Розділ 8. Теорія ймовірностей

8.1. Основні поняття.

Означення. *Подією* називається факт, який може відбутися або не відбутися в результаті досліду.

При цьому той чи інший результат досліду може бути отриманий з різним ступенем можливості. Тобто в деяких випадках можна сказати, що одна подія відбудеться практично зажди, інша – практично ніколи.

Події також мають особливості по відношенню однієї до іншої, тобто в одному випадку подія A може відбутись сумісно з подією B, в іншому – ні.

Означення. Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших.

Класичним прикладом несумісних подій є результат підкидання монети – випадання лицьової сторони монети виключає випадання зворотної сторони (в одному і тому ж досліді).

Означення. *Повною групою подій* називається сукупність усіх можливих результатів досліду.

Означення. *Достовірною* подією називається подія, яка відбудеться в результаті досліду. Подія називається *неможливою*, якщо воно ніколи не відбудеться у результаті досліду.

Наприклад, якщо з коробки, що містить лише червоні і зелені кульки, навмання виймають одну кульку, то поява серед вийнятих кульок білої – неможлива. Поява червоної і поява зеленої кульок утворюють повну групу подій.

Означення. Події називають *рівноможливими*, якщо немає підстав вважати, що одна з них з’явиться в результаті досліду з більшою ймовірністю.

У наведеному прикладі поява червоної і зеленої кульок – рівноможливі події, якщо у коробці знаходиться однакова кількість червоних і зелених кульок.

Якщо ж у коробці червоних кульок більше, ніж зелених, то поява зеленої кульки – подія менш імовірнісна, ніж поява червоної.

Виходячи з цих загальних понять можна дати означення ймовірності.

Означення. *Ймовірністю* події A називається математична оцінка можливості появи цієї події у результаті досліду. Ймовірність події A рівна відношенню кількості сприятливих подій результатів досліду до загальної кількості попарно несумісних результатів досліду, що утворюють повну группу подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (8.1)$$

Результат випробування є сприятливим події A, якщо поява в досліді цього результату тягне за собою появу появу події A.

Очевидно, що ймовірність достовірної події рівна одиниці, а ймовірність неможливої – рівна нулю. Таким чином, значення ймовірності будь-якої події – є додатнє число, що міститься між нулем і одиницею:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

У коробці знаходяться 10 кульок. 3 з них червоні, 2 – зелені, інші білі. Знайти імовірність того, що вийнята навмання кулька буде червоною, зеленою або білою.

● Поява червоної, зеленої і білої кульок складають повну групу подій. Позначимо появу червоної кульки – подія *A*, поява зеленої – подія *B*, поява білої – подія *C*.

У відповідності до вищевказаних формул, отримаємо:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10}.$$

Відмітимо, що імовірність настання однієї з двох попано несумісних подій рівна сумі імовірностей цих подій.

Означення. *Відносною частотою* події *A* називається відношення кількості дослідів, у результаті яких відбулась подія *A*, до загальної кількості дослідів.

Відмінність відносної частоти від ймовірності полягає в тому, що ймовірність обчислюється без безпосереднього добутку дослідів , а відносна частота – після досліду.

Так в розглянутому вище прикладі, якщо з коробки навмання вилучено 5 кульок і 2 з них виявилися червоними, то відносна частота появи червоної кульки дорівнює :

$$W(A) = \frac{2}{5}.$$

Як видно, ця величина не збігається зі знайденою ймовірністю.

При досить великій кількості проведених дослідів відносна частота змінюється мало, коливаючись близько одного числа. Це число може бути прийнято за ймовірність події.

Взагалі кажучи, класичне визначення ймовірності – досить відносне. Це обумовлено тим, що на практиці складно уявити результат досліду у вигляді сукупності елементарних подій, довести, що події рівноімовірні.

Наприклад, при проведенні досліду з підкиданням монети на результат досліду можуть впливати такі фактори як несиметричність монети, вплив її форми на аеродинамічні характеристики польоту, атмосферні умови і т.і.

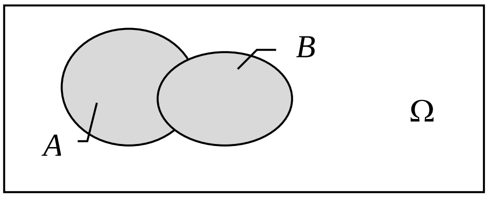
Класичне визначення ймовірності не застосовується до випробувань з нескінченним числом результатів. Щоб подолати цей недолік вводиться поняття *геометричної ймовірності*, тобто ймовірності попадання точки в будь-який відрізок або частину площини (простору).

Так, якщо на відрізку довжиною *L* виділений відрізок довжини *l*, то ймовірність попадання навмання взятої точки у відрізок *l* дорівнює відношенню *l*/*L*.

8.2. Операції над подіями.

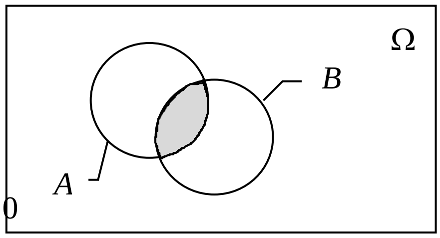
Означення. Події *A* і *B* називаються *рівними*, якщо здійснення події *A* тягне за собою здійснення події *B*, і навпаки.

Означення. *Об'єднанням* або *сумою* подій A_k називається подія A, яке означає появу *хоча б однієї* з подій A_k.



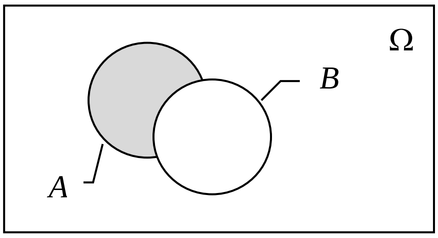
$$A = \bigcup_k A_k.$$

Означення. *Перетином* або *добутком* подій A_k називається подія A, яка полягає у здійсненні *усіх* подій A_k:



$$A = \bigcap_k A_k.$$

0Означення. *Різницею* подій A і B називається подія C, яка означає, що відбудеться подія A, але не відбувається подія B:



$$C = A \setminus B.$$

Означення. *Додатковою* до події A називається подія $\overline{A}$, яка означає, що подія A *не відбувається.*

Означення. *Елементарними результатами* випробування називаються такі результати випробування, які взаємно виключають одне одного і в результаті випробування відбувається одна з цих подій.

Сукупність усіх елементарних результатів випробування називається *простором елементарних подій.*

Теорема (*додавання імовірностей*). *Імовірність суми двох несумісних подій рівна сумі імовірностей цих подій:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{8.2}$$

Наслідок. *Якщо події* $A_1, A_2, ..., A_n$ *утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх імовірностей рівна одиниці:*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Означення. *Протилежними* називаються дві несумісні події, які утворюють повну групу.

Теорема. *Імовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій рівна сумі імовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (8.3)$$

Наслідок. *Сума імовірностей протилежних подій рівна одиниці:*

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Означення. Подія A називається *незалежною* від події B, якщо імовірність події A не залежить від того, відбулась подія B чи ні. Подія A називається залежною від події B, якщо імовірність події A змінюється в залежності від того, відбулась подія B чи ні.

Означення. Імовірність події B, обчислена при умові, що мала місце подія A, називається *умовною імовірністю* події B:

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A).$$

Теорема (*множення імовірностей*). *Імовірність добутку двох подій (сумісної їх появи) рівна добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність ідругої, обчислену при умові, що перша подія уже настала:*

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B).$$

Також можна записати: $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A).$

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з означення умовної імовірності.

Якщо події незалежні, то $P(B/A)=P(B)$, і теорема множення імовірностей матиме вигляд:

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (8.4)$$

У разі добутку кількох залежних подій ймовірність дорівнює добутку одного з них на умовні ймовірності всіх інших за умови, що ймовірність кожного наступного обчислюється в припущенні, що всі інші події вже відбулися.

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

З теореми добутку ймовірностей можна зробити висновок про ймовірність появи хоча б однієї події.

Якщо в результаті випробування може з'явитися n подій, незалежних в сукупності, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює:

$$P(A)=1-q_1q_2...q_n.$$

Тут подія A означає настання хоча б однієї з подій A_i, а q_i – імовірність протилежних подій $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$.

: З повної колоди карт (52 шт.) одночасно дістають чотири карти. Знайти імовірність того, що серед цих чотирьох карт буде хоча б одна бубнова або чирвова карта.

• Позначимо появу хоча б однієї бубнової карти – подія A, поява хоча б однієї чирвової карти – подія B. Таким чином, потрібно визначити імовірність події $C = A + B$.

Крім того, події A і B – сумісні, тобто поява однієї з них не виключає появи іншої.

Всього в колоді 13 чирвових і 13 бубнових карт.

При витягування першої карти імовірність того, що не з'явиться ні чирвова ні бубнова карта рівна $\frac{26}{52}$, при витягуванні другої карти – $\frac{25}{51}$, третьої – $\frac{24}{50}$, четвертої – $\frac{23}{49}$.

Тоді імовірність того, що серед вийнятих карт не буде ні бубнових, ні чирвових рівна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тоді $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$.

Чому рівна імовірність того, при підкиданні трьох гральних кісток 6 очок з'явиться хоча б на одній з кісток?

● Імовірність випадання 6 очок при одному кидку рівна $\frac{1}{6}$. Імовірність того, що не випаде 6 очок – $\frac{5}{6}$. Ймовірність того, що при кидку трьох кісток не випаде жодного разу 6 очок рівна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тоді імовірність того, що хоча б один раз випаде 6 очок рівна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

У барабані револьвера знаходяться 4 патрони з шести у довільному порядку. Барабан розкручують, після чого натискають на спусковий гачок двічі. Знайти ймовірності хоча б одного пострілу; двох пострілів; двох осічок.

● Імовірність пострілу при першому натисканні на курок (подія A) рівна $P(A) = \frac{4}{6}$, імовірність осічки – $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$. Ймовірність пострілу при другому натисканні на курок залежить від результату першого натискання.

Так, якщо у першому випадку відбувся постріл, то у барабані залишилось лише 3 патрони, причому вони розподілені по 5 гніздам, так як при другому натисканні на курок навпроти ствола не може опинитися гніздо, у якому був патрон при першому натисканні на курок.

Умовна ймовірність пострілу при другій спробі – $P(B/A) = \frac{3}{5}$, якщо першого разу був постріл, $P(B/\overline{A}) = \frac{4}{5}$ – якщо першого разу була осічка.

Умовна ймовірність осічки другого разу – $P(\overline{B}/A) = \frac{2}{5}$, якщо першого разу був постріл, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{5}$ – якщо першого разу була осічка.

Розглянемо імовірності того, що у другому випадку буде постріл (подія B) або відбудеться осічка (подія $\overline{B}$) при умові, що першого разу був постріл (подія A) або осічка (подія $\overline{A}$).

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = 0{,}4$ – два постріли поспіль;

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ – перша осічка, другий постріл;

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ – перший постріл, друга осічка;

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$ – дві осічки поспіль.

Ці чотири випадки утворюють повну групу подій (сума їх імовірностей рівна одиниці).

Аналізуючи отримані результати, бачимо, що імовірність хоча б одного пострілу рівна сумі $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0{,}933.$

Тепер розглянемо інший випадок. Представимо, що після першого натискання на курок барабан розкрутили і знову натиснули на курок.

Ймовірності першого пострілу і першої осічки не змінились – $P(A) = \frac{4}{6},\ P(\overline{A}) = \frac{2}{6}.$ Умовні імовірності другог пострілу і осічки обчислюються з умови, що навпроти ствола може опинитись те ж гніздо, що й першого разу.

Умовна імовірність пострілу при другій спробі – $P(B/A) = \frac{3}{6},$ якщо першого разу був постріл, $P(B/\overline{A}) = \frac{4}{6}$ – якщо першого разу була осічка.

Умовна імовірність осічки другого разу – $P(\overline{B}/A) = \frac{3}{6},$ якщо першого разу був постріл, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6}$ – якщо була осічка.

Тоді:

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ – два постріли поспіль;

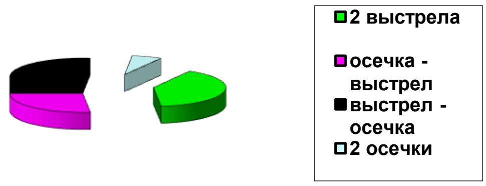
$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$ – перша осічка, другий постріл;

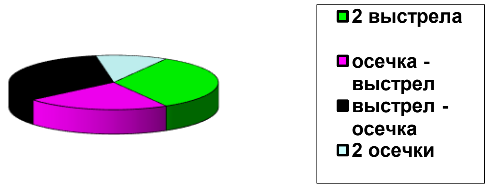
$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ – перший постріл, друга осічка;

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$ – дві осічки поспіль.

В цьому випадку імовірність того, що відбудеться хоча б один постріл, рівна: $P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889.$

Нижче показані діаграми імовірностей для першого і другого випадків.





Два стрілки стріляють по мішені. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка рівна 0,7, а для другого – 0,8. Знайти імовірність того, що при одному залпі в мішень влучить тільки один із стрілків.

● Позначимо попадання в ціль першим стрілком – подія A, другим – подія B, промах першого стрілка – подія $\overline{A}$, промах другого – подія $\overline{B}$.

$$P(A)=0{,}7; \quad P(\overline{A})=0{,}3; \quad P(B)=0{,}8; \quad P(\overline{B})=0{,}2.$$

Імовірність того, що перший стрілок влучить у мішень, а другий – ні, рівна:

$$P(A)P(\overline{B})=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14.$$

Імовірність того, що другий стрілок влучить у мішень, а перший – ні, рівна:

$$P(\overline{A})P(B)=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24.$$

Тоді імовірність влучення в ціль лише одним стрілком рівна:

$$P=0{,}14+0{,}24=0{,}38.$$

Той же результат можна отримати іншим способом: знаходимо імовірності того, що обидва стрілки влучили в ціль і обидва промахнулись. Ці імовірності відповідно рівні:

$$P(A)P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56; \quad P(\overline{A})P(\overline{B})=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06.$$

Тоді імовірності того, що в ціль влучить лише один стрілок, рівна:

$$P=1-0{,}56-0{,}06=0{,}38.$$

Імовірність того, що навмання узята деталь з деякої партії деталей буде бракованою, рівна 0,2. Знайти імовірність того, що з трьох узятих деталей 2 виявляться не бракованими.

●Позначимо браковану деталь – подія A, не браковану – подія $\overline{A}$.

$$P(A)=0{,}2; \quad P(\overline{A})=0{,}8.$$

Якщо серед трьох деталей буде тільки одна бракована, то це можливо в одному з трьох випадків: бракована деталь буде першою, другою або третьою.

$$P=P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})+P(\overline{A})P(A)P(\overline{A})+P(\overline{A})P(\overline{A})P(A);$$

$$P=3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}384.$$

Імовірності того, що потрібна деталь знаходиться у першому, другому, третьому або четвертому ящику. Знайти імовірності того, що ця деталь знаходиться: а) не більш, ніж у трьох ящиках; б) не менш, ніж у двох ящиках.

● а) Імовірність того, що дана деталь знаходиться у всіх чотирьох ящиках, рівна:

$$P=P_1P_2P_3P_4=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}3024.$$

Імовірність того, що потрібна деталь знаходиться не більш, ніж у трьох ящиках, рівна імовірності того, що вона не знаходиться в усіх чотирьох ящиках:

$$P(A) = 1 - P = 1 - 0{,}3024 = 0{,}6976.$$

б) Імовірність того, що потрібна деталь знаходиться не менш, ніж у двох ящиках, складається з імовірностей того, що деталь знаходиться тільки у двох ящиках, тількі у трьох ящиках, тільки у чотирьох ящиках. Звичайно, ці ймовірності можна порахувати, а потім додати, поднак, простіше зробити інакше. Та ж імовірність рівна імовірності того, що деталь не знаходиться лише в одному ящику і мається взагалі.

Імовірність того, що деталь знаходиться тільки в одному ящику, рівна:

$$P = P_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 P_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 P_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 P_4;$$

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$$

$$= 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}0216 = 0{,}0404.$$

$$Q = 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596.$$

Імовірність того, що потрібної деталі немає в жодному ящику, рівна:

$$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024;$$

$$Q_0 = 1 - 0{,}0024 = 0{,}9976.$$

Шукана імовірність рівна: $P(B) = Q \cdot Q_0 = 0{,}9596 \cdot 0{,}9976 = 0{,}9573.$

8.3. Формула повної імовірності.

Нехай деяка подія *A* може відбутися з однією з несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які складають повну групу подій. Нехай відомі імовірності цих подій $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ та умовні імовірності настаня події *A* при настанні події H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Імовірність події A, яка може відбутися разом з однією з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, рівна сумі парних добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідні їм умовні імовірності настання події A:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i) \tag{8.5}$$

Доведення. Так як події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу подій, то подію *A* можна представити у вигляді суми:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i.$$

Так як події $H_1, H_2, ..., H_n$ несумісні, то і події AH_i теж несумісні. Тоді можна використати теорему про додавання несумісних подій:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i).$$

При цьому $P(AH_i) = P(H_i) P(A/H_i).$

У результаті отримаємо: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i).$

Теорему доведено.

Один з трьох стрілків робить два постріли. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі для першого стрілка рівна 0,4, для другого – 0,6, для третього – 0,8. Знайти імовірність того, що в ціль влучать двічі.

● Імовірність того, що постріли робить перший, другий або третій стрілок рівна $\frac{1}{3}$.

Імовірності того, що один із стрілків двічі влучить в ціль, рівні:

– для першого стрілка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$;

– для другого стрілка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$;

– для третього стрілка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$.

Шукана імовірність рівна:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}.$$

8.4. Формула Байєса (формула гіпотез).

Нехай маємо повна група несумісних гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$ з відомими ймовірностями їх настання $P(H_1), P(H_2),..., P(H_n)$. Нехай у результаті досліду настала подія *A*, умовні імовірності якої по кожній з гіпотез відомі, тобто відомі імовірності $P(A/H_1), P(A/H_2),..., P(A/H_n)$.

Потрібно визначити, які імовірності мають гіпотези $H_1, H_2,..., H_n$ відносно події *A*, тобто умовні імовірності $P(H_i / A)$.

Теорема. *Імовірність гіпотези після випробування рівна добутку імовірності гіпотези до випробування на відповідну їй умовну імовірність події, яка відбулася при випробуванні, поділену на повну імовірність цієї події:*

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \tag{8.6}$$

Ця формула називається *формулою Байєса.*

Доведення. По Теоремі множення імовірностей маємо:

$$P(A)P(H_i / A) = P(H_i)P(A/H_i).$$

Тоді, якщо $P(A) \neq 0,$ $\quad P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$

Для знаходження імовірності *P*(*A*) використаємо формулу повної імовірності:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Якщо до випробування усі гіпотези рівноімовірні з імовірністю $P(H_i) = p$, то формула Байєса матиме вигляд::

$$P(H_i / A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)}.$$

8.5. Повторення випробувань. Формула Бернуллі.

