Розділ 1.

Матриці та визначники.

1.1. Матриці.

Матриця вперше з’явилась в середині XIX століття в роботах англійських математиків У. Гамільтона і А. Келі (У. Гамільтон (1805–1865) – ірландський математик, іноземний член Петербурзької Академії Наук, праці по теорії комплексних чисел. Побудував систему чисел – *кватерніонів* (чотири); А. Келі (1821–1895) – англійський математик, іноземний член Петербурзької Академії Наук, праці по теорії і алгебрі, квадратичні формули, проекційна геометрія, математичний аналіз і астрономія), на даний момент широко використовуються в прикладній математиці, вони значно спрощують розгляд складних систем рівнянь.

Означення. *Матрицею* називається прямокутна таблиця, складена з чисел чи функцій. Ми будемо розглядати тільки дійсні числові матриці. Така матриця має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Означення. Якщо матриця має k рядків і n стовпців, то про таку матрицю кажуть, що вона має розмір $k \times n$.

Означення. Якщо кількість рядків і кількість стовпців матриці рівні, то така матриця називається *квадратною*, а кількість її рядків (стовпців) називається її *порядком*.

Матрицю також позначають великими латинськими літерами або за допомогою відповідних малих літер з двома індексами:

$$A = \left[a_{ij} \right] = \left\| a_{ij} \right\|, \qquad B = \left[b_{ij} \right] = \left\| b_{ij} \right\|.$$

Означення. Дві матриці однакових розмірів називають *рівними*, якщо їх відповідні елементи рівні.

Наприклад, матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

не є рівними ($A \neq B$), оскільки $a_{23} = 8,\ b_{23} = 1$.

1.1.1. Види матриць.

Означення. Матриця, що складається з одного рядка (стовпця), називається *матрицею-рядком* (*матрицею-стовпцем*).

Матрицю-рядок також називають *рядком*, а матрицю-стовпець – *стовпцем*. Використовуються також наступні терміни: вектор-рядок, вектор-стовпець. Вектор, що складається з n елементів, називається *n-вимірним*.

Означення. Матриця *O* довільних розмірів, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нуль-матрицею*:

$$\text{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Означення. Рядок (стовпець), усі елементи якого є нулі, називається *нульовим* рядком (стовпцем) або нуль-вектором.

Означення. *Одиничною* матрицею називається квадратна матриця *En*-го порядку наступного вигляду:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = [\delta_{ij}], \qquad (1.3)$$

де $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & якщо\ i = j \\ 0, & якщо\ i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера.

Означення. Квадратна матриця *D* називається *діагональною*, якщо вона має наступний вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.4)$$

тобто $d_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$. Таку матрицю також позначають наступним чином:

$$D = diag\{d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}\}.$$

Наприклад, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = diag\ \{1, 0, 2\}$.

Зрозуміло, що одинична матриця є діагональною.

Означення. Квадратна матриця *A* називається *нижньою трикутною*, якщо вона має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.5)$$

тобто $a_{ij} = 0$, якщо $i<j$.

Означення. Квадратна матриця *A* називається *верхньою трикутною*, якщо вона має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

тобто $a_{ij}=0$, якщо $i>j$.

Матриця, яка є або нуль-матрицею, або матрицею виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

де $a_{11}\neq 0,\ a_{22}\neq 0, \dots,\ a_{kk}\neq 0$ називають *верхньою трапецієподібною* матрицею.

1). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нуль-матриця; 2). $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ – вектор-стовпець;

3). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця; 4). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця;

5). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ – нижня трикутна матриця;

6). $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – верхні трапецієподібні матриці.

Означення. *Східчастою* називають матрицю A, яка має наступні властивості:

1). Якщо i-ий рядок нульовий, то (i+1)-ий рядок також нульовий;

2). Якщо перші ненульові елементи i-го і (i+1)-го рядків є в стовпцях K_i і K_{i+1} відповідно, то $K_i<K_{i+1}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – східчаста матриця, де $K_1=2,\ K_2=4,\ K_3=5$.

1.1.2. Означення дій над матрицями.

Означення. *Сумою* двох матриць однакових розмірів A і B називають матрицю C, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B, тобто

$$C=A+B=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \dots & a_{kn}+b_{kn} \end{pmatrix}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right] \qquad (1.8)$$

(або $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для всіх $i,\ j$).

