 9 = -3;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4+2) - (4+8) + 3(1-4) = 18 - 12 - 9 = -3;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2-1) - (1-4) + (1+8) = -9+3+9 = 3.$$

Підставимо одержані результати у формули (2.9). Маємо

$$x_1 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_3 = \frac{3}{-3} = -1.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

2.5. Ранг матриці. Прямокутні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2.5.1. Ранг матриці.

Означення. *Рангом* матриці називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r = r(A)$.

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} , \tag{2.10}$$

де a_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$ – коефіцієнти при невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, b_k $(k = \overline{1,m})$ – вільні члени.

Для того, щоб система лінійних рівнянь (2.10) була сумісною (тобто, мала розв'язок), необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи $r(A)$ дорівнював рангу її розширеної матриці $r(B)$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots & \ldots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots & \ldots.. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Якщо система лінійних рівнянь (2.10) сумісна, то вона має один або безліч розв'язків.

2.5.2. Теорема Кронекера–Капеллі.

(Леопольд Кронекер (1823–1891) – німецький математик; Альфредо Капеллі (1855–1910) – італійський математик).

Теорема Кронекера-Капеллі – критерій сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь: *Ax*=*b*.

СЛАР має розв'язки тоді і тільки тоді,коли ранг матриці A дорівнює рангу її розширеної матриці $\boldsymbol{B}$.

Причому система має єдине рішення, якщо ранг дорівнює числу невідомих і нескінченно багато рішень, якщо ранг менше числа невідомих.

Теорема *(Кронекера–Капеллі). Для того щоб неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь (3) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A виду (2) дорівнював рангу розширеної матриці*

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отже, стовпець вільних членів системи є лінійною комбінацією стовпців матриці $\boldsymbol{A}$, коефіцієнти такої лінійної комбінації і будуть розв'язком СЛАР.

2.6. Розв’язування СЛАР методом Гаусса.

Для розв’язування систем лінійних рівнянь застосовують метод, який називають методом Гаусса або методом виключення змінних. Суть методу Гауссарозв’язування систем лінійних рівнянь розглянемо за допомогою матриць. Його ідея полягає у зведенні розширеної матриці системи за допомогою елементарних перетворень матриці до трикутної матриці.

Означення. *Трикутною* називають матрицю, у якої під головною діагоналлю всі елементи рівні нулю.

Елементарними перетвореннями матриці є такі перетворення:

1) перестановка двох рядків матриці;
2) множення всіх елементів рядка на одне і те ж число, відмінне від нуля;
3) додавання елементів якого-небудь рядка матриці, помножених на одне і те ж число, до відповідних елементів іншого рядка;
4) відкидання рядків матриці, елементами яких є нулі.

Проводячи елементарні перетворення над матрицею системи, отримують нову систему рівнянь, яка еквівалентна заданій, але з новими коефіцієнтами та вільними членами. Одержують трикутну систему рівнянь, із якої визначають невідомі.

Методом Гаусса розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=2, \\ x_1+x_2+3x_3=4, \\ 2x_1+2x_2-4x_3=-2. \end{cases}$$

• Складемо розширену матрицю системи і будемо робити над нею необхідні елементарні перетворення, щоб одержати трикутну матрицю. На початку переставимо перше і третє рівняння місцями, а потім помножимо елементи першого рядка відповідно на мінус три, мінус два та мінус два і одержані результати додамо відповідно до елементів другого, третього та четвертого рядків. Аналогічно вчинимо з елементами другого, а потім третього рядків. Одержимо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Система лінійних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ \quad x_2 + 10x_3 = 10, \\ \qquad x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_2 = 10 - 10x_3 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

З третього рівняння $x_3 = 1$. З другого рівняння одержали x_2, а з першого одержуємо x_1 Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$

Вправи для самостійного розв'язування.

1–10. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь а) методом Крамера; б) методом матричного числення.

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 8, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 - 6x_3 = 8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 10. \end{cases}$

11-20. Методом Гаусса розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + -3x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$