Якщо проводиться кілька випробувань , в результаті яких може відбутися або не відбутися подія A , і ймовірність появи цієї події в кожному з випробувань не залежить від результатів інших випробувань , то такі випробування називаються *незалежними* відносно події A.

Припустимо, що подія A настає в кожному випробуванні з ймовірністю $P(A)=p$. Визначимо ймовірність $P_{m,n}$ того, що в результаті n випробувань подія A настала рівно m разів.

Цю ймовірність можна порахувати, використовуючи теореми додавання і множення ймовірностей, як це робилося у розглянутих вище прикладах. Однак, при досить великій кількості випробувань це призводить до дуже великих обчислень. Таким чином, виникає необхідність розробити спільний підхід до вирішення поставленого завдання. Цей підхід реалізований у *формулі Бернуллі* (Якоб Бернуллі (1654–1705) – швейцарський математик).

Нехай у результаті n незалежних випробувань, проведених в однакових умовах, подія A настає з імовірністю $P(A)=p$, а протилежна йому подія $\overline{A}$ з ймовірністю $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Позначимо A_i – настання події A у випробуванні з номером i. Оскільки умови проведення випробувань однакові, то ці ймовірності рівні.

Якщо в результаті n дослідів подія A настає рівно m разів, то інші $n–m$ раз ця подія не настає. Подія A може з'явитися m раз в n випробуваннях в різних комбінаціях, число яких дорівнює кількості сполучень з n елементів по m. Ця *кількість сполучень* знаходиться за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{8.7}$$

Імовірність кожної комбінації дорівнює добутку ймовірностей: $p^m (1-p)^{n-m}$.

Застосовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, отримуємо *формулу Бернуллі*:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}. \tag{8.7}$$

Формула Бернуллі важлива тим, що справедлива для будь-якої кількості незалежних випробувань, тобто того самого випадку, в якому найбільш чітко проявляються закони теорії ймовірностей.

По цілі проводиться 5 пострілів. Ймовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що в ціль влучили не менше трьох разів.

● Імовірність не менше трьох влучень складається з ймовірності п'яти влучень, чотирьох влучень і трьох влучень. Оскільки постріли незалежні, то можна застосувати формулу Бернуллі ймовірності того, що в m випробуваннях подія в ймовірністю p настає рівно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

У разі п'яти влучень з п'яти можливих: $P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024.$

Чотири влучення з п'яти пострілів: $P_{4,5} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768.$

Три влучення з п'яти: $P_{3,5} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304.$

Остаточно, отримуємо ймовірність не менше трьох влучень з п'яти пострілів:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744.$$

8.6. Випадкові величини.

Вище розглядалися випадкові події, які є якісною характеристикою випадкового результату досліду. Для отримання кількісної характеристики вводиться поняття випадкової величини.

Означення. *Випадковою величиною* називається величина, яка в результаті досліду може приймати те чи інше значення, причому заздалегідь відомо яке саме.

Випадкові величини можна розділити на дві категорії.

Означення. *Дискретною випадковою величиною* називається така величина, яка в результаті досліду може приймати певні значення з певною ймовірністю, що утворюють нумеровану множину.

Ця множина може бути як скінченною, так і нескінченною.

Наприклад, кількість пострілів до першого влучання в ціль є дискретною випадковою величиною, тому що ця величина може приймати і нескінченне, хоча і обраховану кількість значень.

Означення. *Неперервною випадковою величиною* називається така величина, яка може приймати будь-які значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Очевидно, що число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченне.

Для задання випадкової величини недостатньо просто вказати її значення, необхідно також вказати ймовірність цього значення.

8.7. Закон розподілу дискретної випадкової величини.

Означення. Співвідношення між можливими значеннями випадкової величини та їх ймовірностями називається *законом розподілу дискретної випадкової величини*.

Закон розподілу може бути заданий аналітично, у вигляді таблиці або графічно.

Таблиця відповідностей значень випадкової величини та їх імовірностей називається *рядом розподілу.*

Графічне представлення цієї таблиці називається *многокутником розподілу.*

При цьому сума усіх ординат многокутника розподілу представляє собою імовірність усіх можливих значень випадкової величини, а, отже, рівна одиниці.

По цілі проводиться 5 пострілів. Імовірність влучення для кожного пострілу рівна 0,4. Знайти імовірність числа влучень і побудувати многокутник розподілу.

● Імовірності п’яти влучень з п’яти можливих, чотирьох з п;яти і трьох з п’яти були знайдені вище по формулі Бернуллі і рівні відповілно:

$$P_{5,5} = 0{,}01024\,, \quad P_{4,5} = 0{,}0768, \quad P_{3,5} = 0{,}2304.$$

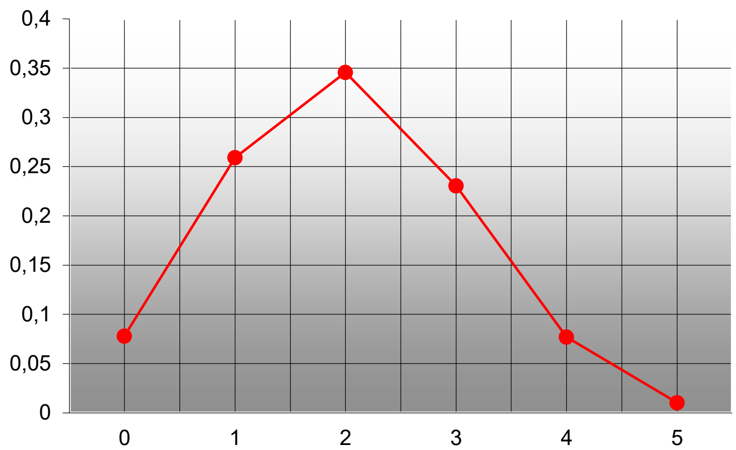
Аналогічно знайдемо:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456;$$

$$P_{1,5} = \frac{5!}{1!\cdot 4!} 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592;$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0!\cdot 5!} 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}6^5 = 0{,}0778.$$

Представимо графічно залежність числа влучень від їх імовірностей.



При побудові многокутника розподілу потрібно пам’ятати, що з’єднання отриманих точок носить умовний характер. У проміжках між значеннями випадкової величини імовірність не приймає ніякого значення. Точки є'єднані лише для наочності.

Імовірність хоча б одного влучення у мішень стрілком при трьох пострілах рівна 0,875. Знайти імовірність влучення в мішень при одному пострілі.

● Якщо позначити p – імовірність влучання стрілком у мішень при одному пострілі, то імовірність промаха при одному пострілі рівна $(1 - p)$.

Імовірність трьох промахів з трьох пострілів рівна $(1 - p)^3$. Ця імовірність рівна 1–0,875=0,125, тобто в ціль не влучать жодного разу.

Отримаємо: $(1 - p)^3 = 0{,}125; \qquad 1 - p = 0{,}5; \qquad p = 0{,}5.$

У першій коробці 10 кульок, з них 8 білих; у другій коробці 20 кульок, з них 4 білі. З кожної коробки навмання дістали по одній кульці, а потім з цих двох кульок вибирають одну. Знайти імовірність того, що ця кулька біла.

● Імовірність того, що узята з першої коробки кулька біла – $P_1(Б)=0{,}8,$ що не біла – $P_1(НБ)=0{,}2.$

Імовірність того, що узята з другої коробки кулька біла – $P_2(Б)=0{,}2,$ що не біла – $P_2(НБ)=0{,}8.$

Імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з першої коробки і імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з другої коробки, рівні 0,5.

Імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з першої коробки і вона біла – $p_1=0{,}5\cdot P_1(Б)=0{,}5\cdot 0{,}8=0{,}4.$

Імовірність того, що повторно вибрана кулька, вийнята з другої коробки і вона біла – $p_2=0{,}5\cdot P_2(Б)=0{,}5\cdot 0{,}2=0{,}1.$

Імовірність того, що повторно буде вибрана біла кулька, рівна

$$P=p_1+p_2=0{,}4+0{,}1=0{,}5.$$

Є п'ять гвинтівок, три з яких – з оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілок влучить у ціль при вистрілі з гвинтівки з «оптикою», рівна 0,95, для гвинтівки без «оптики» ця імовірність рівна 0,7. Знайти імовірність того, що у ціль буде влучено, якщо стрілок зробить один постріл з будь-якої рушниці.

● Імовірність того, що вибрана гвинтівка з оптичним прицілом, позначимо $P_0=\dfrac{3}{5}$, а імовірність того, що вибрана гвинтівка без оптичного приілу, позначимо $P_{БО}=\dfrac{2}{5}.$

Імовірність, що вибрали гвинтівку з «оптикою», і при цьому у ціль було влучено $P_1=P_0\cdot P(ПЦ/O)$, де *P(ПЦ/О)* – імовірність влучення у ціль з гвинтівки з «оптикою».

Аналогічно, імовірність, що вибрали гвинтівку без «оптики», і при цьому у ціль було влучено $P_1=P_{БО}\cdot P(ПЦ/БО)$, де *P(ПЦ/БО* – імовірність влучення у ціль з гвинтівки без «оптики».

Імовірність влучення у ціль рівна сумі імовірностей P_1 і P_2, так як для влучення достатньо, щоб відбулась одна з цих несумісних подій:

$$P=P_1+P_2=0{,}95\cdot 0{,}6+0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}57+0{,}28=0{,}85.$$

Три мисливці одночасно вистрілили по ведмедю, який був убитий однією кулею. Визначити імовірність того, що ведмідь був убитий першим стрілком, якщо імовірності влучень для цих стрілків рівні відповідно 0,3, 0,4, 0,5.

● У цій задачі потрібно визначити імовірність гіпотези уже після того, як подія відбулася. Для визначення шуканої імовірності скористаємось формулою Байєса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}.$$

У цій формулі H_1, H_2, H_3 – гіпотези, що ведмедя уб'є перший, другий і третій стрілок відповідно. До пострілів ці гіпотези рівноймовірні і їх імовірність рівна $\dfrac{1}{3}$.

P(H₁/A) – імовірність того, що ведмедя убив перший стрілок при умові, що постріли відбулися (подія *A*).

Імовірності того, що ведмедя уб'є перший, другий або третій стрілок, обчислені до пострілів, рівні відповідно:

$$P(A/H_1) = p_1 q_2 q_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}09;$$

$$P(A/H_2) = q_1 p_2 q_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}14;$$

$$P(A/H_3) = q_1 q_2 p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}21.$$

Тут q_1=0,7; q_2=0,6; q_3=0,5 – імовірності промаху для кожного з стрілків, розраховані як q=1–p, де p – імовірності влучень для кожного стрілка.

Підставимо ці значення у формулу Байєса:

$$P(H_1 / A) = \frac{0{,}09}{0{,}44} = \frac{9}{44}.$$

Послідовно послано чотири радіосигнали. Імовірності прийому кожного з них не залежать від того, прийняті інші сигнали чи ні. Імовірності прийому сигналів рівні відповідно 0,2, 0,3, 0,4, 0,5. Визначити імовірність прийому трьох радіосигналів.

● Подія прийому трьох сигналів з чотирьох можлива у чотирьох випадках:

$$P_A = p_1 p_2 p_3 q_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}012;$$

$$P_B = p_1 p_2 q_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}018;$$

$$P_C = p_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}028;$$

$$P_D = q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}048.$$

Для прийому трьох сигналів необхідно здійснення однієї з подій *A*, *B*, *C* або *D*. Таким чином, знаходимо шукану імовірність:

$$P = 0{,}012 + 0{,}018 + 0{,}028 + 0{,}048 = 0{,}106.$$

Двадцять екзаменаційних білетів містять по 2 питання, які не повторюються. Курсант знає відповіді лише на 35 питань. Визначити імовірність того, що екзамен буде зданий, якщо для цього достатньо відповісти на два питання одного білета або на одне питання з одного білета і на вказане додаткове питання з іншого білета.

● Загалом є 40 питань. Імовірність того, що випаде питання, на яке відповідь відома, рівна $\frac{35}{40}$.

Для того, щоб здати іспит, потрібно, щоб відбулась одна з трьох подій:

1) Подія *A* – відповіли на перше питання (імовірність $\frac{35}{40}$) і відповіли на друге питання (імовірність $\frac{34}{39}$), так як після успішної відповіді на перше питання залишиться ще 39 питань, на 34 з яких відомі відповіді.

$$P(A) = \frac{35}{40} \cdot \frac{34}{39} = 0{,}7628.$$

2) Подія *B* – на перше питання відповіли (імовірність $\frac{35}{40}$), на друге – ні (імовірність $\frac{5}{39}$), на третє – відповіли (імовірність $\frac{34}{38}$):

$$P(B)=\frac{35}{40}\cdot\frac{5}{39}\cdot\frac{34}{38}=0{,}1004.$$

3) Подія C – на перше питання не відповіли (імовірність $\frac{5}{40}$), на друге – відповіли (імовірність $\frac{35}{39}$), на третє – відповіли (імовірність $\frac{34}{38}$):

$$P(C)=\frac{5}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{34}{38}=0{,}1004.$$

Імовірність того, що при заданих умовах екзамен буде зданий, рівна:

$$P=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}9636.$$

Є дві партії однорідних деталей. Перша партія складається з 12 деталей, 3 з яких – браковані. Друга партія складається з 15 деталей, 4 з яких – браковані. З кожної партії дістають по 2 деталі. Яка імовірність, що серед них немає бракованих деталей.

● Імовірність опинитись не бракованою для першої деталі з першої партії рівна $p_1=\frac{9}{12}$, для другої деталі з першої партії при умові, що перша деталь була не бракована, – $p_2=\frac{8}{11}$.

Імовірність опинитись не бракованою для першої деталі з другої партії рівна $p_3=\frac{11}{15}$, для другої деталі з другої партії при умові, що перша деталь була не бракована, – $p_4=\frac{10}{14}$.

Імовірність того, що серед чотирьох вийнятих деталей немає бракованих, рівна:

$$P=\frac{9\cdot 8\cdot 11\cdot 10}{12\cdot 11\cdot 15\cdot 14}=0{,}2857.$$

Розглянемо той же приклад, але з іншою умовою.

Є дві партії однорідних деталей. Перша партія складається з 12 деталей, 3 з яких – браковані. Друга партія складається з 15 деталей, 4 з яких – браковані. З першої партії дістають 5 деталей, з другої – 7 деталей. Ці деталі утворюють нову партію. Яка імовірність дістати з них браковану деталь?

● Для того, щоб вибрана деталь була б бракованою, необхідне виконання однієї з двох несумісних умов:

1) Вибрана деталь була з першої партії (імовірність – $\frac{5}{12}$) і при цьому вона бракована (імовірність – $\frac{3}{12}$). Отже: $p_1=\frac{5}{12}\cdot\frac{3}{12}=0{,}1041;$

2) Вибрана деталь була з другої партії (імовірність – $\frac{7}{12}$) і при цьому вона – бракована (імовірність – $\frac{4}{15}$). Отже: $p_2=\frac{7}{12}\cdot\frac{4}{15}=0{,}1556.$

Отже, маємо: $p = p_1 + p_2 = 0{,}2597.$.

В ящику 3 білих і 5 чорних кульок. З ящика виймають дві кульки. Знайти імовірність того, що ці кульки різного кольору.

● Подія, що полягає в тому, що вибрані кульки різного кольору, відбудеться у одному з двох випадків:

1) перша кулька біла (імовірність – $\frac{3}{8}$), а друга – чорна (імовірність – $\frac{5}{7}$);

2) перша кулька чорна (імовірність – $\frac{5}{8}$), а друга – біла (імовірність – $\frac{3}{7}$).

Отже, отримаємо: $p = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{15}{28}$.

8.8. Біномінальний розподіл.

Якщо проводиться *n* незалежних випробувань, в кожному з яких подія *A* може з'явитись з однаковою імовірністю *p* у кожному з випробувань, то імовірність того, що подія не з'явиться, рівна $q=1-p$.

Приймемо число появ подій у кожному випробуванні за деяку випадкову величину *X*. Щоб знайти закон розподілу цієї випадкової величини, необхідно визначити значення цієї величини та їх імовірності.

Значення знайти досить просто. У результаті *n* випробувань подія може не з'явитись зовсім, з'явитись один раз, двічі і т.д. до *n* разів.

Імовірність кожного значення цієї випадкової величини можна знайти по формулі Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,... \tag{8.8}$$

Ця формула аналітично виражає шуканий закон розподілу. Цей закон розподілу називається *біноміальним*.

У партії 10% нестандартних деталей. Навмання відібрані 4 деталі. Записати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини *X* – числа нестандартниї деталей серед чотирьох відібраних і побудувати многокутник цього розподілу.

● Імовірність появи нстандартної деталі у кожному випадку рівна 0,1. Знайдемо імовірності того, що серед відібраних деталей:

1) взагалі немає нестандартних: $P_4(0) = \frac{4!}{0!\cdot 4!}0{,}1^0\cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561.$

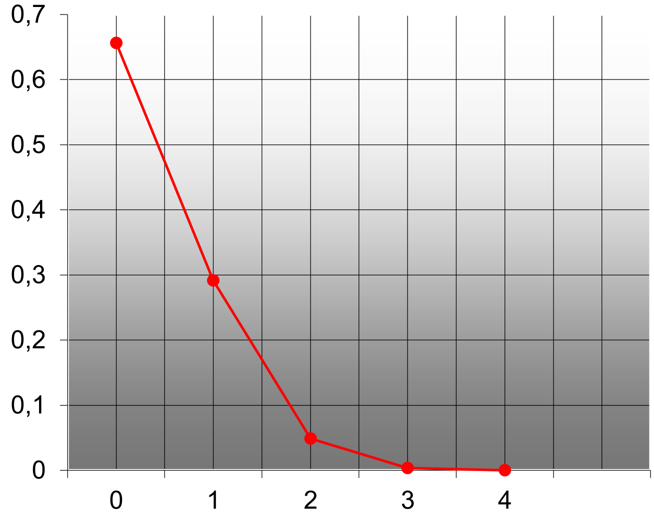
2) одна нестандартна: $P_4(1) = \frac{4!}{1!\cdot 3!}0{,}1^1\cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916.$

3) дві нестандартні деталі: $P_4(2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!}0{,}1^2\cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486.$

4) три нестандартні деталі: $P_4(3) = \frac{4!}{3!\cdot 1!}0{,}1^3\cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036.$

5) чотири нестандартні: $P_4(4) = \frac{4!}{4!\cdot 0!}0{,}1^4\cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001.$

Побудуємо многокутник розподілу:



Дві гральні кістки одночасно кидають двічі. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа випадань парної кількості очок на двох гральних кістках.

● Кожна гральна кістка має три варіанти парних очок – 2, 4 і 6 з шести можливих. Таким, чином, імовірність випадання раного числа очок на одній кістці рівна 0,5.

Імовірність одночасного випадання парних очок на двох кістках рівна 0,25.

Імовірність того, що при двох випробуваннях обидва рази випали парні очки на обох кістках, рівна:

$$P_2(2)=\frac{2!}{0!\cdot 2!}0{,}25^2\cdot 0{,}75^0=0{,}0625.$$

Імовірність того, що при двох випробуваннях один раз випали парні очки на обох кістках:

$$P_2(1)=\frac{2!}{1!\cdot 1!}0{,}25^1\cdot 0{,}75^1=0{,}375.$$

Імовірність того, що при двох випробуваннях жодного разу не випаде парного числа очок на обох кістках:

$$P_2(0)=\frac{2!}{0!\cdot 2!}0{,}25^0\cdot 0{,}75^2=0{,}5625.$$

8.9. Розподіл Пуасона.