Означення .*Добутком* матриці A на число λ називають таку матрицю B, кожний елемент якої дорівнює добутку числа λ і відповідного елемента матриці A, тобто:

$$B=\lambda A=\lambda\left[a_{ij}\right]=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \end{pmatrix}=\left[\lambda a_{ij}\right] \qquad (1.9)$$

(або $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ для всіх $i,\ j$).

Означення. Матрицю $(-1)\ A$ позначатимемо через $-A$ і називатимемо її матрицею, *протилежною* до матриці A.

Означення. Під *різницею* матриць A і B ($A-B$) будемо розуміти суму $A+(-B)$. Зрозуміло, що $A-A=O$, $A+O=O+A=A$ для всякої матриці A і нуль-матриці O тих же розмірів.

Означення. *Транспонованою* до матриці A розмірів $k\times n$ називається така матриця B розмірів $n\times k$, що $b_{ij}=a_{ji}$ для всіх $i,\ j$. Тобто матриця B має за рядки відповідні стовпці матриці A.

Транспоновану матрицю позначають через A^T, а елементи її через $a^T{}_{ij}$ $(=a_{ji})$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Для введення добутку двох матриць визначимо спочатку добуток рядка і стовпця однакової довжини (рядок – лівий множник, стовпець – правий множник, бо порядок співмножників тут важливий !):

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}=\left(a_1b_1+a_2b_2+\ \dots\ +a_nb_n\right).$$

У результаті одержимо квадратну матрицю першого порядку, яку можна ототожнити з її єдиним елементом $a_1b_1 + a_2b_2 + \ \ldots \ + a_nb_n$. Добуток *AB* матриць *A* і *B* визначаємо тільки тоді, коли кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*.

Нехай матриця *A* має розмір $k \times n$, а матриця $B - n\times r$.

Означення. *Добутком* матриць *A* і *B* називається матриця $C = AB$, що має розмір $k\times r$, а її елемент $c_{i\,j}$ дорівнює добутку *i*-го рядка матриці *A* і *j*-го стовпця матриці *B*:

$$c_{\text{ij}} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \ \ldots \ + a_{in}b_{ij}, \tag{1.10}$$

$i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, r$.

1). $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 \end{pmatrix}$;

2). $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 \\ b_2a_1 & b_2a_2 \end{pmatrix}$;

3). $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda + a_{12}y \\ a_{21}\lambda + a_{22}y \end{pmatrix}$;

4). $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_{11} + a_{12}\lambda_{21} & a_{11}\lambda_{12} + a_{12}\lambda_{22} \\ a_{21}\lambda_{11} + a_{22}\lambda_{21} & a_{21}\lambda_{12} + a_{22}\lambda_{22} \\ a_{31}\lambda_{11} + a_{32}\lambda_{21} & a_{31}\lambda_{12} + a_{32}\lambda_{22} \end{pmatrix}$.

Нехай *A* – квадратна матриця *n*-го порядку, *E* – одинична матриця *n*-го порядку, а *O* – квадратна нуль-матриця *n*-го порядку. Тоді легко перевірити, що:

$$AE = EA = A,$$
$$AO = OA = O.$$

Слід зауважити, що добуток двох ненульових матриць може бути нульовою матрицею (нуль-матрицею).

Справді, $\begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}5 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

Квадратна матриця *Bn*-го порядку називається *оберненою* до квадратної матриці *An*-го порядку, якщо

$$AB = BA = E.$$

Обернену матрицю до матриці *A* позначають через A^{-1}.

Нехай $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Тоді $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ – обернена матриця до матриці *A*.

1.1.3. Властивості додавання матриць та множення матриць на числа.

Додавання матриць та множення матриць на числа мають наступні властивості:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*асоціативність*);
1. $A + O = O + A = A$;
2. $A + (-A) = (-A) + A = O$;
3. $A + B = B + A$ (*комутативність*);
4. $1 \cdot A = A$;
5. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$;
6. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$;
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$

(для довільних матриць A, B, C однакових розмірів і для довільних чисел λ, μ).

Доведемо властивості 1 і 7. Всі інші властивості доводяться аналогічно і залишаються для самостійного доведення читачу.

1. $A + (B + C) = \left[a_{ij}\right] + \left(\left[b_{ij}\right] + \left[c_{ij}\right]\right) = \left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij} + c_{ij}\right] =$

$= \left[a_{ij} + \left(b_{ij} + c_{ij}\right)\right] = \left[\left(a_{ij} + b_{ij}\right) + c_{ij}\right] = \left[a_{ij} + b_{ij}\right] + \left[c_{ij}\right] =$

$= \left(\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]\right) + \left[c_{ij}\right] = (A + B) + C.$

(тут ми використали асоціативність додавання чисел).