(Сімеон Дені Пуасон (1781–1840) – французький математик).

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у яких поява події A має імовірність p. Якщо випробувань n достатньо велике, а імовірність появи події A у кожному досліді мале ($p\leq 0{,}1$), то знаходження імовірності появи події A k разів проводиться таким чином.

Зробимо важливе припущення: добуток np зберігає стале значення:

$$np=\lambda.$$

Практично це припущення означає, що середнє число появи події в різних серіях випробувань (при різному n) є незмінним.

По формулі Бернуллі отримаємо:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k};$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Знайдемо границю цієї імовірності при $n\to\infty$.

$$P_n(k) \cong \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Отримаємо формулу *розподілу Пуасона*:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \tag{8.9}$$

Якщо відомі числа λ і k, то значення імовірності можна знайти по відповідним таблицям розподілу Пуасона.

8.10. Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Однак, коли неможливо знайти закон розподілу, або цього не потрібно, можна обмежитись знаходженням значень, які називаються числовими характеристиками випадкової величини. Ці величини визначають деяке середнє значення, навколо якого групуються значення випадкової величини, і ступінь їх розкиданості навколо цього середнього значення.

Означення. *Математичним очікуванням* дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на їх імовірності:

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{8.10}$$

Математичне очікування існує, якщо ряд, що стоїть у правій частині рівності, збіжний абсолютно.

З точки зору імовірності можна сказати, що математичне очікування наближено рівне середньому арифметичному значень випадкової величини, що розглядається.

8.10.1. Властивості математичного очікування.

1) Математичне очікування сталої величини рівне самій сталій: $M(C) = C$.

2) Сталий множник можна виносити за знак математичного очікування: $M(Cx) = CM(x)$.

3) Математине очікування добутку двох незалежних випадкових величин рівний добутку їх математичних очікувань:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Ця властивість справедлива для довільної кількості випадкових величин.

4) Математичне очікування суми двох випадкових величин рівне сумі математичних очікувань доданків:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Ця властивість також справедлива для довільної кількості випадкових величин.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, імовірність появи події A у яких рівна p.

Теорема. *Математичне очікування M(X) числа появи події A в n незалежних випробуваннях рівне добутку числа випробувань на імовірність появи події у кожному випробуванні:*

$$M(X) = np.$$

Однак, математичне очікуваня не може повністю характеризувати випадковий процес. Крім математичного очікування потрібно увести величину, яка характеризує відхилення значень випадкової величини від математичног очікування.

Це відхилення рівне різниці між випадковою величиною та її математичним очікуваням. При цьому математичне очікування відхилення рівне нулю. Це пояснюється тим, що одні можливі відхилення додатні, інші від’ємні, і у результаті їх взаємного погашення отримуємо нуль.

Означення. *Дисперсією* (*розсіюванням*) дискретної випадкової величини називається математичне очікування квадрта відхилення випадкової величини від її математичного очікування:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2. \qquad (8.11)$$

Для розглянутого вище прикладу закон розподілу випадкової величини має вигляд:

X	0	1	2
P	0,0625	0,375	0,5625

Знайти математичне очікування та дисперсію випадкової величини.

● Маємо: $M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}5625 = 1{,}5.$

Можливі значення квадрата відхилення:

$$\left[x_1 - M(X)\right]^2 = (0 - 1{,}5)^2 = 2{,}25;$$

$$\left[x_2 - M(X)\right]^2 = (1 - 1{,}5)^2 = 0{,}25;$$

$$\left[x_3 - M(X)\right]^2 = (2 - 1{,}5)^2 = 0{,}25.$$

Тоді

$[X–M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
P	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсія рівна: $D(X) = 2{,}25 \cdot 0{,}0625 + 0{,}25 \cdot 0{,}375 + 0{,}25 \cdot 0{,}5625 = 0{,}375.$

Однак, на практиці подібний спосіб обчислення дисперсії незручний, так як при великій кількості значень випадкової величини до громіздких обчислень.

Тому використовується інший спосіб.

8.10.2. Обчислення дисперсії.

Теорема. *Дисперсія рівна різниці між математичним очікуваням квадрата випадкової величини X і квадратом її математичного очікування:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (8.12)$$

Доведення. З урахуванням того, що математичне очікування $M(X)$ і квадрат математичного очікування $M^2(X)$ – величини сталі, то можна записати:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] =$$
$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$
$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Застосуємо цю формулу для розглядуваного вище прикладу:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
P	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625.$$

$$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375.$$

8.10.3. Властивості дисперсії.

1) Дисперсія сталої величини рівна нулю: $D(C) = 0.$

2) Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3) Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин рівна сумі дисперсій цих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4) Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин рівна сумі дисперсій цих величин:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Справедливість цієї рівності витікає з властивості 2.

Теорема. *Дисперсія числа появи події A в n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність p появи події стала, рівна добутку числа випробувань на імовірності появи і не появи події в будь-якому випробуванні:*

$$D(X) = npq. \qquad (8.13)$$

8.10.4. Середнє квадратичне відхилення.

Означення. *Середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини X називається квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (8.14)$$

Теорема. *Середнє квадратичне відхилення суми скінченної кількості взаємно незалежних випадкових величин рівне квадратному кореню з суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин:*

$$\sigma(X_1+X_2+...+X_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+...+\sigma^2(X_n)}.$$

Завод випускає 96% виробів першого сорту та 4% виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Нехай X – число виробів першого сорту у даній вибірці. Знайти закон розподілу, математичне очікування та дисперсію випадкової величини *X*.

● Вибір кожного з 1000 виробів можна вважати незалежним випробуванням, у якому імовірність появи виробів першого сорту однакова і рівна p=0,96.

Таким чином, закон розподілу може вважатися біномінальним:

$$m_x = pn = 1000\cdot 0{,}96 = 960;$$

$$D_x = npq = 1000\cdot 0{,}96\cdot 0{,}04 = 38{,}4.$$

Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – число появи події A у двох незалежних випробуваннях, якщо імовірності появи цієї події у кожного випробуванні рівні і відомо, що $M(X)$=0,9.

● Так як випадкова величина X розподілена по біномінальнгму закону, то

$$M(X)=np=2p=0{,}9; \quad \Rightarrow \quad p=0{,}45;$$

$$D(X)=npq=2p(1-p)=2\cdot 0{,}45\cdot 0{,}55=0{,}495.$$

Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події A у кожному випробуванні. Знайти імовірність появи події A, якщо дисперсія числа появи події у трьох незалежних випробуваннях рівна 0,63.

● По формулі дисперсії біноміального закону отримуємо:

$$D(X)=npq=3p(1-p)=0{,}63;$$

$$3p^2-3p+0{,}63=0;$$

$$p^2-p+0{,}21=0;$$

$$p_1=0{,}7; \quad p_2=0{,}3.$$

Досліджується пристрій, що складається з чотирьох незалежно працюючих приладів. Імовірності відмови кожного приладів рівні відповідно $p_1=0{,}3;$ $p_2=0{,}4;$ $p_3=0{,}5;$ $p_4=0{,}6$. Знайти математичне очікування і дисперсію кількості приладів, що відмовили.

● Приймаючи за випадкову величину кількість приладів, що відмовили, бачимо, що ця випадкова величина може приймати значення 0, 1, 2, 3 або 4.

Для складання закону розподілу цієї випадкової величини необхідно визначити відповідні імовірності. Приймемо $q_i=1-p_i$.

1) Не відмовив жодний прилад: $p(0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}084.$

2) Відмовив один з приладів:

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 0{,}302.$$

3) Відмовили два прилади:

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}38.$$

4) Відмовили три прилади:

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}198.$$

5) Відмовили усі прилади:

$$p(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}036.$$

Отримаємо закон розподілу:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математичне очікування:

$$M(X) = 0{,}302 + 2 \cdot 0{,}38 + 3 \cdot 0{,}198 + 4 \cdot 0{,}036 = 1{,}8.$$

$$M(X^2) = 0{,}302 + 4 \cdot 0{,}38 + 9 \cdot 0{,}198 + 16 \cdot 0{,}036 = 4{,}18.$$

Дисперсія: $$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4{,}18 - 3{,}24 = 0{,}94.$$

8.11. Функція розподілу.

У всіх розглянутих вище випадках випадкова величина визначалась шляхом задання значень самої величини та імовірностей цих значень.

Однак, такий метод застосовується не завжди. Наприклад, у випадку неперервної випадкової величини, її значення можуть заповнювати деякий довільний інтервал. Очевидно, що в цьому випадку задати усі значення випадкової величини нереально.

Навіть у випадку, коли це зробити можна, задача розв’язується складно. Розглянутий щойно приклад навіть при простій умові приводить до достатньо незручних обчислень, а якщо у задачі буде декілька сотень приладів?

Тому постає задача по можливості відмовитись від індивідуального підходу до кожної задачі і знайти, по можливості, найбільш загальний спосіб задання будь-яких типів випадкових величин.

Нехай x – дійсне число. Імовірність події, що X набуде значення, меншого x, тобто $X < x$, позначимло через $F(x)$.

Означення. *Функцією розподілу* називають функцію $F(x)$, що визначає імовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування прийме значення, менше за x.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцію розподілу також називають *інтегральною функцією*.

Функція розподілу існує як для неперервних, так і для дискретних випадкових величин. Вона повністю характеризує випадкову величину і є однією з форм закону розподілу.

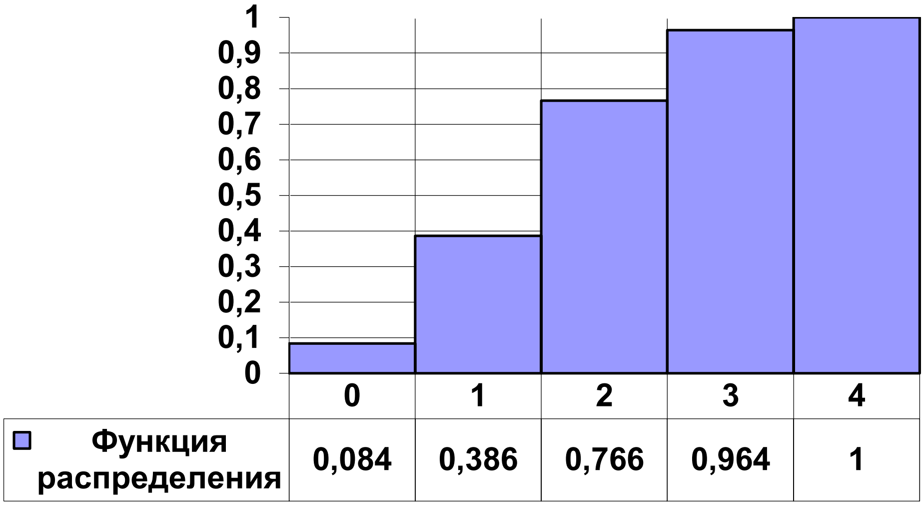
Для дискретної впадкової величини функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Знак нерівності під знаком суми показує, що сумування розповсюджується на ті можливі значення випадкової величини, які менші за аргумент x.

Функція розподілу дискретної випадкової величини X розривна і зростає стрибками при переході через кожне значення x_i.

Так для прикладу, що розглядався вище, функція розподілу матиме вигляд:



8.11.1. Властивості функції розподілу.

1) значення функції розподілу належать відрізку [0; 1]: $0 \le F(x) \le 1$.

2) $F(x)$ – неспадна функція: $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$.

3) Імовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтегрвала (a; b), рівна приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4) На «мінус нескінченності» функція розподілу рівна нулю; на «плюс нескінченності» функція розподілу рівна одиниці.

5) Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде одного певного значення, рівна нулю.

Таким чином, немає потреби казати про будь-яке конкретне значення випадкової величини. Цікавість представляє лише імовірність потрапляння випадкової величини у будь-який інтервал, що відповідає більшості практичних задач.

8.12. Густина розподілу.

Функція розподілу повністю характеризує випадкову величину, однак, має один недолік. По функції розподілу важко казати про характер розподілу випадкової величини у невеликому околі тій чи іншої точки числової осі.

Означення. *Густиною розподілу* імовірностей неперервної випадкової величини X називається функція $f(x)$ – перша похідна від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Густину розподілу також називають *диференціальною функцією*.

Зміст густини розподілу полягає у тому, що вона показує, як часто з'являється випадкова величина X у деякому околі точки x при повторенні випробувань.

Після введення функцій та густини розподілу можна дати означення *неперервної в ипадкової величини*.

Означення. Випадкова величина X називається *неперервною*, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна на усій осі OX, а густина розподілу $f(x)$ існує завжди, за виключенням, можливо, скінченної кількості точок.

Знаючи густину розподілу, можна обчислити імовірність того, що деяка випадкова величина X прийме значення, що належить даному інтервалу.

Теорема. *Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу* $(a;\ b)$, *рівна визначеному інтегралу від густини розподілу, узятому в межах від a до* b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Доведення цієї теореми основане на означенні густини розподілу та третій властивості функції розподілу, що записані вище.

Геометрично це означає, що імовірність того, що неперервна випадкова величина набуває значення, що належить інтервалу $(a,\ b)$, рівна площі криволінійної трапеції, обмеженої віссю OX, кривою розподілу $f(x)$ і прямими $x=a$ та $x=b$.

Функція розподілу може бути легко знайдена, якщо відома густина розподілу, за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

8.12.1. Властивості густини розподілу.

1) Густина розподілу – невід'ємна функція: $f(x) \geq 0.$

2) Невласний інтеграл по густині розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ рівний одиниці:

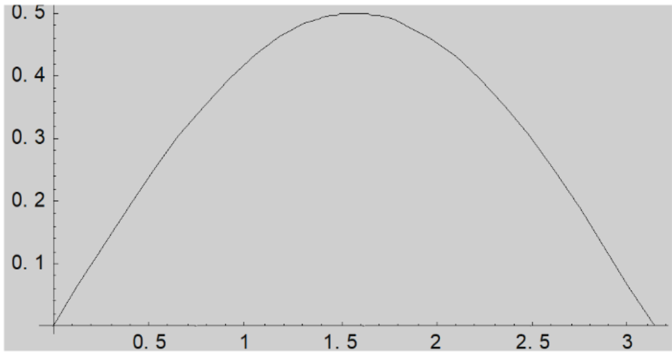
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

: Випадкова величина підкорена закону розподілу з густиною:

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x, & при \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & при \quad x < 0 \quad або \quad x > \pi \end{cases}.$$

Потрібно знайти коефіцієнт a, побудувати графік функції густини розподілу, визначити імовірність того, що випадкова величина потрапить у інтервал від 0 до $\dfrac{\pi}{4}$.

● Побудуємо графік густини розподілу:



Для знаходження коефіцієнта a скористуємось властивістю: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\pi} a\sin x dx + \int\limits_{\pi}^{\infty} 0dx = a\int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx = -a\cos x\Big|_{0}^{\pi} = 2a = 1;$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

Задана неперервна випадкова величина x своєю функцією розподілу *f(x)*.

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & при \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x| > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Потрібно визначити коефіцієнт A, знайти функцію розподілу, побудувати графіки функції розподілу і густини розподілу, визначити імовірність того, що випадкова величина x потрапить в інтервал $\left(\dfrac{\pi}{6}; 2\right)$.

● Знайдемо коефіцієнт A.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Знайдемо функцію розподілу:

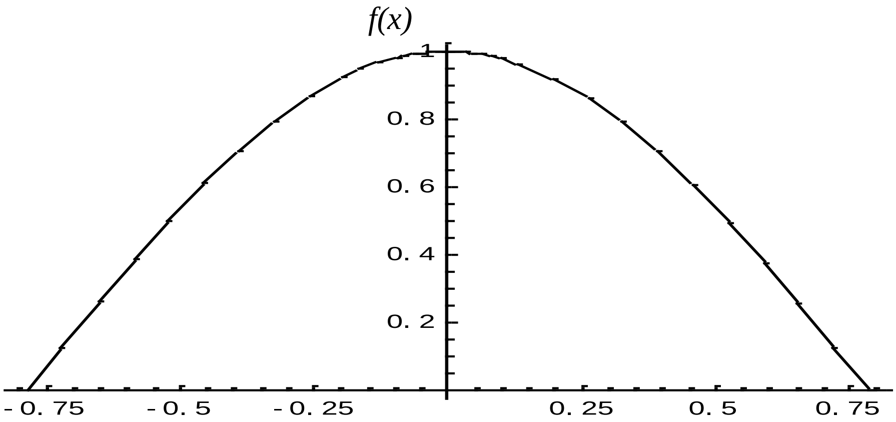
1) на $x < -\dfrac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$

2) на $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{x} \cos 2x dx = \dfrac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{1}{2};$

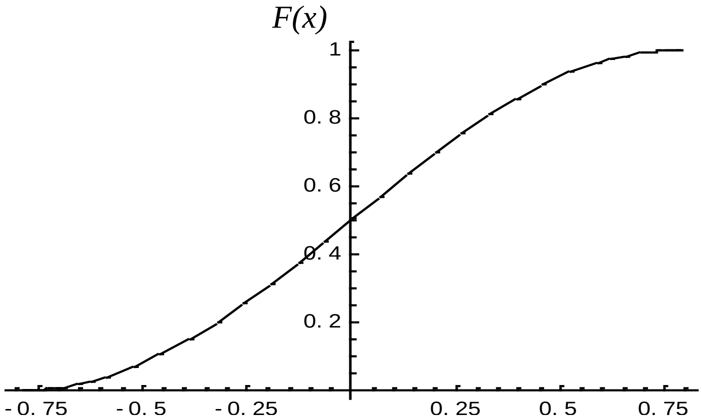
3) на $x > \dfrac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{x} 0dx = \dfrac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$

Отже: $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & при \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0, & при \quad |x| > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$; $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < -\dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{\sin 2x + 1}{2}, & при \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & при \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Побудуємо графік густини розподілу:



Побудуємо графік функції розподілу:



Знайдемо імовірність потрапляння випадкової величини у інтегрвал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{2} 0 dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

Ту ж саму імовірність можна шукати і іншим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3)+1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

8.13. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

Нехай неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $f(x)$. Нехай усі можливі значення випадкової величини належать відрізку $[a; b]$.

Означення. *Математичним очікуванням* неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[a; b]$, називається визначений інтеграл

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx.$$

Якщо можливі значення випадкової величини розглядаються на усій числовій осі, то математичне очікування знаходиться за формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

При цьому невласний інтеграл має збігатися.

Означення. *Дисперсією* неперервної випадкової величини називається математичне очікування квадрату її відхилення:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

По аналогії з дисперсією дискретної випадкової величини, для практичного обчислення дисперсії використовується формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Означення. *Середнім квадратичним відхиленням* називається квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Означення. *Модою* M_0 дискретної випадкової величини називається її найбільш імовірнісне значення. Для неперервної випадкової величини мода – таке значення випадкової величини, при якій густина розподілу має максимум:

$$f(M_0) = \max.$$

Якщо многокутник розподілу для дискретної випадкової величини або крива розподілу для неперервної випадкової величини має два або більше максимумів, то такий розподіл називається *двохмодальним* або *багатомодальним*.

Якщо розподіл має мінімум, але не має максимуму, то він називається *антимодальним*.

Означення. *Медіаною* M_D випадкової величини X називається таке її значення, відносно якого рівно ймовірне отримати більше або менше значення випадкової величини:

$$P(X < M_D) = P(X > M_D).$$

Геометрично медіана – абсциса точки, у якій площа, обмежена кривою розподілу ділиться навпіл.

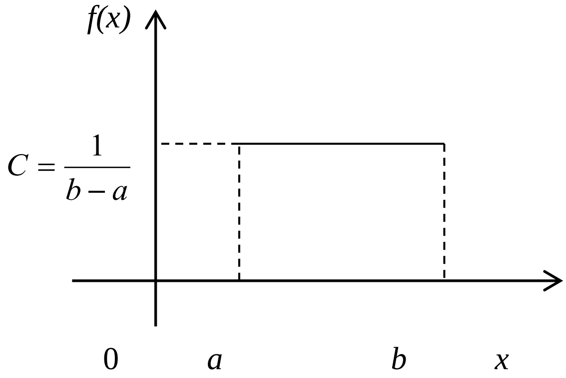
Відмітимо, що якщо розподіл одномодальний, то мода і медіна співпадають з математичним очікуванням.

8.14. Рівномірний розподіл.

Означення. Неперервна величина має *рівномірний розподіл* на відрізку [a, b], якщо на цьому відрізку густина розподілу випадкової величини стала, а поза ним рівна нулю:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ C, & a\le x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Стала величина C може бути визначена з умови рівності одиниці площі, обмеженої кривою розподілу.

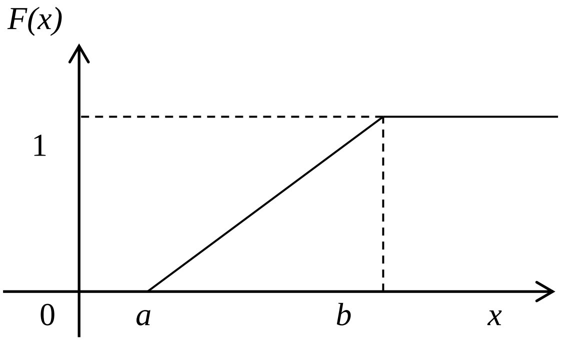


Отримаємо: $C=\dfrac{1}{b-a}$.

Знайдемо функцію розподілу *F(x)* на відрізку [*a*,*b*].

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при} \quad a\le x\le b;\\ 1, & \text{при} \quad x>b.\end{cases}$$



Для того, щоб випадкова величина підкорювалась закону рівномірного розподілу необхідно, щоб її значення лежали всередині деякого визначеного інтервала, і всередині цього інтервала значення цієї величини були б рівноймовірнісні.

Визначимо математичне очікування і дисперсію випадкової величини, що підкорена рівномірному закону розподілу.

$$m_x=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2}=\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Імовірність потрапляння випадкової величини у заданий інтервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

8.15. Показниковий розподіл.

Означення. *Показниковим* (*експоненціальним*) називається розподіл імовірностей неперервної випадкової величини X, яке описується густиною**:**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x \ge 0. \end{cases}$$

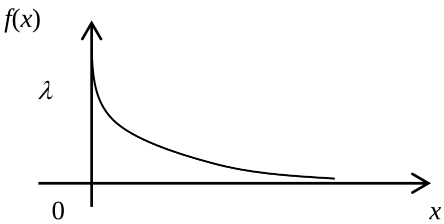
де λ – додатнє число.

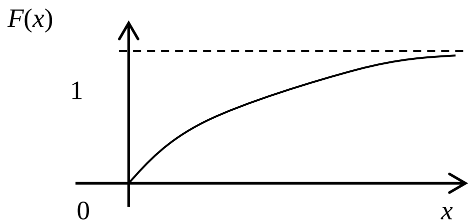
Знайдемо закон розподілу.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Графіки функції розподілу і густини розподілу:





Знайдемо математичне очікування випадкової величини, що підкорена показниковому розподілу.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \begin{Bmatrix} u = x; e^{-\lambda x}dx = dv; \\ du = dx; -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{Bmatrix} = \lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx \right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Результат отриманий з використанням факту, що

$$xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}} - 0 = \begin{Bmatrix} По \quad правилу \\ Лопіталя \end{Bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Для знаходження дисперсії знайдемо величину $M(X^2)$.

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx.$$

Двічі інтегруючи по частинам, отримаємо: $M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$.

Тоді $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Отже: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$; $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma_x = \frac{1}{\lambda}$.

Видно, що у випадку показникового розподілу математичне очікуваня і середнє квадратичне відхилення рівні.

Також легко визначити і ймовірність потрапляння випадкової величини, що підкорена показниковому закону розподілу, у заданий інтервал:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

8.16. Нормальний закон розподілу.

Означення. *Нормальним* називається розподіл імовірностей неперервної випадкової величини, яке описується густиною імовірності:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Нормальний закон розподілу також називається *законом Гаусса*.

Нормальний закон розподілу займає центральне місце у теорії ймовірностей. Це обумовлено тим, що цей закон проявляється у всіх випадках, коли випадкова величина є результатом дії великої кількості різних факторів. До нормального закону наближаються усі інші закони розподілу.

Можна легко показати, що параметри m_x і σ_x, які входять у густину розподілу є відповідно математичним очікуванням і середнім квадратичним відхиленням величини X.

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Графік густини нормального розподілу називається *нормальною кривою* або *кривою Гаусса*.

Нормальна крива має наступні *властивості*:

1) функція визначена на усій числовій осі;

2) при усіх x функція розподілу набуває лише додатніх значень;

3) вісь OX є горизонтальною асимптотою графіка густини імовірності, так як пр. необмеженому зростанні по абсолютній величині аргумента x, значення функції прямує до нуля;

4) знайдемо екстремум функції:

$$y' = -\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0; \qquad x = m.$$

Так як при $y'>0$ при $x<m$ та $y'<0$ при $x>m$, то в точці $x=m$ функція має максимум, рівний $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) функція є симетричною відносно прямої $x=a$, так як різниця $(x–a)$ входить у функцію густини розподілу у квадраті;

6) для знаходження точок перегину графіка знайдемо другу похідну функції густини:

$$y''=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\left[1-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right].$$

При $x=m+\sigma$ і $x=m-\sigma$ друга похідна рівна нулю, а при переході через ці точки змінює знак, тобто у цих точках функція має перегин.

У цих точках значення функції рівне $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

Побудуємо графік функції густини розподілу:

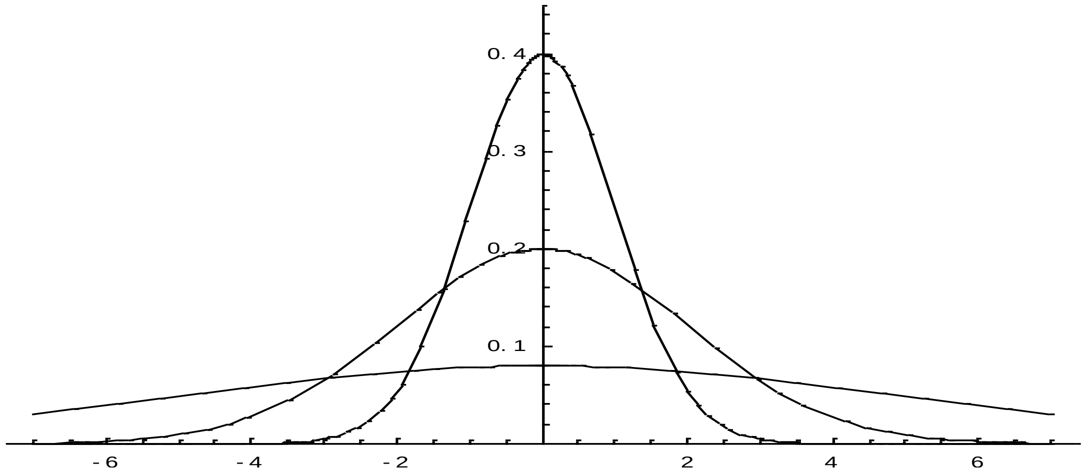


Рис. 8.1

Побудовані графіки при $m=0$ та трьох можливих значеннях середнього квадратичного відхилення $\sigma=1$, $\sigma=2$ та $\sigma=7$. Як видно, пр. збільшенні значення середнього квадратичного відхилення графік стає більш пологим, а максимальне значення зменшується.

Якщо $a>0$, то графік зміститься у додатному напрямку, якщо $a<0$ – у від'ємному.

При $a=0$ та $\sigma=1$ крива називається *нормованою*. Рівняння нормованої кривої:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

8.17. Функція Лапласа.

Знайдемо імовірність потрапляння випадкової величини, розподіленої по нормальному закону, у заданий інтервал:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Позначимо $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}=t; \quad \frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}=\alpha; \quad \frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}=\beta.$

Тоді $P(a<X<b)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\left[\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)\right].$

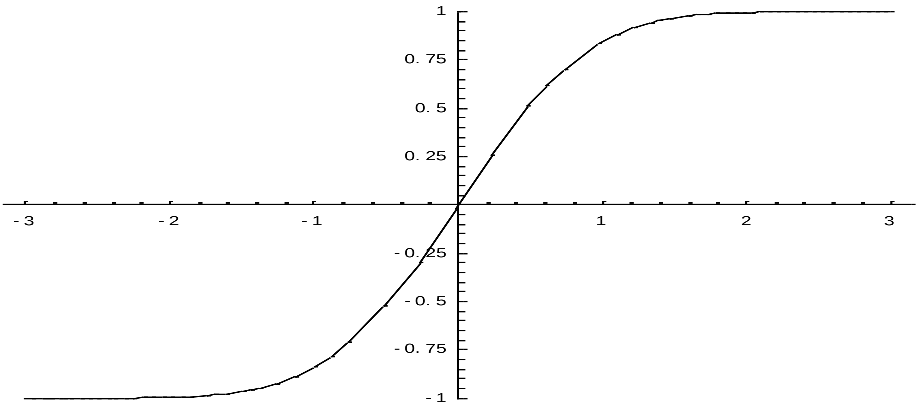
Так як інтеграл $\int e^{-t^2}dt$ не виражається через елементарні функції, то розглянемо функцію:

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-t^2}dt,$$

яка називається *функцією Лапласа* або *інтегралом імовірностей*.

Значення цієї функції при різних значення x пораховані і приводяться у спеціальних таблицях.

Нижче показано графік функції Лапласа.



Функція Лапласа має наступні властивості:

1) $\Phi(0) = 0$;

2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

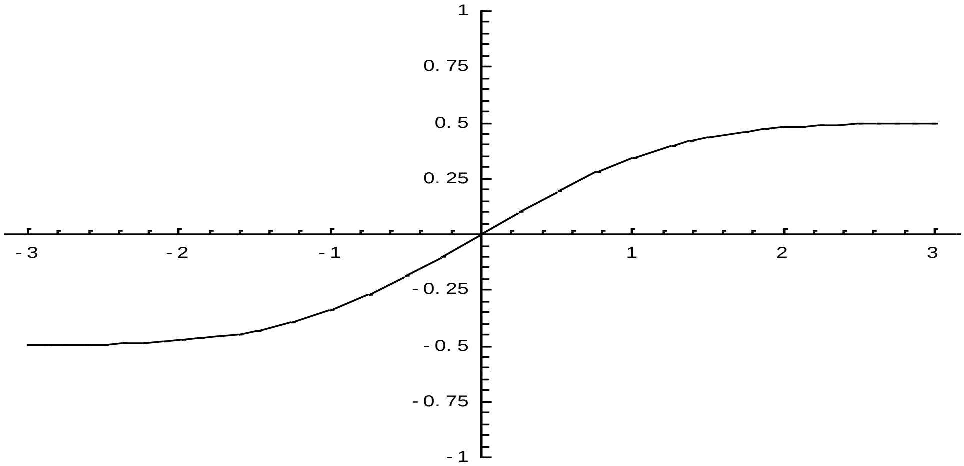
3) $\Phi(\infty) = 1$.

Функцію Лапласа також називають *функцією помилок* і позначають $erf\,x$.

Ще використовується *нормована функція Лапласа*, яка пов’язана з функцією Лапласа співвідношенням:

$$\overline{\Phi}(x)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-t^2/2}dt.$$

Нижче показано графік нормованої функції Лапласа.



При розгляді нормального закону розподілу виділяється важливий частинний випадок, відомий як *правило трьох сигм*.

Запишемо імовірність того, що відхилення нормально розподіленій випадковій величині від математичного очікуваня менше заданої величини Δ:

$$P(|X-m|<\Delta)=\overline{\Phi}\left[\frac{m+\Delta-m}{\sigma}\right]-\overline{\Phi}\left[\frac{m-\Delta-m}{\sigma}\right]=\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]-\overline{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right]=2\overline{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right].$$

Якщо прийняти $\Delta=3\sigma$, то отримаємо з використанням таблиць значення функції Лапласа:

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\overline{\Phi}(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

Тобто імовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного очікування на величину, більшу, ніж потроєне середнє квадратичне відхилення, практично рівне нулю.

Це правило називається *правилом трьох сигм*.

На практиці вважається, що якщо для будь-якої випадкової величини виконується правило трьох сигм, то ця випадкова величина має нормальний розподіл.

Потяг складається зі 100 вагонів. Маса кожного вагона – випадкова величина, розподілена по нормальному закону з математичним очікуванням *a*=65 т та середнім квадратичним відхиленням σ=0,9 т. Локомотив може везти склад масою не більше 6600 т, в противному випадку необхідно чіпляти другий локомотив. Знайти імовірність того, другий локомотив не знадобиться.

● Другий локомотив не знадобиться, якщо відхилення маси складу від очікуваного (100·65 = 6500) не перевищує 6600 – 6500 = 100 т.

Так як маса кожного вагона має нормальний розподіл, то й маса усього складу теж буде розподілена нормально.

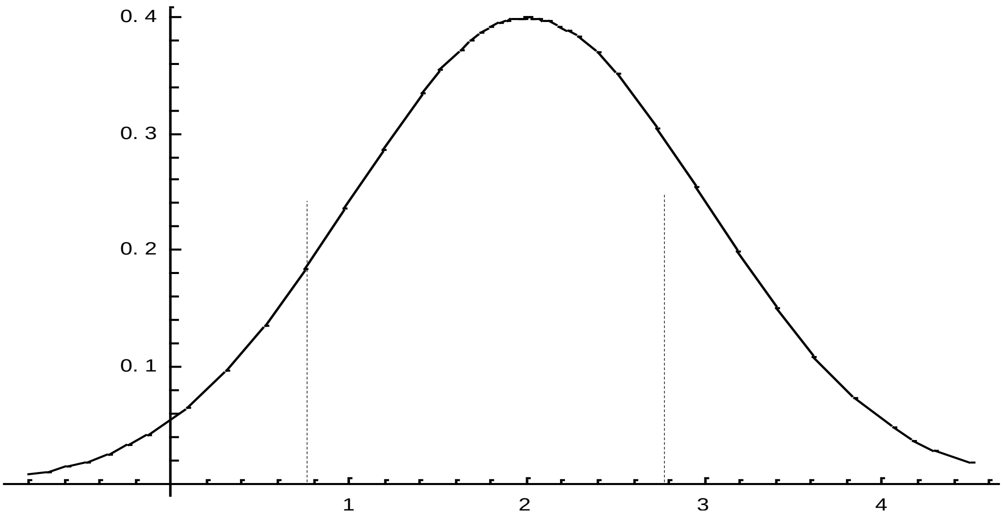
Отримаємо:

$$P(|X-M(X)|<100=2\overline{\Phi}\left[\frac{100}{100\sigma}\right]=2\overline{\Phi}[1{,}111]=2\cdot 0{,}3665=0{,}733.$$

Нормально розподілена випадкова величина *X* задана своїми параметрами – *a=2* – математичне очікування і σ=1 – середнє квадратичне відхилення. Потрібно написати густину імовірності та побудувати її графік, знайти імовірність того, що X відхилиться (по модулю) від математичного відхилення не більш, ніж на 2.

● Густина розподілу має вигляд: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$.

Побудуємо графік:



Знайдемо імовірність потрапляння випадкової величини у інтервал (1; 3).

$$P(1<X<3)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi(0{,}7071)+\Phi(0{,}7071)\right]=0{,}6778.$$

Знайдемо імовірність відхилення випадкової величини від математичного очікуваня на величину, не більшу, ніж 2.

$$P(|X-2|<2)=\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\Phi(\sqrt{2})\approx 0{,}95.$$

Той же результат може бути отриманий з використанням нормованої функції Лапласа:

$$P(|X-2|<2)=2\overline{\Phi}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)=2\overline{\Phi}(2)=2\cdot 0{,}4772\approx 0{,}95.$$

8.18. Теорема Бернуллі.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність появи події A рівна p.

Потрібно визначити відносну частоту появи події A.

Теорема. *Якщо у кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події A стала, то як завгодно близька одиниці імовірність того, що відхилення відносної частоти від імовірності p по абсолютній величині буде як завгодно малим, якщо число випробувань достаньо велике*:

$$\lim_{n\to\infty}P(|m/n-p|<\varepsilon)=1.$$

Тут m – число появ події A. З усього сказаного вище не слідує, що із збільшенням числа випробувань відносна частота неухильно прямує до імовірності p, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}=p$. У теоремі мається на увазі лише імовірність наближення відносної частоти до імовірності появи події A у кожному випробуванні.

У випадку, якщо імовірності появи події A у кожному випробуванні різні, то справедлива теорема, відома як *теорема Пуассона*.

Теорема Пуассона. *Якщо проводиться n незалежних випробувань і ймовірність появи події A у кожному досліді рівна p_i, то при збільшенні n частота події A збігається по імовірності до середнього арифметичного імовірностей p_i.*

8.19. Теорема Муавра–Лапласа.

(Абрахам де Муавр (1667–1754) – англійський математик; П'єр-Сімон Лаплас (1749–1827) – французький математик)

Теорема Муавра–Лапласа. *Якщо проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p, то для будь-якого інтервала (α, β) справедливе співвідноешння:*

$$P\left(\alpha<\frac{Y-np}{\sqrt{npq}}<\beta\right)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right]=\overline{\Phi}(\beta)-\overline{\Phi}(\alpha).$$

де Y – число появ події A в n випробуваннях, q=1–p, Φ(x) – функція Лапласа, $\overline{\Phi}(x)$*– нормована функція Лапласа.*

Теорема Муавра–Лапласа описує поведінку біноміального розподілу при великих значеннях n.

Дана теорема дозволяє суттєво спростити обчислення по формулі біноміального розподілу.