7. $(\lambda + \mu)A = (\lambda + \mu)\left[a_{ij}\right] = \left[(\lambda + \mu)a_{ij}\right] = \left[\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}\right] =$

$= \left[\lambda a_{ij}\right] + \left[\mu a_{ij}\right] = \lambda\left[a_{ij}\right] + \mu\left[a_{ij}\right] = \lambda A + \mu A$

(тут ми використали дистрибутивність множення відносно додавання для чисел).

1.1.4. Символи суми.

Суму $a_1 + a_2 + ... + a_n$ позначають через $\sum_{i=1}^{n} a_i$, де i називається *індексом підсумовування* і його позначення ролі не відіграє, тобто його можна замінити будь-якою іншою буквою:

1). $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{u=1}^{n} a_u$;

Очевидними також є й інші властивості символу суми:

2). $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ (*адитивність*);

3). $\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$ (*однорідність*);

де λ – будь-яке число (яке не залежить від i).

Часто використовуються так звані подвійні суми, які необхідні для підсумовування доданків з двома індексами.

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\textit{або} \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} \right),$$

тобто для знаходження суми всіх елементів прямокутної таблиці (матриці):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Тут *i, j* називаються *першим* і *другим індексами підсумовування* відповідно.

Очевидно, що сума *S* всіх елементів даної таблиці дорівнює

$$S=\left(a_{11}+a_{12}+...+a_{1n}\right)+\ \left(a_{21}+a_{22}+...+a_{2n}\right)+\ \dots+\left(a_{k1}+a_{k2}+...+a_{kn}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}+\sum_{j=1}^{n}a_{2j}+...+\sum_{j=1}^{n}a_{kj}=S_1+S_2+...S_k,$$

де $S_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij} \quad \left(i=1,...,k\right)$.

Тому $S=\sum\limits_{i=1}^{k}S_i=\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\right)$.(знаходимо суму всіх сум елементів рядків).

З другого боку,

$$S=\left(a_{11}+a_{21}+...+a_{k1}\right)+\left(a_{12}+a_{22}+...+a_{k2}\right)+...+\left(a_{1n}+a_{2n}+...+a_{kn}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}a_{i1}+\sum_{i=1}^{k}a_{i2}+...+\sum_{i=1}^{k}a_{in}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\right).$$

(Знаходимо суму всіх сум елементів стовпців).

Таким чином, має місце наступна *властивість символу подвійної суми*:

4). $\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{k}a_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_{ij}\right).$

Взагалі кажучи, символ суми може записуватися у найрізноманітніших ситуаціях. Його ж зміст може бути зрозумілим з контексту.

Тепер нам легко буде оперувати з матрицями. Наприклад, елемент добутку $C=AB$ матриць A і B розмірів $k\times n$ і $n\times r$, відповідно, записується наступним чином:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}\,.$$

1.1.5. Властивості множення матриць.

1. Множення матриць не є комутативним, тобто існують такі матриці A і B, для яких AB ≠BA.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ i\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

2. (AB)C = A(BC) для довільних матриць A, B, C, для яких існують добутки AB і BC (асоціативність).

Справді, нехай *A* має розмір $k\times n,\quad B-n\times r,\quad C-r\times t$. Покладемо *AB* = *U* і *BC* = *V*. Зрозуміло, що *U* має розмір $k\times r,$ а $V-n\times t$. Тоді нам треба довести, що *UC* = *AV*. Доведемо це.

Елемент добутку *UC* дорівнює $\sum\limits_{S=1}^{r}u_{is}c_{sj}$, але $u_{is}=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{il}b_{ls}$, тобто

$\sum_{S=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{ls}\right)c_{sj} = \sum_{S=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{ls}c_{sj}\right)$ – елемент добутку *UC* (використана властивість 3 символу суми).

Знайдемо тепер елемент добутку *AV*: $\sum_{l=1}^{n} a_{il}v_{lj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{S=1}^{r} b_{ls}c_{sj}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{S=1}^{r} a_{il}b_{ls}c_{sj}\right)$ (використана властивість 3 символу суми).

Використавши властивість 4 подвійних сум, матимемо, що *UC* = *AV*.

3. $A(B+C)=AB+AC,$ *якщо* B *і* C *мають однаковий розмір та існує* AB*;* $(A+B)C = AC+BC$*, якщо A і B мають однаковий розмір та існує AC (дистрибутивність).*

Доведемо першу рівність за вказаних умов. Нехай *A* має розмір $k\times n,$ а *B* і *C* - $n\times r$. Тоді елемент добутку *A* (*B* + *C*) дорівнює

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is}\left(b_{sj}+c_{sj}\right) = \sum_{s=1}^{n}\left(a_{is}b_{sj}+a_{is}c_{sj}\right).$$

Елементи добутків *AB*, *AC* дорівнюють відповідно,

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \quad \sum_{S=1}^{n} a_{is}c_{sj}.$$

Тому елемент матриці *AB* + *AC* дорівнює

$$\sum_{S=1}^{n} a_{is}b_{sj} + \sum_{S=1}^{n} a_{is}c_{sj} = \sum_{S=1}^{n}\left(a_{is}b_{sj}+a_{is}c_{sj}\right)$$

(тут була використана властивість 2 символу суми – *адитивність*).

Отже, відповідні елементи матриць *A* (*B* + *C*), *AB* + *AC* рівні. Тому перша рівність доведена. Друга рівність доводиться аналогічно.

4. AE = EA = A, де *A* – квадратна матриця, а *E* - одинична матриця того ж порядку *n*.

Справді, елемент добутку *AE* дорівнює $\sum_{S=1}^{n} a_{is}\delta_{sj} = a_{ij}$, а елемент добутку *EA* дорівнює $\sum_{S=1}^{n} \delta_{is}a_{sj} = a_{ij}.$

5. Якщо квадратна матриця A має обернену матрицю, то обернена матриця єдина.

Справді, нехай *B* і *C* – обернені до *A* матриці. Тоді *AB* = *BA* = *E* і *AC* = *CA* = *E*. Отже *C* = *CE* = *C* (*AB*) = (*CA*) *B* = *EB* = *B*(тут використані властивості 4, 2 множення матриць).

6. Якщо квадратні матриці A і B мають обернені, то $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ і $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (перевірити самостійно!)

1.1.6. Властивості транспонування.

1. $\left(A^T\right)^T = A$ для довільної матриці *A* (*ідемпотентність*);
2. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$,де *A* і *B* – довільні матриці однакових розмірів (*адитивність*);
3. $\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T$ для довільної матриці *A* і довільного числа *λ* (*однорідність*);

4. $\left(AB\right)^T = B^T A^T$ для довільних матриць A і B, для яких існує добуток AB;

5. $\left(AA^T\right)^T = AA^T, \quad \left(A^T A\right)^T = A^T A$

Доведемо ці властивості.

1. Очевидно.

2. Справді, $\left(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right)^T = \left(\left[a_{ij}+b_{ij}\right]\right)^T = \left[\left(a_{ij}+b_{ij}\right)^T\right] = \left[a_{ji}+b_{ji}\right] =$

$$=\left[a_{ji}\right]+\left[b_{ji}\right]=\left[a_{ij}^{T}\right]+\left[b_{ij}^{T}\right] = \left[a_{ij}\right]^T + \left[b_{ij}\right]^T.$$

3. Справді, $\left(\lambda\left[a_{ij}\right]\right)^T = \left(\left[\lambda a_{ij}\right]\right)^T = \left[\left(\lambda a_{ij}\right)^T\right] = \left[\lambda a_{ji}\right] = \lambda\left[a_{ji}\right] = \lambda\left[a_{ij}\right]^T.$

4. Нехай $U = AB$. Тоді $u_{ij}^T = u_{ji} = \sum_{S=1}^{n} a_{js} b_{si} = \sum_{S=1}^{n} b_{is}^T a_{sj}^T$, тобто $U^T = B^T A^T$.

5. Доведемо першу з рівностей. Використаємо попередню і першу властивості:

$$\left(AA^T\right)^T = \left(A^T\right)^T A^T = AA^T.$$

Матриця A, для якої $A = A^T$, називається *симетричною*.

Таким чином, матриця AA^T завжди симетрична.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 7\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}$$ – симетрична матриця.

1.1.7. Обернена матриця у випадку квадратних матриць другого порядку.