Розрахунок імовірності потрапляння значення випадкової величини у заданий інтервал $P(\alpha<Y<\beta)=\sum\limits_{\alpha<k<\beta}C_n^k p^k q^{n-k}$ при великих значеннях n складний. Простіше скористатися формулою:

$$P(\alpha<Y<\beta)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{2npq}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{2npq}}\right)\right].$$

Теорема Муавра–Лапласа широко використовується при розв'язуванні практичних задач.

Вправи для самостійного розв'язування.

1. Є 5 видів конвертів без марок і 4 види марок однакової вартості. Скількома способами можна вибрати конверт із маркою для посилки листа?

2. Гральна кістка кинута 3 рази. Яка ймовірність того, що при цьому всі грані, що випали, різні?

3. У пасажирському поїзді 9 вагонів. Скількома способами можна розсадити в поїзді 4 осіб за умови, що всі вони повинні їхати в різних вагонах?

4. Скільки існує різних автомобільних номерів, які складаються з п'яти цифр, якщо перша цифра не дорівнює нулю.

5. Три дороги з'єднують міста Черкаси і Київ, чотири дороги з'єднують міста Київ і Харків. Скількома способами можна зробити поїздку з Черкас в Харків через Київ та повернутися в Черкаси також через Київ?

6. Скількома способами можна в рядок написати шість плюсів і чотири мінуси?

7. Імовірність виграшу по одному білету лотереї рівна $\frac{1}{7}$. Яка імовірність того, що, придбавши 5 білетів, можна виграти по усім п'яти білетам.?

8. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 вибирається одна, а з тих, що залишились – друга. Знайти імовірність того, що буде вибрана непарна цифра першого разу.

9. Курсант забув останню цифру номера телефону батьків і тому набирає її навмання. Знайти імовірність того, що йому прийдеться зробити рівно 2 невдалі спроби.

10. Курсант написав шпаргалки на 20 білетів з 25. Яка імовірність того, що з трьох білетів, які залишились на столі, у нього є шпаргалки принаймні на 2?

11. На розподілі в обласному ГУДСНС 5 випускників ЧІПБ і 5 випускників УЦЗ. В кабінет до начальника запрошуються по двоє. Яка імовірність того, що всі пари будуть складатися з випускників одного вузу?

12. П'ять курсантів навмання сідають за круглий стіл. Яка імовірність того, що певна пара опиниться поряд?

13. 60% у ЧІПБ – курсанти. 80% курсантів і 75% студентів ходять на заняття з папками. У чергову комендатуру принесли загублену папку. Яка імовірність того, що ця папка належить курсанту?

14. У взводі з 30 курсантів є 4 відмінних, 10 добрих і 16 посередніх стрілків. Імовірність попадання в ціль при одному пострілі для відмінного стрілка рівна 0,9, для доброго – 0,7, для посереднього – 0,5. Знайти імовірність того, що випадково вибраний стрілець попаде в ціль.

15. Відомо, що 96% випускників ЧІПБ – фахівці. Спрощене тестування визнає фахівця з імовірністю 0,98 і нефахівця з імовірністю 0,05. Визначити імовірність того, що випускник, що пройшов тестування, фахівець.

16. Для здачі іспиту курсантам необхідно було підготувати 30 запитань. З 25 курсантів 10 підготували усі запитання, 8 – 25 запитань, 5 – 20 запитань, 2 – 15 запитань. Викликаний курсант відповів на поставлене запитання. Знайти імовірність того, що цей курсант підготував усі запитання.

17. Є 107 монет, причому у однієї з них герб з обох сторін, а інші монети звичайні. Навмання вибрану монету, не роздивляючись, підкидають 10 разів, причому при усіх підкиданнях вона падала гербом угору. Знайти імовірність того, що була вибрана монета з двома гербами.

18. Один повелитель, якому набрид його астроном (багато казав неправди), вирішив його стратити. Однак, будучи добрим повелителем, він вирішив дати астроному останній шанс. Йому потрібно було розподілити по 2 ящикам 4 кульки: 2 чорні і 2 білі. Палач вибере навмання один з ящиків і з неї візьме одну кульку. Якщо кулька буде чорна, то астронома

стратять, якщо ж біла – залишиться жити. Яким чином астроному потрібно розмістити кульки в ящиках, щоб забезпечити собі максимальну імовірність залишитися живим?

19. Імовірність випустити «фахівця» – 0,95. Скільки має бути випускників, щоб найімовірніша кількість «нефахівців» була 15?

20. Імовірність того, що банкомат при прийманні картки спрацює правильно, рівна 0,99. Скільки разів потрібно скористатись банкоматом, щоб найти найбільш імовірна кількість правильної роботи банкомата була рівна 100?

21. Визначити імовірність того, що номер першої ліпшої машини містить рівно дві п’ятірки (номер машини 5-тизначний).

22. 2 баскетболісти роблять по 3 кидки у кошик. Імовірності влучення м’яча у кошик при кожному кидку рівні, відповідно, 0,5, 0,6, 0,7. Знайти імовірність того, що у обох буде рівна кількість влучень.

23. В сім’ї 5 дітей. Знайти імовірність того, що серед дітей 4 хлопчики, якщо імовірності народження хлопчика і дівчинки по 0,5.

24. Знайти найбільш імовірну кількість випадань «шістки» при 46 киданнях грального кубика.

Розділ 9 Математична статистика

Термін *"статистика"* походить від латинського слова status (*статус*), що означає "визначене положення речей". У даний час термін "*статистика*" вживається в трьох значеннях:

1) як *галузь* практичної діяльності зі збору, обробки та аналізу даних соціально-економічного та іншого масового характеру;

2) як *наука*, що містить теоретичні положення і методи розв'зання практичних задач статистики (*математ ична статистика*);

3) як *підсумкові* статистичні дані, тобто як результати застосування статистичних методів до початкової статистичної інформації.

Математична статистика – це наука про методи реєстрації, опису й аналізу статистичних експериментальних даних, які одержуються у результаті спостереження масових випадкових явищ.

Задачами математичної статистики, які найчастіше зустрічаються на практиці, є:

1) визначення закону розподілу випадкової величини (або системи випадкових величин) за статистичними початковими даними;

2) перевірка правдоподібності гіпотез, наприклад – чи узгодяться результати експерименту з гіпотезою про те, що дана випадкова величина підпорядкована закону *розподілу* $F(x)$;

3) відшукання невідомих параметрів розподілу випадкової величини або системи випадкових величин (або оцінок цих параметрів).

У математичній статистиці використовується властива цій предметній галузі система категорій і понять. Розглянемо основні з цих понять.

9.1. Варіаційний ряд, гістограма.

Припустимо, що виникла ситуація, у якій потрібно вивчити сукупність об'єктів (наприклад покупців продукції фірми), оцінюючи деяку ознаку, яка властива кожному з цих об'єктів (наприклад, вік). Якщо аналізована ознака має кількісне значення, то частіше за все цю ознаку ототожнюють із випадковою величиною, а конкретне значення ознаки сприймається як значення випадкової величини.

Означення. *Вибірковою сукупністю* (синоніми: вибірка, простий статистичний ряд) називається сукупність значень x_i тієї самої ознаки (ξ) у випадково відібраних n об'єктів.

Звичайно вибіркова сукупність оформляється у вигляді таблиці в два рядки (див. табл. 4. 1). У першому рядку вказують номер об'єкта (або спроби), у другому – значення ознаки цього об'єкта або в цій спробі (значення випадкової величини ξ). Така вибіркова сукупність далі підлягає обробці, наприклад – побудові статистичної функції розподілу. Вибіркова сукупність є елементом більш загальної – генеральної сукупності.

Таблиця 9.1

i	1	2	…	k	…	N
ξ	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n

Означення. *Генеральною сукупністю* називається сукупність значень тієї самої ознаки (ξ) в *усіх* об'єктах, зі складу яких проводиться вибірка.

Означення. *Обсягом сукупності* (вибіркової або генеральної) називають *кількість* (n) об'єктів цієї сукупності.

Серед отриманих n значень ознаки можуть бути однакові значення. Так, значення x_i може зустрічатися n_i разів. У результаті, *різні* значення ознаки ξ можуть виявитися рівними x_1, x_2, …, x_m, а кількість таких *різних* значень ознаки ξ у вибірці може дорівнювати деякій величині m ($m \le n$). Для опису зазначеної ситуації використовують поняття "варіант".

Означення. *Варіантом* називають конкретне, відмінне від інших, отримане в спробі значення x_i ознаки ξ .

Означення. *Частотою варіанту* x_i у вибірці називають кількість n_i *однакових* значень (x_i) ознаки у вибірці.

Сума частот усіх варіантів дорівнює обсягу вибірки:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

Означення. *Відносною частотою* (n_i^*) значення x_i ознаки ξ називається відношен-ня частоти n_i варіанта x_i до обсягу вибірки n:

$$n_i^* = \frac{n_i}{n} \le 1; \qquad \sum_{i=1}^{m} n_i^* = 1.$$

Означення. *Дискретним варіаційним* рядом (*варіацією*) називають упорядковану за зростанням значень x_i послідовність варіантів із вказівкою їх абсолютних або відносних частот і подану у вигляді таблиці (див., наприклад, табл. 9.2).

Означення. *Полігоном відносних частот* (див. рис. 9.1) називають ломану лінію, яка з'єднує точки з координатами (x_i, n_i^*).

Означення. *Розмахом варіації* (R) називають *різницю* між максимальним (x_{max}) і мінімальним (x_{min}) значеннями варіантів у вибірці:

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Таблиця 9.2

Дискретний варіаційний ряд

Варіант x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_m
Частота n_i	n_1	n_2	n_3		n_m
Відносна частота n_i^*	n_1^*	n_2^*	n_3^*		n_m^*

Записати у вигляді варіаційного ряду вибірку:

3; 9; 9; 5; 3; 6; 9; 5; 5; 5; 6; 3; 6; 5; 6; 3; 3; 5; 6; 5.

Визначити розмах вибірки, побудувати полігон частот і полігон відносних частот.

• Обсяг вибірки (число її елементів) дорівнює $\boldsymbol{n} = 20$. Упорядкуємо варіанти за зростанням і підрахуємо кількість повторень значень x_i у кожному варіанті, одержимо:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 5; \quad x_3 = 6; \quad x_4 = 9;$$
$$n_1 = 5; \quad n_2 = 7; \quad n_3 = 5; \quad n_4 = 3.$$

Контроль обчислень виконаємо шляхом підсумовування частот варіантів:

$$\Sigma\, n_i = 20.$$

Для кожного варіанту $\boldsymbol{x_i}$ знаходимо відносну частоту: $\boldsymbol{n_i^* = n_i / n}$.

Отриманий варіаційний ряд набуде вигляду (див. табл. 9.3).

Таблиця 9.3

Дискретний варіаційний ряд

x_i	3	5	6	9
n_i	5	7	5	3
n_i^*	0,25	0,35	0,25	0,15

Контроль обчислень виконаємо шляхом підсумовування відносних частот варіантів:

$$\Sigma\, n_i^* = 1.$$

Розмах вибірки одержимо:

$$R = x_{max} - x_{min} = 9 - 3 = 6.$$

Для побудови полігону час-тот нанесемо отримані точки (x_i, n_i^*) із табл. 9.3 на графік (див. рис. 9.2).

Якщо обсяг вибірки великий (сотні варіантів), то дискретний варіаційний ряд стає незручною формою запису. Тоді увесь діапазон значень ознаки ξ розбивають на k часткових інтервалів, які не перетинаються, (синонім – розрядів) $[a_{i-1}; a_i)$, ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Для кожного i-го інтервалу підраховують кількість значень x_i ознаки ξ, що потрапили в цей інтервал, – частоту інтервалу (n_i). Елемент x_i, який *співпав* із границею інтервалу, відносять до наступного інтервалу, а не до попереднього.

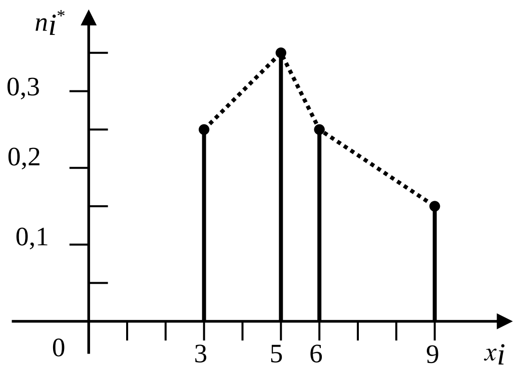


Рис. 9.1. Полігон відносних частот (див. табл. 9.3)

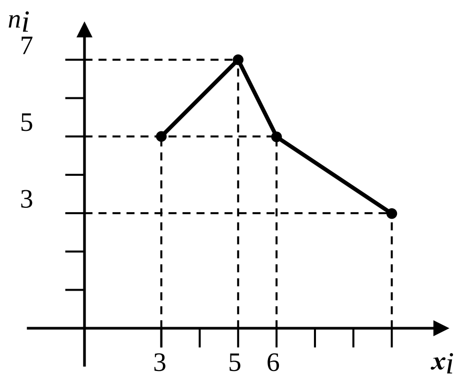


Рис. 9.2. Полігон частот (див. табл. 9.3)

Довжина розрядів може бути як однаковою, так і різною, що визначається необхідністю наявності в кожному інтервалі (розряді) *не менше* 5–10 значень випадкової ознаки ξ. Для ділянок із найбільшою щільністю значень ознаки довжина інтервалу (розряду) може бути меншою, із малою щільністю – більшою.

Раціональне число інтервалів (розрядів) складає 10–20.

Якщо до точності розрахунків немає дуже високих вимог, то частіше використовують розряди рівної довжини. Результати групування значень ознаки $\boldsymbol{\xi}$ за інтервалами записують у вигляді таблиці.

Означення. *Інтервальним варіаційним рядом* називається таблиця відповідності інтервалів значень (розрядів) випадкової величини ознаки ξ і частот n_i або/і відносних частот n_i^* входження значень ознаки в ці розряди, яка (таблиця) отримана за результатами спостережень або спроб (див. табл. 9.4). Такий ряд іноді називають *безперервним* або *статистичним* рядом.

Таблиця 9.4

Інтервальний варіаційний ряд

Інтервал (розряд)	$[a_1; a_2)$	$[a_2; a_3)$	$[a_3; a_4)$	…	$[a_{m-1}; a_m]$
Частота n_i	n_1	n_2	n_3		n_m
Відносна частота n_i^*	n_1^*	n_2^*	n_3^*		n_m^*

Якщо в кожному інтервалі як представницьке значення ознаки ξ узяти середнє значення інтервалу: $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, ($i$=1, 2, …, k), то *інтервальний варіаційний* ряд можна умовно подати вже розглянутим *дискретним варіаційним* рядом. У цьому випадку в першому рядку табл. 9.4 указуються *середні* значення ознак для кожного інтервалу.

Графічно варіаційний ряд зображають у вигляді полігону частот або полігону відносних частот.

Використати 6 інтервалів рівної довжини і побудувати інтервальний варіаційний ряд розподілу за даною вибіркою:

15	18	22	26	15	10	23	27	19	18	14	15	28	6	29	7	11
26	24	19	14	15	7	27	14	19	8	20	5	29	16	10	16	5
18	20	12	16	22	23	20	21	11	16	22	22	6	18	14	11	

Потім перейти до дискретного варіаційного ряду.

● Обсяг вибірки $\boldsymbol{n} = 50$.

Знайдемо розмах вибірки: $R = x_{max} - x_{min} = 29 - 5 = 24$.

За умовою кількість інтервалів $m = 6$, тому довжина кожного часткового інтервалу $h = R / m = 24 / 6 = 4$. Перший інтервал починається з $x_{min} = 5$ і закінчується точкою $x_{min} + h = 5 + 4 = 9$, значення якої до складу інтервалу *не входить*. Ця ж точка є початком другого інтервалу, до складу якого вона *входить*. Виконуючи послідовність таких же розрахунків, одержимо границі 6 інтервалів: [5;9), [9;13), [13;17), [17; 21), [21; 25) [25; 29).

Підраховуємо кількість елементів вибірки, що потрапили в кожний із знайдених інтервалів. Елемент вибірки 21 є границею інтервалів [17; 21) і [21; 25). При підрахунку частоти відносимо його до інтервалу [21; 25). У результаті одержимо такий інтервальний варіаційний ряд (див. табл. 9.5).

Таблиця 9.5

Інтервальний варіаційний ряд

$a_{i-1} \div a_i$	[5÷9)	[9÷13)	[13÷17)	[17÷21)	[21÷25)	[25÷29]
n_i	7	6	12	10	7	8
n_i^*	0,14	0,12	0,24	0,20	0,14	0,16
$n_i^{(n)}$	7	13	25	35	42	50
$F_n(x)$	0,00	0,14	0,26	0,50	0,70	0,84 ($F_n(x$>29)=1

Контроль обчислень виконаємо шляхом підсумовування частот варіантів, тоді одержимо: $\Sigma\, n_i = 50$.

Для кожного часткового інтервалу обчисляємо відносну частоту за формулою: $n_i^* = n_i / n$ і результат заносимо в нижній рядок таблиці.

Контроль обчислень виконаємо шляхом підсумовування відносних частот варіантів, одержимо: $\Sigma\, n_i^* = 1$.

Для переходу від інтервального варіаційного ряду до дискретного варіаційного ряду візьмемо як варіанти середнє значення в кожному інтервалі: $x_i = (a_{i-1} + a_i)/2$. Одержимо наступний дискретний варіаційний ряд:

x_i	7	11	15	19	23	27
n_i	7	6	12	10	8	7
n_i^*	0,14	0,12	0,24	0,20	0,16	0,14

Означення. *Накопиченою частотою* називається число $n_i^{(n)}$, що дорівнює сумі частот усіх варіантів від x_1 до x_i включно: $n_i^{(n)} = \sum_{q=1}^{i} n_q$.

Означення. *Кривою зростаючих результатів* (кумулятою) називається лінія в координатах (x_i, $n_i^{(n)}$).

Для зображення інтервального варіаційного ряду використовують гістограму.

Іноді для порівняльного аналізу гістограму подають у вигляді прямокутників із площею, яка дорівнює частоті відповідних розрядів, і з основою, яка дорівнює довжині цих розрядів (див. рис. 9.3).

Означення. *Гістограмою* називається східчаста фігура, складена з прямокутників, які мають за основи часткові інтервали $[a_{i-1}; a_i)$, а за висоти – *відносні* частоти (іноді – частоти). Приклад гістограми поданий на рис. 9.3 і 9.4.

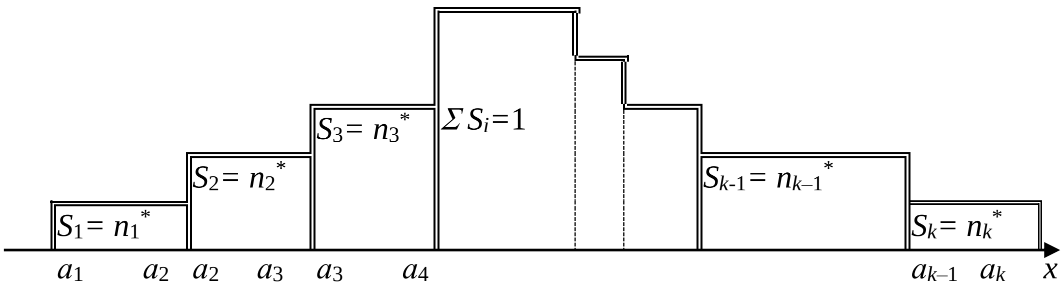


Рис. 9.3. Гістограма інтервального варіаційного ряду

9.2. Емпірична функція розподілу.