Розглянемо матрицю $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -6 & 4\end{pmatrix}$. Припустимо, що матриця А має обернену матрицю $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$. Тоді $AX = XA = E$, тобто

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

- З рівності $AX = E$ отримаємо дві системи:

$$\begin{cases}3x_{11}-2x_{21}=1;\\ -6x_{11}+4x_{21}=0\end{cases} \text{ і } \begin{cases}3x_{12}-2x_{22}=0;\\ -6x_{12}+4x_{22}=1.\end{cases}$$

Оскільки $3x_{11}-2x_{21}=1$, то $-2\left(3x_{11}-2x_{21}\right)=-2$, тобто $-6x_{11}+4x_{21}=-2$. Очевидно, що така рівність і друга рівність системи виконуватися одночасно не можуть. Отже маємо протиріччя. Таким чином, матриця A оберненої матриці не має.

Нехай матриця $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. Покажемо, що A має обернену матрицю і знайдемо її.

• Існування матриці, оберненої до *A*, рівносильне існуванню спільного розв'язку X_0 двох матричних рівнянь $AX = E$ і $XA = E$, де $X_0 = \begin{pmatrix} x_{11}^0 & x_{12}^0 \\ x_{21}^0 & x_{22}^0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Припустимо, що такий розв'язок справді існує, тоді з $AX_0 = E$ отримаємо системи:

$$\begin{cases} -x_{11}^0 = 1; \\ 3x_{11}^0 + 2x_{21}^0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -x_{12}^0 = 0; \\ 3x_{12}^0 + 2x_{22}^0 = 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що тоді $x_{11}^0 = -1, \quad x_{21}^0 = \dfrac{3}{2}, \quad x_{12}^0 = 0, \quad x_{22}^0 = \dfrac{1}{2}.$

Отже, з існування розв'язку випливає, що він дорівнює $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Легко переконатися, що справді

$$A\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = E \quad i \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} A = E.$$

Таким чином A^{-1} існує і дорівнює $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Для кожної квадратної матриці другого порядку існує простий спосіб з'ясування того факту, чи існує для неї обернена матриця. Для цього введемо поняття визначника квадратної матриці другого порядку.

Означення. *Визначником* матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.11}$$

Зрозуміло, що $\det(A) = \det(A^T)$.

Лема. Якщо *A* і *B* – дві квадратні матриці другого порядку, то

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Доведення. Справді,

$$\det(AB) = \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$=(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) =$$

$$= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} -$$

$$-a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} = a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} -$$

$$- a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} = a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \det(A)\det(B).$$

Лему доведено.

Твердження. Для того, щоб квадратна матриця *A* другого порядку мала обернену матрицю, необхідно і достатньо, щоб $\det(A) \neq 0$.

Доведення. Нехай матриця A має обернену матрицю B. Тоді $AB = BA = E$, де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

За лемою $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(E) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$, тобто

$\det(A)\det(B) = 1 \neq 0$. Тому $\det(A) \neq 0$.

Навпаки, нехай $\det(A) \neq 0$. Покажемо, що матриця $B = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ є оберненою до A. Справді,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \\ a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Твердження доведено.

: Нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Тоді $\det = (A) = 2\cdot 7 - 3\cdot 4 = 14 - 12 = 2 \neq 0$.

Отже, A має обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

: Нехай $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Тоді $\det(A) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \neq 0$.

Отже, A^{-1} існує і дорівнює матриці $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Означення. Квадратна матриця A другого порядку називається *особливою* (або *виродженою*), якщо $\det(A) = 0$, і *неособливою* (*невиродженою*), якщо $\det(A) \neq 0$.

1.1.8. Подібні матриці.

Будемо говорити, що квадратна матриця A порядку n є подібною до квадратної матриці C того ж порядку, якщо існує невироджена квадратна матриця X порядку n така, що $XAX^{-1} = C$.

В цьому випадку пишуть наступне: $A \sim C$.

Властивості подібності:

1. $A \sim A$ (*рефлексивність*).

Справді, $EAE^{-1} = A$

2. Якщо $A \sim B$, то $B \sim A$ (*симетричність*).

Справді, якщо $XAX^{-1} = B$, то $A = (X^{-1})B\left(X^{-1}\right)^{-1}$, бо $\left(\left(X^{-1}\right)^{-1} = X\right)$.

3. Якщо $A \sim B$ і $B \sim C$, то $A \sim C$.

Справді, якщо $A \sim B$ і $B \sim C$, то існують такі $X, Y,$ що $XAX^{-1} = B,\ YBY^{-1} = C$. Тоді $YXAX^{-1}Y^{-1} = C$, тобто $\left(YX\right)A\left(YX\right)^{-1} = C \quad \left(\left(YX\right)^{-1} = X^{-1}Y^{-1}\right)$.

Означення. *Класом подібних матриць* будемо називати всі матриці, що є подібними до даної матриці A.