Означення. *Емпіричною функцією розподілу* називається функція $F_n(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події ($\xi < x$) і має наступні властивості:

1) значення функції $F_n(x)$ належать інтервалу [0; 1]: $0 \le F_n(x) \le 1$;
2) $F_n(x)$ – функція неспадна;
3) $F_n(x \le x_1) = 0$, якщо x_1 – найменший варіант;
4) $F_n(x > x_m) = 1$, якщо x_m – найбільший варіант.

Розрахунковий вираз для емпіричної функції розподілу можна записати таким способом:

$$F_n(x) = \sum_{x_i < x} n_i^*; \quad \to \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le x_1, \\ n_1^* & \text{при} \quad x_1 < x \le x_2, \\ n_1^* + n_2^* & \text{при} \quad x_2 < x \le x_3, \\ n_1^* + n_2^* + n_3^* & \text{при} \quad x_3 < x \le x_4, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots & \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ n_1^* + n_2^* + \dots + n_m^* = 1 & \text{при} \quad x > x_m. \end{cases}$$

Вигляд емпіричної функції розподілу поданий на рис. 9.5.

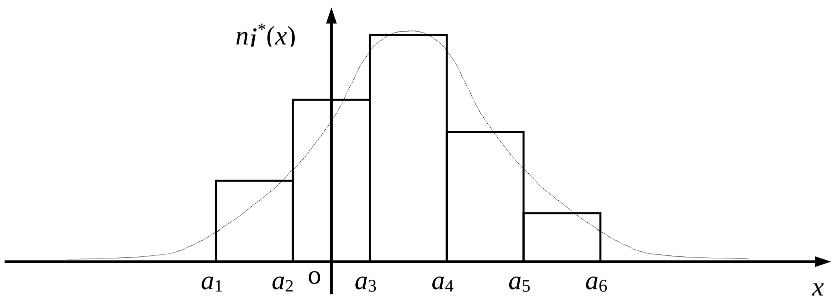


Рис. 9.4. Гістограма, загальний випадок

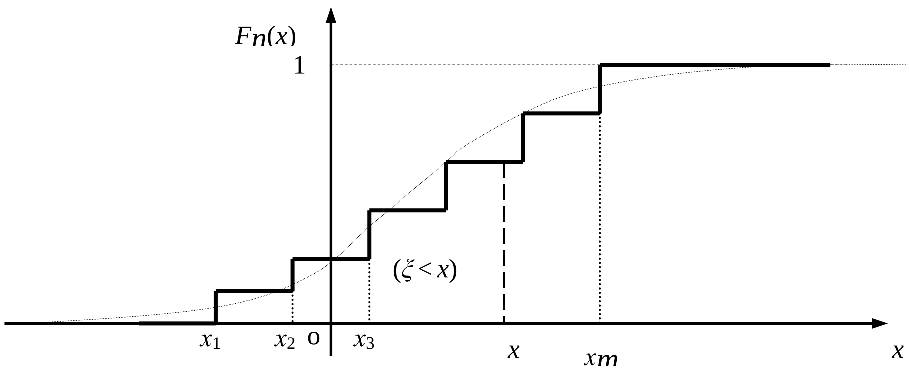


Рис. 9.5. Емпірична функція розподілу, загальний випадок

Знайти і побудувати емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

i	1	2	3
x_i	1	4	7
n_i	5	20	25

● Знаходимо обсяг вибірки: $n = \Sigma\, n_i = 5 + 20 + 25 = 50$.

Для кожного варіанту x_i обчисляємо відносну частоту за формулою: $n_i^* = n_i / n$ і результат заносимо в таблицю:

i	1	2	3
x_i	1	4	7
n_i^*	0,1	0,4	0,5

Контроль обчислень виконуємо шляхом підсумовування відносних частот варіантів, тоді одержимо: $\Sigma\, n_i^* = 1$.

1. Знаходимо емпіричну функцію розподілу $F_n(x)$:

якщо $x \le x_1 = 1$, то $F_n(x) = 0$;

якщо $x_1 < x \le x_2$, тобто $1 < x \le 4$, то $F_n(x) = n_1^* = 0{,}1$;
якщо $x_2 < x \le x_3$, тобто $4 < x \le 7$, то $F_n(x) = n_1^* + n_2^* = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$;
якщо $x > x_3$, тобто $x > 7$, то $F_n(x) = n_1^* + n_2^* + n_3^* = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}5 = 1$.

Отже, одержимо:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 4 < x \le 7, \\ 1 & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

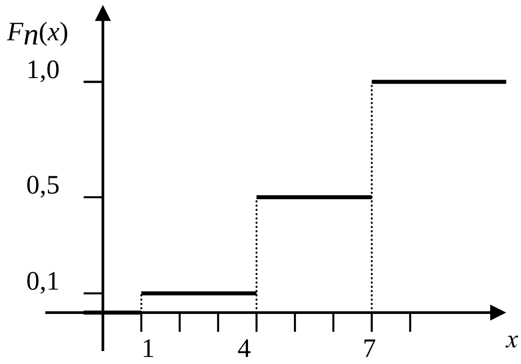


Рис. 9.6. Емпірична функція розподілу

Використовуючи отримані значення функції розподілу $F_n(x)$, будуємо графік (див. рис. 4.6).

9.3. Числові характеристики вибірки.

Означення. *Вибірковим середнім* (середнім арифметичним, позначається $\overline{x}$) називається середнє арифметичне значення ознаки ξ у вибірці x_i.

Коли всі значення ознаки *різні*, розрахункова формула має вигляд:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Коли у вибірці є *частоти* значень ознаки або обчислення виконуються для інтервального варіаційного ряду, тоді варто визначити: x_i – середнє значення ознаки $\boldsymbol{\xi}$ в i-му інтервалі, $\boldsymbol{n_i}$ – частоту значень ознаки в i-му інтервалі. Тоді розрахункова формула набуде вигляду:

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_m n_m}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i .$$

Означення. *Початковим моментом* k-го порядку (ν_k^*) варіаційного ряду називається середнє арифметичне від k-их ступенів варіантів x_i:

$$\nu_k^* = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i^{\,k}\cdot n_i = \sum_{i=1}^{m} x_i^{\,k}\cdot n_i^*, \qquad \nu_1^* = \overline{x}.$$

Означення. *Центральним моментом* k-го порядку (μ_k^*) варіаційного ряду називається середнє арифметичне від k-их ступенів центрованих варіантів x_i:

$$\mu_k^* = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}\right)^k\cdot n_i = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}\right)^k\cdot n_i^* .$$

Означення. *Вибірковою дисперсією* (дисперсією варіаційного ряду) називається середнє арифметичне квадратів відхилення варіантів x_i від свого вибіркового середнього значення, при цьому зберігаються відомі з теорії ймовірностей співвідношення:

$$D_в = S_x^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\cdot n_i; \ \rightarrow\ D_в = S_x^2 = \mu_2^* = \nu_2^* - (\nu_1^*)^2 = \nu_2^* - (\overline{x})^2.$$

Тут S_x – вибіркове значення середнього квадратичного відхилення варіантів x_i.

Властивості вибіркового середнього і вибіркової дисперсії збігаються з розглянутими раніше в теорії ймовірностей властивостями математичного сподівання і дисперсії випадкових величин відповідно.

9.4. Умовні варіанти.

Якщо значення x_i ознаки ξ виражаються багатозначними (великими) числами, то обчислення характеристик вибірки стає трудомістким. У такому випадку переходять до використання *умовних* варіантів, для чого від реальних значень варіантів x_i переходять до їх "центрованих" і потім "нормованих" еквівалентів u_i. Як "центр" нормування вибирають варіант із *найбільшою частотою* і позначають його величину символом a. Якщо вибірка задана у вигляді розподілу *рівновіддалених* варіантів і їх частот (x_i, n_i), то, використовуючи різницю $(h = x_i - x_{i-1})$ між двома сусідніми варіантами, умовні варіанти u_i знаходять за формулою:

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}.$$

Далі, після здійснення розрахунків з урахуванням відомих властивостей вибіркової середньої і дисперсії:

1) $\left(\overline{k \cdot x}\right) = k \cdot \overline{x}; \quad D_в(k \cdot x) = k^2 \cdot D_в(x);$

2) $\left(\overline{x - a}\right) = \overline{x} - a; \quad D_в(x - a) = D_в(x),$

повертаються до початкової вибірки, для якої вирази початкової вибіркової середньої, дисперсії і середнього квадратичного відхилення через відповідні характеристики умовних варіантів мають вигляд:

$$\overline{x} = h \cdot \overline{u} + a; \quad D_в(x) = h^2 \cdot D_в(u); \quad S_u = \sqrt{D_в(u)}; \quad S_x = h \cdot S_u.$$

9.5. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема.

Випадковість виходу одиничної спроби, випробування або експерименту полягає в тому, що заздалегідь передбачати її вихід і оцінити характеристики цього виходу поки не можна. Проте при великій кількості випробувань *характеристики* випадкових подій і випадкових величин втрачають випадковий характер. Ця властивість дозволяє використовувати результати спостережень за масовими явищами і *прогнозувати* можливі результати майбутніх випробувань.

Умови, за яких можна використовувати статистичні оцінки характеристик випадкових величин для оцінки їх параметрів (ймовірності, математичного сподівання, дисперсії, законів розподілу), визначаються *системою граничних теорем*, яка називається *законом великих чисел*. Розглянемо деякі з цих теорем без доведення.

Нерівність Чебишова. Нехай є випадкова величина ξ з математичним сподіванням m і дисперсією D. Нерівність Чебишева стверджує, що яке б не було позитивне число α, ймовірність того, що величина ξ відхилиться від свого математичного сподівання m *не менше* ніж на α (тобто більше або дорівнює α), обмежена зверху величиною $\frac{D}{\alpha^2}$, що формально можна записати так:

$$P(|X-m|\geq\alpha)\leq\frac{D}{\alpha^2}. \qquad (9.1)$$

Зокрема, якщо взяти $\alpha=3\sigma$, то можна знайти оцінку понад ймовір-ності відхилення величини ξ від свого математичного сподівання не менше ніж на 3σ:

$$P(|X-m|\geq 3\sigma)\leq\frac{D}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}\approx 0{,}111. \qquad (9.2)$$

Відзначимо, що на практиці в більшості випадків ймовірність того, що величина ξ вийде за границі ділянки $m\pm 3\sigma$, значно менше 1/9. Наприклад, для нормального закону ця ймовірність дорівнює 0,003. У випадку, коли закон розподілу випадкової величини невідомий, а відомі тільки m і σ, то ділянкою практично можливих значень випадкової величини вважають відрізок $m\pm 3\sigma$ (так зване “*правило трьох сигм*”).

Теорема Чебишова. Якщо в n незалежних випробуваннях спостеріга-ються $x_1,\ldots,x_n$ значень випадкової величини ξ, то при $n\to\infty$ середнє арифметичне випадкової величини ξ *збігається за ймовірністю* до її математич-ного сподівання m. Тобто при будь-якому $\varepsilon>0$ і $\delta>0$ виконується нерівність:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|m-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\geq\varepsilon\right)\leq 1-\delta. \qquad (9.3)$$

Для уточнення змісту поняття “*збігається за ймовірністю*” з’ясуємо, як змінюється середнє арифметичне ($\bar{x}_n$) випадкової величини ξ *при збільшенні числа спроб* – числа доданків під знаком суми у виразі (9.3), від значення $n-1$ до значення n, одержимо:

$$\bar{x}_{n-1}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i; \qquad \to \qquad \sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{x_i}=(\boldsymbol{n}-1)\cdot\bar{\boldsymbol{x}}_{n-1}. \qquad (9.4)$$

$$\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{x_i}+x_n\right)=\frac{1}{n}\left((\boldsymbol{n}-1)\cdot\bar{\boldsymbol{x}}_{n-1}+x_n\right)=\bar{\boldsymbol{x}}_{n-1}+\frac{x_n-\bar{x}_{n-1}}{n}. \qquad (9.5)$$

Уведемо позначення:

$$\Delta\bar{x}_n=\frac{x_n-\bar{x}_{n-1}}{n}. \qquad (9.6)$$

Тоді з формули (9.5) одержимо:

$$\bar{x}_n=\bar{x}_{n-1}+\Delta\bar{x}_n. \qquad (9.7)$$

У підсумку, нове (наступне) значення середнього арифметичного ($\bar{x}_n$) випадкової величини ξ можна рекурентно висловити *через попереднє значення* її середнього арифметичного (формула (9.7)) *з урахуванням* виникаючого збільшення $\Delta\bar{x}_n$ (формули (9.5, 9.6)). Під знаком суми (формули (9.4, 9.5)) складаються випадкові значення (x_i), тому *середнє арифметичне* $\bar{x}_n$ випадкової величини ξ також *буде* величиною *випадковою*.

Змінні, що є в чисельнику в правій частині виразу (9.6) для збільшення $\Delta\bar{x}_n$, є величинами *випадковими*. Врахуємо діапазон ($x_{max}\leq x_i\leq x_{min}$) можливих значень ($x_i$)

випадкової величини ξ і спробуємо з'ясувати, як змінюється абсолютна величина приросту $\Delta\bar{x}_n$ при збільшенні числа спроб n. Для цього замінимо вираз в чисельнику у формулі (9.6) на явно більшу (не меншу) величину, одержимо:

$$\left|\Delta\bar{x}_n\right| \le \left|\frac{x_{\max}-x_{\min}}{n}\right|. \tag{9.8}$$

Виявляється, що після першої спроби (при $n=1$) величина приросту може дорівнювати величині всього діапазону можливих значень (x_i), після другої спроби (при $n=2$) – половині діапазону, після третьої ($n=3$) – третій частині діапазону можливих значень і так далі відбувається ділення діапазону можливих значень на усе більш дрібні частини. Отже, можливий *приріст оцінок* середнього арифметичного (формула (9.7)) при збільшенні числа спроб n буде зменшуватися за відзначеним законом (9.8). Знак різниці випадкових величин, що стоять у дужках (формула (9.6)), може бути як позитивним, так і негативним, тому можна стверджувати, що *абсолютне значення приросту* оцінок не перевищує величину, яка стоїть у правій частині нерівності (9.8).

При необмеженому збільшенні числа спроб n значення величини приросту $\Delta\bar{x}_n$ (формула (9.6)), залишаючись *випадковою величиною*, буде наближатися до нуля:

$$\lim_{n\to\infty}\Delta\bar{x}_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\bar{x}_{n-1}}{n} = 0. \tag{9.9}$$

Отже, *середнє арифметичне* $\bar{x}_n$ випадкової величини ξ буде *величи-ною випадковою* при будь-якій *кінцевій* кількості доданків ($n<\infty$). Проте при необмеженому збільшенні числа доданків ($n\to\infty$) величина $\Delta\bar{x}_n$ додаткової *випадкової* складової (формула (9.7)) зменшується аж *до нуля* (формула (9.9)). Тому середнє арифметичне ($\bar{x}_n$) *перестає залежати від* значення *випадкової* добавки $\Delta\bar{x}_n$, набуваючи нову якість, тобто перетворюючись із випадкової величини $\bar{x}_n$ *в невипадкову величину*, яка називається математичне сподівання (m) випадкової величини ξ. До цього процесу і застосовують термін – "*збігається за ймовірністю*".

Із формули (9.8) шляхом диференціювання за змінною n можна одержати оцінку швидкості (V) "*збіжності за ймовірністю*":

$$V = \left|\frac{d\Delta\bar{x}}{dn}\right| \le \frac{-\left|x_{\max}-x_{\min}\right|}{n^2}. \tag{9.10}$$

Отже, швидкість "*збіжності за ймовірністю*" (V) негативна і обернено пропорційна квадрату обсягу n вибірки.

Приклад зміни величини приросту $\Delta\bar{u}_{n.відн}$ оцінок середнього арифметичного $\bar{u}_n$ випадкової величини, яка відповідає початковій величині ξ, рівномірно розподіленої у границях $x_i \in [0;\ 1]$, при зміні числа значень n (числа елементів у вибірці) для $x_{\min}=0$; $x_{\max}=1$; $C=1$.

Теорема Бернуллі. *Якщо проводиться n незалежних випробувань, у кожному з який подія A може з'явитися з ймовірністю p, то частота m/n появи події A при нескінченному збільшенні числа n спроб збігається за ймовірністю до величини p, тобто при будь-якому ε* >0 і $\delta>0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq 1-\delta,$$

де m – число позитивних виходів (число появ події A) у n випробуваннях.

Центральна гранична теорема. *Якщо $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні, однаково розподілені випадкові величини, що мають математичне сподівання m_x і дисперсію σ_x^2, то при $n\to\infty$ закон розподілу їх суми $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ нескінченно наближається до нормального.*

Дана теорема може бути справедливою і для суми неоднаково розподілених, але порівнянних за своїм розкидом, доданків. На практиці її застосовують і для випадків суми від десятьох доданків, а іноді і менше. При цьому не обов'язково знати закони розподілу окремих доданків, достатньо знати їх математичні сподівання і дисперсії.

Для дискретних випадкових величин окремим випадком центральної граничної теореми є теорема Лапласа.

Теорема Лапласа. *Якщо в кожному з n незалежних випробувань подія A з'являється з ймовірністю p (і не з'являється з ймовірністю q=1–p), то границя ймовірності влучення нормованої випадкової величини m – числа появ події A у n спробах має вигляд:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a<\frac{\boldsymbol{m}-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}<b\right)=\Phi^*(b)-\Phi^*(a),\qquad \Phi^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{v^2}{2}}dv,$$

де $\Phi^*(t)$ – функція Лапласа.

9.6. Статистичні оцінки параметрів.

Розглянуті раніше формули для статистичних оцінок фактично реалізують ідею усереднення значень оцінюваних характеристик, які (характеристики, параметри) позначимо символом E. При цьому розрізняють реальне (істинне) значення параметра E, що поки невідомо, і одержуване зі спроб значення оцінки $\widetilde{E}$ цього параметра.

Означення. *Оцінки*, отримані в результаті статистичної обробки результатів $\boldsymbol{n}$ спостережень деякої випадкової величини ξ (у результаті n спроб), повинні задовольняти *вимогам*: *незсуненності*, *ефективності* та *обгрунтованості*.

1. *Незсуненою* називається оцінка $\widetilde{E}$, якщо її математичне сподівання $M[\widetilde{E}]$ дорівнює *самому* оцінюваному параметру E при будь-якому обсязі вибірки, тобто: $M[\widetilde{E}]=E$.

2. *Ефективною* називається оцінка $\widetilde{E}$, якщо вона серед усіх інших *незсунених* оцінок цього параметра має *найменшу дисперсію* даної оцінки $\widetilde{E}$ щодо істинного значення E, у порівнянні з будь-якою іншою оцінкою $\widetilde{E}_k$: $\quad M[(\widetilde{E}-E)^2]\leq M[(\widetilde{E}_k-E)^2]$.

3. *Обгрунтованою* називається оцінка $\widetilde{E}$, якщо в міру зростання n – числа спостережень (спроб) оцінка *збігається за ймовірністю* до самого оцінюваного параметра E:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\widetilde{E}-E|<\varepsilon)=1,\qquad \varepsilon>0$$

або $$\lim_{n\to\infty} M\left[(\tilde{E}-E)^2\right] = 0.$$

Можна строго показати, що оцінка математичного очікування:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{9.11}$$

є незсуненою, обгрунтованою, має дисперсію оцінки:

$$D\,[\bar{x}] = D\,[\tilde{m}] = \frac{1}{n}\cdot D_x, \tag{9.12}$$

а якщо випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом, то дисперсія (9.12) буде мінімально можливою, тобто оцінка (9.11) – ефективна.

Дійсно, у виразі (9.11) складаються незалежні значення однієї і тієї ж випадкової величини x, що мають однакову дисперсію:

$$D_{x1} = D_{x2} = \ldots = D_{xi} = D_x.$$

Застосовуючи операцію дисперсії до лівої і правої частин рівняння (9.11) і з огляду на властивості дисперсії, одержимо:

$$D\,[\bar{x}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\cdot D\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} D_x = \frac{1}{n^2}\cdot nD_x = \frac{1}{n}\cdot D_x.$$

Оцінка вибіркової *дисперсії* $D_в$ випадкової величини ξ:

$$D_в = S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \bar{x}\right)^2\cdot n_i.$$

є ефективною, обгрунтованою, але *зсуненою* убік менших значень у $\frac{n-1}{n}$ разів.

Для усунення цього зсуву праву частину рівності (9.12) достатньо *розділити* на зазначений множник, у підсумку одержимо так називану “виправлену” дисперсію:

$$\tilde{D}_{в.\,випр} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m}_x)^2\cdot n_i = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \tilde{m}_x^2\right]\cdot\frac{n}{n-1} = S_x^2\cdot\frac{n}{n-1} \tag{9.13}$$

У випадку *нормального* розподілу випадкової величини ξ *дисперсію* самої *оцінки* виправленої дисперсії (9.13) і середнє квадратичне відхилення знайдемо за формулами:

$$D\,[\tilde{D}_x] = \frac{2}{n-1}\tilde{D}^2, \qquad \sigma_x = \tilde{D}_x\cdot\sqrt{\frac{2}{n-1}}\,.$$

Одержувані статистичні (точкові) оцінки сходяться до істинних оцінок лише при *нескінченному* збільшенні числа n спроб. Отже, заміна *істинних* значень шуканих параметрів їх статистичними оцінками завжди супроводжується *помилками*. Якщо такі помилки занадто великі, то наслідки заміни можуть бути істотними. Тому потрібно вміти оцінювати точність і надійність одержуваних оцінок, особливо при малій кількості спостережень n (при малій кількості спроб).

Для визначення точності і надійності статистичних оцінок використовують поняття “довірчий інтервал” і “довірча ймовірність”.

9.7. Довірчий інтервал, довірча ймовірність.

Припустимо, що в результаті n спроб потрібно одержати статистичну оцінку $\tilde{E}$ параметра, що має реальне значення E, із похибкою не більш ε, причому надійність такої оцінки повинна характеризуватися деякою ймовірністю β.

Розглянемо подію, яка полягає в тому, що *реальне* (істинне) значення параметра E, яке поки невідоме (наприклад, математичне сподівання випадкової величини ξ), буде відрізнятися *від одержуваного* зі спроб значення *оцінки* $\tilde{E}$ цього параметра не більш, ніж на величину ε. Ймовірність такої події можна записати у такий спосіб:

$$P(\tilde{E}-\varepsilon < E < \tilde{E}+\varepsilon) = P(|\tilde{E}-E| < \varepsilon) = \beta .$$

Така рівність означає, що з ймовірністю β невідоме значення параметра E потрапляє в інтервал I_β (див. рис. 9.7):

$$I_\beta = (\tilde{E}-\varepsilon\,;\ \tilde{E}+\varepsilon).$$

Означення. *Довірчим інтервалом* називається встановлений інтервал I_β можливих значень оцінюваного параметра E за рівнем довірчої ймовірності β.

Означення. *Довірчою ймовірністю* називається встановлена ймовірність β, з якою значення невідомого параметра E потрапляє в довірчий інтервал $\pm\,\varepsilon$ в околі отриманої оцінки $\tilde{E}$ цього параметра.

Тоді діапазон практично можливих значень *помилки*, що виникає при заміні реального значення параметра E на його оцінку $\tilde{E}$, із ймовірністю β *дорівнюватиме* $\pm\varepsilon$. Ще більші помилки будуть з'являтися тільки з малою ймовірністю α = 1 – β, значення якої (α) називається *рівнем значущості*.

Як значення довірчої ймовірності у статистиці беруть числа, близькі до одиниці: 0,95; 0,99.

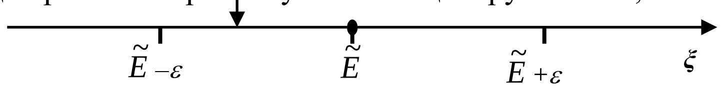


Рис. 9.7. Поняття "довірчий інтервал"

: Знайти довірчі оцінки для величини $\bar{x}$ – оцінки математичного очікування випадкової величини ξ.

- Із формули для оцінки математичного сподівання:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

випливає, що ця характеристика є сумою n *незалежних*, однаково розподілених випадкових величин x_i. При будь-якому кінцевому значенні n сама *величина* $\bar{x}$ також *є випадковою*. Відповідно до центральної граничної теореми теорії ймовірностей (див. п. 9.5), при достатньо великому n закон розподілу суми випадкових величин близький до нормального. На практиці ця умова починає виконуватися, починаючи з $n \geq 10$. Тому можна вважати, що величина $\bar{x}$ має нормальний закон розподілу із математичним сподіванням m, дисперсією $D[\bar{x}] = \sigma_m^2 = \frac{D_x}{n} = \frac{\sigma_x^2}{n}$ і СКВ, що дорівнюють (див. п. 9.6):

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad \text{де} \quad \sigma_x^2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2\right]\cdot\frac{n}{n-1} = \sigma_{x.\,випр}^2.$$

Знайдемо таку величину ε, для якої ймовірність відхилення оцінки $\bar{x}$ від реального значення математичного сподівання m дорівнює довірчій ймовірності β, тобто: $P(|\bar{x} - m| < \varepsilon) = \beta$.

Раніше відзначалося, що ймовірність влучення деякої нормально розподіленої випадкової величини η на інтервал ($\pm\varepsilon$), симетричний щодо її математичного сподівання m, знаходиться як ймовірність відхилення центрованої випадкової величини (η–m) не більш ніж на ($\pm\varepsilon$):

$$P(|\eta - m| \le \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{9.14}$$

У даній ситуації випадковою є величина $\bar{x}$, яка має нормальний розподіл із математичним сподіванням m і середнім квадратичним відхиленням: $\sigma = \sigma_m = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$, тому формула (9.14), після підстановки цих величин, набуде вигляду:

$$P(|\bar{x} - m| < \varepsilon) = \beta = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sigma_x}\right), \;\rightarrow\; 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = \beta.$$

Із цієї рівності знайдемо величину довірчого інтервалу ε:

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = \frac{\beta}{2}; \;\rightarrow\; \frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sigma_x} = \arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right); \;\rightarrow\; \varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\cdot\arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\cdot t_\beta,$$

де $arg\,\Phi\,(x)$ – функція, обернена до функції $\Phi\,(x)$; $\qquad t_\beta = \arg\Phi\left(\dfrac{\beta}{2}\right)$.

Нагадаємо, що поняття оберненої функції передбачає необхідність відшукання такого значення аргументу ($x = arg\,\Phi\,(x)$) функції $\Phi\,(x)$, при якому ця функція дорівнює відомому значенню, наприклад величині $\beta/2$. Як приклад скористаємося таблицею в додатку 9 і для $2\Phi\,(x)$=0,95 знайдемо значення аргументу x. Для цього на першому кроці з попередньо-го рівняння знайдемо значення функції $\Phi\,(x) = 0{,}95\,/\,2$ =0,475. На другому кроці за таблицею в додатку 9 знаходимо, що значенню функції $\Phi(x) = 0{,}475$ відповідає значення аргументу x = 1,960, тобто $\Phi\,(x = 1{,}96) = 0{,}475$.

Відповідно до використаних позначень виявилося наступне:

$$x = t_\beta = \arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right) = \arg\Phi\left(\frac{0{,}95}{2}\right) = \arg\Phi\left(0{,}475\right) = 1{,}960.$$

Дані розглянутого прикладу, а також дані для інших значень β подані у табл. 9.6.

Отже, величина довірчого інтервалу має вигляд:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\cdot t_\beta. \tag{9.15}$$

У підсумку, шукані границі інтервалу набудуть вигляду:

$$\bar{x} - \varepsilon < m < \bar{x} + \varepsilon,$$

де, залежно від значення довірчої ймовірності β, величина t_β табульована і приймає значення, подані в табл. 9.6.

Таблиця 9.6

Параметри взаємозв'язку довірчої ймовірності

β	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99	0,999
$t_\beta = \arg \Phi\left(\dfrac{\beta}{2}\right)$	1,282	1,439	1,643	1,960	2,576	3,290
$(t_\beta)^2$	1,644	2,071	2,699	3,842	6,636	10,824

Із формули (9.15) можна знайти оцінку необхідного числа спроб $\boldsymbol{n}$, яка дозволяє одержати необхідний розмір довірчого інтервалу ε при заданому значенні довірчої ймовірності β:

$$n = \frac{t_\beta^2 \cdot \sigma_x^2}{\varepsilon^2}. \qquad (9.16)$$

Для практичної оцінки інтервалу можливих значень реального середнього значення $\bar{x}$ ознаки $\boldsymbol{\xi}$ за інформацією наявної вибірки необхідно виконати такі дії.

1. Знайти оцінку математичного сподівання $\bar{x}$ значення ознаки ξ:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

2. Знайти незсунену (виправлену) оцінку СКВ:

$$D_{x.\,випр} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2\right] \cdot \frac{n}{n-1}; \qquad \sigma_x = \sqrt{D_{x.\,випр}}\ .$$

3. За значенням довірчої ймовірності β із таблиці 9.6 або з додатку 9 знайти значення величини t_β.

4. Розмір довірчого інтервалу ε розрахувати за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\beta\ .$$

5. Знайти шукані границі інтервалу, що будуть мати вигляд:

$$\bar{x} - \varepsilon < m_x < \bar{x} + \varepsilon.$$

6. При необхідності, потрібну кількість спроб (обсяг вибірки n) можна оцінити за формулою (9.16):

$$n = \frac{t_\beta^2 \cdot \sigma_x^2}{\varepsilon^2}.$$

Розрахунки можливі як в абсолютних, так і у відносних величинах:

$$\delta\varepsilon = \frac{\varepsilon}{m_x} = \frac{\sigma_x}{m_x\sqrt{n}} \cdot t_\beta; \qquad n = \frac{t_\beta^2}{(\delta\varepsilon)^2} \cdot \left(\frac{\sigma_x}{m_x}\right)^2.$$

При виконанні аналогічних оцінок *ймовірності* p події A за результатами n спроб спочатку знаходять статистичні оцінки ймовірності p^* події A як середнього значення випадкової величини $\xi = x_1 = 1$ (подія A з'явилася) і $\xi = x_2 = 0$ (подія A *не* з'явилася). Оцінки характеристик випадкової величини (ξ) в одній спробі дорівнюють:

$$M[x] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p; \qquad D[x] = D_x = p \cdot q = \sigma_x^2.$$

Для серії з n спроб статистична оцінка p^* ймовірності події A може бути виконана за відомими формулами оцінки математичного сподівання і дисперсії випадкової величини (ξ):

$$p^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad q^* = 1 - p^*; \quad D[p^*] = \frac{D_x}{n} = \frac{p^* \cdot q^*}{n}; \quad \sigma_{p^*} = \sqrt{\frac{p^* \cdot q^*}{n}} \; .$$

Тоді далі можна задатися величиною довірчої ймовірності β (і відпо-відно t_β) і *для загального випадку* знайти границі довірчого інтервалу, використовуючи формули (4.40, 4.41):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{p^*}}{\sqrt{n}} \cdot t_\beta \,, \rightarrow \; p^* - \varepsilon < m_x < p^* + \varepsilon \; .$$

Проте якщо розмір добутку np^* і nq^* більший чотирьох, то розподіл випадкової величини p^* виявляється близьким до нормального, що дозволяє визначити довірчий інтервал оцінки ймовірності p^* події A з урахуванням допустимості застосування нормального закону розподілу:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{p^* \cdot q^*}{n}} \cdot t_\beta = \sigma_{p^*} \cdot t_\beta; \qquad (9.17)$$

$$p^* - \sigma_{p^*} \cdot t_\beta < p < p^* + \sigma_{p^*} \cdot t_\beta \, .$$

Значення t_β вибираються із табл. 9.6.

Із формули (9.17) можна знайти оцінку числа спроб n, необхідного для одержання результатів із довірчою ймовірністю β (і відповідно t_β) і з довірчим інтервалом ε:

$$n \cdot \varepsilon^2 = p^* \cdot q^* \cdot (t_\beta)^2 \; \rightarrow \; n = \frac{t_\beta^2 \cdot p^* \cdot (1 - p^*)}{\varepsilon^2}. \qquad (9.18)$$

Частота появи події A (успішного складання іспиту студентом) у серії з $n = 100$ спроб (число студентів на курсі) виявилася рівною $n^* = 0{,}78$. Визначити 90% довірчий інтервал для ймовірності p події A.

● Перевіряємо придатність використання нормального закону, для цього оцінимо величини np і nq. Уважаючи $p \approx n^*$, одержимо:

$$np \approx n \cdot n^* = 78; \quad nq \approx n \cdot (1 - p^*) = 22 \, .$$

Обидві величини значно більше чотирьох, отже, нормальний закон можна застосовувати. Із табл. 9.6 для значення $\beta = 0{,}9$ знаходимо:

$$t_\beta = 1{,}643; \;\; D[p^*] = (0{,}78 \cdot 0{,}22)/(100 - 1) = 0{,}00173;$$

$$\sigma_{p^*} = \sqrt{D[p^*]} = 0{,}041; \;\; \varepsilon = t_\beta \cdot \sigma_{p^*} = 1{,}643 \cdot 0{,}041 = 0{,}068 \, .$$

Із формули (9.18) одержуємо:

$$p_1 = p^* - \sigma_{p^*} \cdot t_\beta = 0{,}712; \qquad p_2 = p^* + \sigma_{p^*} \cdot t_\beta = 0{,}848 \, .$$

Тоді шуканий довірчий інтервал I_β для ймовірності p події A (успішного складання іспиту) за рівнем довірчої ймовірності $\beta = 0{,}9$ виявиться таким, що дорівнює:

$$I_\beta = (0{,}712; \;\; 0{,}848) \, .$$

Чи відповідають дійсності рекламні дані про параметри того або іншого товару? Таке питання може виникнути в ході прийняття рішень щодо управління діяльністю підприємства. Відповідь на це питання можна одержати, розв'язавши задачу порівняння вибіркової середньої із значенням параметра, що анонсується. Розглянемо такий приклад.

Фірма-постачальник комплектуючих виробів у рекламному буклеті стверджує, що середній термін безвідмовної роботи запропонованого виробу знаходиться у границях від 2600 до 3100 годин і в серед-ньому складає – 2900 годин. Перед закупівлею великої партії виробів була зроблена вибірка з 50 виробів і проведені випробування. Середній $\left(\overline{\boldsymbol{T}}_{50}\right)$ термін безвідмовної роботи виявився рівним 2 720 годинам при "виправле-ному" середньому квадратичному відхиленні 361 годин. Необхідно при 5% рівні значущості:

1) перевірити гіпотезу про те, що значення 2900 годин дійсно є математичним сподіванням часу безвідмовної роботи виробів;

2) у випадку незадовільного результату перевірки оцінити:

– яким повинно бути мінімальне значення середнього часу роботи виробів в отриманій вибірці, при якому можна було б уважати рекламні дані дійсними;

– яким варто уважати *реальне* значення максимально можливого часу безвідмовної роботи виробу.

● Наявне число спроб n = 50 достатньо для того, щоб використовувати нормальний закон розподілу випадкового відхилення середнього значення від свого математичного сподівання.

1. Знайдемо розмір довірчого інтервалу середнього часу безвідмовної роботи виробу. Для цього з урахуванням 5% рівня значущості знаходимо спочатку величину $\beta = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$, потім із табл. 4.6 знаходимо величину t_β (0,95) = 1,96. Далі, за наявними початковими даними $n = 50$, σ_x = 361 і t_β (0,95) = 1,96, знаходимо величину довірчого інтервалу для оцінки середнього значення часу справної роботи виробів за формулою:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\beta = \frac{361 \cdot 1{,}96}{\sqrt{50}} = \frac{707{,}56}{7{,}07} = 100 \text{ годин.}$$

У спробі відхилення склало Δ = 2900 – 2720 = 180 годин, що перевершує розмір довірчого інтервалу ($180 > 100$). Отже, *фірма* в рекламі *завищує* термін безвідмовної роботи виробів.

2. Мінімальним значенням часу (T) безвідмовної роботи виробів у вибірці, при якому можна було б вважати рекламні дані дійсними, є час:

$$T = 2900 - \varepsilon = 2900 - 100 = 2800 \text{ годин.}$$

Реальне значення максимально можливого часу (T) безвідмовної роботи виробу за даними вибірки є:

$$T = 2720 + \varepsilon = 2720 + 100 = 2820 \text{ годин.}$$

У практиці страхового бізнесу і в практиці менеджменту іноді виникає необхідність *оцінити ймовірність* порівняно *рідкісних подій*, таких як аварії на виробництві, смерть застрахованої особи у результаті добре відпрацьованої і практично безпечної хірургічної операції, нещасний (або страховий) випадок природного характеру і т. ін. Причому може виявитися, що можливість розглянутого випадку теоретично існує, а реально такий випадок або не мав місця зовсім, або зафіксований один-два рази, що не дає підстав для статистичних оцінок. Як у такій ситуації можна одержати кількісні оцінки, корисні для прийняття розв'язань, розглянемо на прикладі.

Фірмою, що спеціалізується на транспортуванні озброєння, зроблено 100 перевірок саме довільного спрацьовування упакованого детонатора при падінні з вантажівки (подія A). Детонатор не спрацював.

1. Знайти 90% довірчу оцінку ймовірності p саме довільного *неспра-цьовування* упакованого детонатора при падінні з вантажівки.
2. Скільки разів потрібно переконатися у відсутності саме довільного спрацьовування упакованого детонатора при падінні з вантажівки, щоб із гарантією 95% стверджувати, що на практиці самовибух буде не більш ніж у 5% усіх випадків падіння?

● Шукана ймовірність p появи події A при n спробах є малою величиною, що дозволяє припустити її розподіл за законом Пуассона з математичним сподіванням $a = np$.