1.2. Визначники та їх властивості.

До поняття визначника приходимо, розглядаючи системи алгебраїчних рівнянь першого порядку. Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1, \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases} \tag{1.12}$$

де *x* та *y*– невідомі. Розв'язуючи її, отримаємо систему:

$$x = \frac{d_1b_2 - d_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \qquad y = \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{1.13}$$

Означення. Вираз $a_1b_2 - a_2b_1$ називається *визначником* (*детермінантом*) *другого порядку* і записується так:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

де $|\ |$– знак визначника.

Таким чином, в кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність число, яке називається визначником матриці:

$$\Delta = \det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

Визначник другого порядку:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

допоміжна діагональ головна діагональ

Означення. Визначником *третього порядку* називається число, утворене так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \tag{1.17}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad +$$

Перетворення виразу (1.17) і застосування (1.14) приводить до формули:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.18}$$

По аналогії з формулою (1.18) визначається визначник *четвертого порядку*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

Аналогічно визначник *п'ятого порядку* і т.д.:

$$\Delta = \left|a_{ik}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{i+k} a_{1j1} a_{2j2} \dots a_{njn}. \tag{1.20}$$

1.2.1. Властивості визначників.

Будемо розглядати властивості визначників на основі визначників 3-го порядку: вони будуть справедливі для визначників будь-якого порядку.

1) *Визначник не зміниться, якщо його транспонувати.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.21}$$

2) *Якщо переставити місцями два паралельних рядки (або стовпчики), то визначник змінить знак:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

3) *Якщо визначник має два однакових рядки, то він дорівнює нулю.*

0 0 0

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (1.23)$$

4) *Визначник, що має нульовий рядок, дорівнює нулю.*

5) *Спільний множник, що є у всіх елементах одного рядка, можна винести за знак визначника.*

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1.24)$$

Наслідок: для множення визначника на число достатньо помножити на це число елементи одного рядка (або стовпця).

6) *Якщо всі елементи якого-небуть рядка представити у вигляді суми двох доданків, то увесь визначник можна представить у вигляді суми двох визначників по формулі*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \qquad (1.25)$$

7) *Визначник дорівнює нулю, якщо елементи двох рядків пропорційні*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta = 0 \text{, якщо } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b} = k \qquad (1.26)$$

8) *Якщо до кожного з елементів будь-якого рядка додати числа, пропорційні другому рядку, паралельного першому, то значення визначника не зміниться.*

$$\begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1.27)$$

1.2.2. Мінор і алгебраїчне доповнення визначника.

Означення. *Мінором* M_{ij} називається визначник, складений з елементів даного визначника, якщо в ньому викреслити рядок і стовпчик, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \text{і т.д.} \qquad (1.28)$$

Означення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} називається мінор цього елемента, помножений на множник $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \qquad (1.29)$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11}\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} \quad \text{і т.д.} \qquad (1.30)$$

Теорема. Сума добутків елементів рядка визначника на відповідні їм алгебраїчні доповнення дорівнює цьому визначнику:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \ldots$$

Обчислити $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

● Для цього за допомогою властивості 8 зробити в якому-небуть з рядків усі елементи, крім одного, рівними нулю. Тоді, розкладаючи отриманий визначник по елементам цього рядка, отримаємо лише один доданок. Так, якщо ми хочемо у третьомурядку визначника залишити відмінний від нуля елемент лише на другому місці, то потрібно другий стовпчик помножити на (–2) і додати до першого, а потім в отриманому визначнику другий стовпчик додати до третього.

Маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \text{(віднімемо другий рядок від першого)} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5.$$

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ подати, як лінійну комбінацію матриць:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Нехай $AB = O$. Чи обов'язково $BA = O$?

3. Обчислити $A^2 - 3A + 5E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Коли справджуються рівності $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ і $(AB)^2 = A^2B^2$.

5. Довести, що добуток двох симетричних матриць є симетричною матрицею тоді й тільки тоді, коли ці матриці комутують.

6. Квадратна матриця A називається кососиметричною, якщо $A^T = -A$. Довести, що всяку квадратну матрицю можна представити як суму симетричної та кососиметричної.

7. Обчислити $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

8. Довести: якщо $AB = BA$, то обидві матриці квадратні та однакового порядку.

9. Довести формулу $(A_1 A_2 \ldots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \ldots A_1^T$.

10. Довести, що добуток двох верхніх (нижніх) трикутних матриць однакового розміру є верхньою (нижньої) трикутною матрицею.