Довірчу ймовірність *непояви* події A (появи рівно 0 разів) відповідно до першого пункту задачі можна оцінити як $1-\beta$ і одночасно знайти цю ймовірність за формулою Пуассона:

$$P_{k=0} = \mathrm{e}^{-np} = 1-\beta .$$

Звідки для $\beta = 0{,}9$ знаходимо:

$$p = \frac{-\ln(1-\beta)}{n} = \frac{-\ln(0{,}1)}{100} = \frac{2{,}303}{100} = 0{,}023.$$

Для відповіді на друге питання врахуємо, що β = 0,95; p = 0,05. Із тієї ж формули одержуємо необхідне число спроб n:

$$n = \frac{-\ln(1-\beta)}{p} = \frac{-\ln(0{,}05)}{0{,}05} = \frac{2{,}996}{0{,}05} = 59{,}9 \approx 60.$$

9.8. Перевірка статистичних гіпотез. Критерій Пірсона.

Після виконання оцінок статистичних параметрів може виникнути *задача ідентифікації* отриманого в спробі розподілу $F^*(x)$ випадкової величини ξ з *відомими* теоретичними функціями розподілу. Таку задачу називають *задачею вирівнювання*.

Означення. *Задачею вирівнювання статистичних рядів* називається задача добору підхожої теоретичної функції розподілу ймовірностей або щільності ймовірностей при обробці статистичних даних. Задача може бути виконана як за методом найменших квадратів (див. п. 9.10), так і з інших міркувань, наприклад із використанням *методу моментів*.

Метод моментів передбачає виконання вимоги збігу статистичних моментів статистичного ряду випадкової величини ξ, наприклад математичного сподівання і дисперсії, із їх значеннями в теоретичній кривій розподілу ймовірностей $f(x)$. Якщо крива лінія $f(x)$ залежить від двох параметрів, то можна підібрати їх так, щоб співпали перші два моменти і так далі – до чотирьох моментів. *Точність* розрахунків моментів вище четвертого порядку різко спадає, тому їх застосування уважається недоцільним.

Після вирівнювання статистичного розподілу $F^*(x)$ за допомогою теоретичної кривої $F(x)$ можна помітити, що між цими кривими є роз-біжності.

Тому виникає таке питання: чи є отримані розбіжності випадковими, пов’язаними з недостатньою кількістю спроб, або вони вказують на невідповідність підібраної теоретичної кривої лінії $F(x)$ реальному розподілу $F^*(x)$.

Формалізуємо цю ситуацію у вигляді такої гіпотези H_0: випадкова величина ξ має інтегральний закон розподілу $F(x)$.

Для відповіді на питання “Дану гіпотезу H_0 варто прийняти або спростувати?” служать так називані “критерії згоди”.

9.8.1. Критерій Пірсона (критерій χ^2).

Нехай за вибіркою обсягу n побудований дискретний (див. табл. 9.7) або інтервальний (див. табл. 9.8) варіаційний ряд,

Таблиця 9.7

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i^*	n_1^*	n_2^*	…	n_m^*

Таблиця 9.8

$a_{i-1} \div a_i$	$a_1 \div a_2$	$a_2 \div a_3$	…	$a_{m-1} \div a_m$
n_i^*	n_1^*	n_2^*	…	n_m^*

де n_i^* ($i = 1, 2, \ldots, m$) – відносні частоти, причому $\Sigma\, n_i^* = 1$.

Перевіряється гіпотеза H_0, яка підтверджує, що вибіркова сукупність *має* конкретний *закон* $F(x)$ розподілу. Таким законом може бути нормальний закон, закон Пуассона і т. ін.

Процедура застосування критерію Пірсона (критерію χ^2) складається з таких етапів.

1. За варіантним рядом знаходяться “*реальні*” оцінки невідомих параметрів *припущеного* теоретичного закону розподілу $F(x)$.

2. Визначаються *теоретичні* частоти на основі припущеного закону $F(x)$ розподілу в такий спосіб.

Якщо ξ – дискретна випадкова величина, то обчислюються ймовірності *кожного значення* цієї величини $p_i = p(\xi = x_i)$.

Якщо ξ – безперервна випадкова величина, то обчислюються *ймовірності влучення* значень x_i випадкової величини ξ *у* кожний i-й *інтервал*, тобто: $p_i = P(a_{i-1} < x_i < a_i) = F(a_i) - F(a_{i-1})$.

Потім за знайденими ймовірностями p_i і обсягом вибірки n розраховуються значення *теоретичних* частот n^T_i за формулою:

$$n_i^T = n \cdot p_i .$$

Значення ($n \cdot p_i$) може бути дробовим числом, а частота n^T_i повинна виражатися цілим числом, тому за теоретичну частоту n^T_i можна взяти найближче до ($n \cdot p_i$) ціле число, при цьому $\sum n_i^T = n$.

3. За *кількісну міру* ступеня *збігу* теоретичного закону розподілу з законом розподілу у вибірковій сукупності (у якості “критерію” перевірки істинності нульової гіпотези H_0) приймається випадкова величина χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T} .$$

Підставляючи в цю формулу *отримані* з вибірки емпіричні частоти n_i і обчислені *теоретичні* частоти $n^T{}_i$, знаходять значення випадкової величини χ^2, яку можна позначити як $\chi^2{}_{спост}$.

4. Розраховується число ступенів свободи r. Виявляється, що закон розподілу випадкової величини χ^2 визначається *одним* параметром r – *числом ступенів свободи*, яке обчислюється за формулою:

$$r = m - k - 1,$$

де m – кількість *варіантів* або інтервалів заданого варіаційного ряду,

k – кількість *параметрів* припущеного теоретичного розподілу, *які* (*параметри*) *оцінюються* за вибіркою. Число k є кількістю умов, що "обмежують свободу".

Ще однією умовою (обмеженням) *завжди* є умова нормування, тому в правій частині відзначеної формули є величина "–1".

Зокрема, якщо припущений розподіл – *нормальний*, то оцінюють *два* параметри (математичне сподівання a випадкової величини і середнє квадратичне відхилення σ), тому $k = 2$ і число ступенів свободи виявляється рівним $r = m - 3$.

Якщо припускають, що генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона, то оцінюють один параметр λ , тому $k = 1$ і $r = m - 2$.

5. За заданим рівнем значущості α і числом ступенів свободи r, використовуючи таблицю критичних точок розподілу χ^2, знаходять критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha, r)$.

6. Якщо $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}(\alpha, r)$ – то уважається, що розбіжності в спробі виявилися навіть меншими теоретичних і тому підстав відкинути гіпотезу H_0 *немає*.

7. Якщо $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}(\alpha, r)$ – то гіпотезу H_0 відхиляють.

Зауваження. Для застосування критерію Пірсона необхідно, щоб обсяг вибірки n був достатньо великий ($n \ge 50$). Крім того, частоти n_i повинні бути $n_i \ge 5$. Тому частоти $n_i < 5$ варто об'єднати в більш численний інтервал. У цьому випадку і відповідні їм теоретичні частоти $n^T{}_i$ варто об'єднати.

Для упорядкування графіка роботи співробітників досліджу-вана кількість клієнтів, що звернулися у фірму в першій половині робочого дня. Результати дослідження числа клієнтів залежно від часу роботи подані в табл. 9.9.

Таблиця 9.9

Номер інтервалу часу, i	1	2	3	4
Часи роботи (a_i; a_{i+1})	9 – 10	10 – 11	11 – 12	12 – 13
Кількість клієнтів (n_i)	6	20	35	15

При рівні значущості α = 0,05 потрібно перевірити гіпотезу H_0 про те, що кількість клієнтів, які звернулися у відзначені часи роботи, має нормальний розподіл.

● У даному випадку значеннями безперервної випадкової величини ξ є відліки моментів часу (x_i) *приходу клієнтів* в офіс фірми, які (відліки) можуть потрапити в різні часи роботи і сформувати в такий спосіб кількість значень випадкової величини ξ, що потрапили у від-повідний інтервал часу. Ці значення вже згруповані за $m = 4$ інтервалами, що дозволяє вважати середину кожного інтервалу – представницьким значенням усіх значень випадкової величини, що потрапили в цей інтервал. Процес розв'язання оформимо у вигляді таблиці (див. табл. 9.10).

Відзначимо, що застосування критерію Пірсона потребує, щоб частоти були не менше 5, тобто $n > 5$. В іншому випадку необхідно об'єднати інтервали до одержання необхідних частот. У випадку даного прикладу такої необхідності немає.

1. За варіантним рядом (див. табл. 9.9) знаходимо "*реальні*" оцінки невідомих параметрів *припущеного* теоретичного, у даному випадку – нормального закону розподілу $F(x)$. Для цього спочатку знайдемо загальну кількість клієнтів, що відвідали офіс фірми (див. табл. 9.10, рядок 3):

$$n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 76.$$

Далі знайдемо середні (представницькі) значення (x_{icp}) для кожного інтервалу (див. табл. 9.10, рядок 4). Потім домножимо кожне з цих середніх значень (x_{icp}) на кількість випадкових величин (n_i), що потрапили в цей інтервал (див. табл. 9.10, рядок 5), і знайдемо їх суму, яка дозволяє розрахувати оцінку математичного сподівання моментів часу появи клієнтів в офісі фірми:

$$\bar{x} = \tilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_{icp} \cdot n_i = \frac{857}{76} = 11{,}276.$$

Для оцінки середнього *квадратичного* відхилення (S_x) моментів часу появи клієнтів спочатку (див. табл. 9.10, рядок 6) домножимо *квадрат* кожного із середніх значень інтервалів на кількість випадкових величин, які потрапили в цей інтервал ($x^2_{icp} \cdot n_i$), і знайдемо їх суму, що дозволяє розрахувати оцінку другого початкового моменту випадкового часу появи клієнтів в офісі фірми:

$$\tilde{M}[x^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_{icp}^2 \cdot n_i = \frac{9719}{76} = 127{,}882.$$

Потім знайдемо оцінки дисперсії зсунутої і виправленої:

$$\tilde{D}_в = \tilde{M}[x^2] - \tilde{m}_x^2 = 127{,}882 - 127{,}148 = 0{,}726;$$

$$\tilde{D}_{в.\,випр} = \frac{n}{n-1} \cdot \tilde{D}_{в.} = \frac{4}{3} \cdot 0{,}726 = 0{,}968,$$

що дозволяє одержати оцінку виправленого (незсуненого) середнього квадратичного відхилення:

$$S_x = \sigma_{x.\,випр} = \sqrt{\tilde{D}_{в.\,випр}} = \sqrt{0{,}968} = 0{,}984.$$

2. Визначаємо *теоретичні* частоти на основі припущеного закону $F(x)$ розподілу в такий спосіб.

В даному випадку ξ – моменти часу приходу клієнтів в офіс фірми – безперервна випадкова величина, тому обчисляємо *ймовірності влучення* значень x_i випадкової величини ξ *у* кожний *i*-й *інтервал*, тобто $p_i = P(a_i < x_i < a_{i+1}) = F(a_{i+1}) - F(a_i)$, для чого скористаємося функцією Лапласа і відомим виразом оцінки ймовірності влучення випадкової величини на інтервал (a; b):

$$P(a < x < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

одержимо формулу:

$$n \cdot \varepsilon^2 = p^* \cdot q^* \cdot (t_\beta)^2 \;\rightarrow\; n = \frac{t_\beta^2 \cdot p^* \cdot (1 - p^*)}{\varepsilon^2}. \qquad (9.19)$$

У (9.19) аргументами є нормовані границі інтервалів. Тому далі знайдемо значення нормованих границь цих інтервалів (див. табл. 9.10, рядки 7, 8) і, скориставшись таблицею $\Phi(x)$ – значень функції Лапласа (додаток 9), запишемо відповідні значення (див. табл. 9.10, рядки 9 і 10). Відзначимо, що для невід'ємного значення аргументу варто використовувати властивість непарності функції: $\Phi(–x) = –\Phi(x)$. У наступному рядку знайдемо різницю значень функції Лапласа для кожного інтервалу, що і є теоретичною оцінкою ймовірності (p_i) влучення значень випадкової величини в кожний інтервал (див. табл. 9.10, рядок 11).

Таблиця 9.10

Схема оцінки правдоподібності гіпотези про нормальний розподіл безперервної випадкової величини

№ п/п	Параметри, що розраховуються	i				Σ	M[*]
		1	2	3	4		
1	a_i	9	10	11	12		
2	a_{i+1}	10	11	12	13		
3	n_i	6	20	35	15	76	
4	$x_{i\text{ср}}$	9,5	10,5	11,5	12,5		
5	$x_{i\text{ср}} \cdot n_i$	57	210	402,5	187,5	857	11,276
6	$x^2_{i\text{ср}} \cdot n_i$	541,5	2205	4629	2344	9719	127,882
7	$x^{н}_{min.i} = (a_i - \bar{x})/S_x$	–2,313	–1,297	–0,281	0,735	$\tilde{D}_в$ =	0,726
8	$x^{н}_{max.i} = (a_{i+1} - \bar{x})/S_x$	–1,297	–0,281	0,735	1,752	$\tilde{D}_{в.випр}$	0,968
9	$\Phi(x^{н}_{min.i})$	–0,490	–0,403	–0,111	0,269	S_x =	0,984
10	$\Phi(x^{н}_{max.i})$	–0,403	–0,111	0,269	0,460		
11	p_i	0,087	0,292	0,380	0,191	0,950	
12	$n_i^{\text{Т}}$	6,609	22,201	28,843	14,526		
13	$n_i - n_i^{\text{Т}}$	–0,609	–2,201	6,157	0,474		
14	$(n_i - n_i^{\text{Т}})^2 / n_i^{\text{Т}}$	0,056	0,218	1,314	0,016	1,604 =	$\chi^2_{спост}$

Потім за знайденими ймовірностями p_i і обсягом вибірки $n = 71$ розрахуємо (див. табл. 9.10, рядок 12) значення *теоретичних* частот n_i^T за формулою: $n_i^T = n \cdot p_i$.

3. За заданими в умові емпіричними частотами n_i (див. табл. 9.10, рядок 3) і отриманими теоретичними частотами n_i^T (див. табл. 9.10, рядок 12) обчисляємо величину $\chi^2_{спост}$. Для цього попередньо для кожного інтервалу знайдемо (див. табл. 9.10, рядок 13) різницю між емпіричною і теоретичною частотою влучення випадкової величини в цей інтервал: $(n_i - n_i^T)$. Потім знайдемо *окремі доданки* (див. табл. 9.10, рядок 14) для визначення значення показника "Хі-квадрат":

$$\chi_i^2 = \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T}$$

і потім розрахуємо суму цих значень, що і є шуканою величиною для оцінки правдоподібності початкової гіпотези:

$$\chi^2_{спост} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T} = 1,604\,.$$

У вибірці з m=4 інтервалів оцінювалися *два* (k = 2) параметри – $\bar{x} = \tilde{m}$ і S_x, тому кількість ступенів свободи r дорівнюватиме:

$$r = m - k - 1 = 4 - 2 - 1 = 1.$$

За таблицею знаходимо критичне значення:

$$\chi^2_{кр}(\alpha, r) = \chi^2_{кр}(0{,}05; 1) = 3{,}84\,; \qquad \chi^2_{спост} = 1{,}604\,.$$

Значення $\chi^2_{спост} = 1{,}604$, тобто $\chi^2_{спост} < \chi^2_{кр}(\alpha, r)$, тому *гіпотеза* H_0 про те, що кількість клієнтів (випадкова величина ξ) має нормальний розподіл – *приймається*.

Приклад: При $n = 757$ випробувань блоків радіоелектронної апаратури отримані і наведені в табл. 9.11 дані про кількість відмов на один блок.

Таблиця 9.11

Кількість відмов (x_i)	0	1	2	3	4	5	≥6
Кількість випадків (n_i)	427	235	72	21	1	1	0

За рівнем значущості α = 0,05 потрібно перевірити гіпотезу H_0 про те, що кількість відмов має розподіл Пуассона:

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k\,!} \cdot e^{-\lambda}\,.$$

● 1. Знайдемо оцінку параметра λ розподілу Пуассона, яка дорівнює середньому числу відмов. Процес розв’зання оформимо у вигляді розрахункових таблиць 9.12–9.14.

Із табл. 9.12 знаходимо середнє число відмов: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{7} n_i} = \dfrac{451}{757} = 0{,}6\,.$

Отже, теоретичний закон розподілу числа відмов блоків апаратури має вигляд:

$$p_i = p(\xi = x_i) = \frac{(0{,}6)^{x_i}}{x_i\,!} e^{-0{,}6}, \qquad x_i = 0,\ 1, \dots,\ 5\,.$$

Таблиця 9.12 *Таблиця* 9.13 *Таблиця* 9.14

i	x_i	n_i	$x_i\, n_i$	p_i	np_i	$n^T{}_i$	n_i	$n^T{}_i$	$(n_i - n^T{}_i)^2$	$(n_i - n^T{}_i)^2/n^T{}_i$
1	0	427	0	0,5488	415,4504	416	427	416	121	0,291
2	1	235	235	0,3293	249,2702	249	235	249	196	0,787
3	2	72	144	0,0988	74,78107	75	72	75	9	0,120
4	3	21	63	0,0198	14,95621	15	23	17	36	2,118
5	4	1	4	0,0030	2,243432	2				
6	5	1	5	0,0004	0,269212	0				
7	6	0	0							
Σ		757	451			757			$\chi^2_{спост}$ =	3,316

2. На основі отриманого теоретичного закону розподілу знаходимо теоретичні частоти $n^{\mathrm{T}}{}_i$, для чого складемо розрахункову табл. 9.13. Ймовірність p_i знаходимо або за таблицею, або обчисляємо за формулою Пуассона для всіх значень x_i.

3. За заданими в умові емпіричними частотами $\boldsymbol{n}_i$ і отриманими теоретичними частотами $\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}{}_i$ обчисляємо величину $\chi^2{}_{спост}$:

$$\chi^2_{спост.} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i^T)^2}{n_i^T}.$$

Для цього складемо розрахункову таблицю (див. табл. 9.14), об’єднавши останні три рядки з рядком для $x_i = 3$, тому що застосування критерію Пірсона потребує, щоб частоти не були малими.

У вибірці оцінювався *один* параметр λ, тому число ступенів свободи r дорівнюватиме:

$$r = m - k - 1 = 4 - 1 - 1 = 2.$$

За таблицею знаходимо критичне значення:

$$\chi^2{}_{\text{кр}}(\alpha, r) = \chi^2{}_{\text{кр}}(0{,}05;\, 2) = 5{,}99.$$

Отримане в спробі $\chi^2{}_{спост.} = 3{,}316$, і це значення виявляється меншим критичного, тобто $\chi^2{}_{спост.} < \chi^2{}_{\text{кр}}(\alpha, r)$, тому *гіпотеза* H_0 про розподіл кількості відмов блоків апаратури за законом Пуассона *приймається*.

9.9. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії.

Математична формалізація реальних процесів у вигляді функціональ-ної залежності однієї змінної (функції y) від іншої змінної (аргументу x) $y = f(x)$ дозволяє кожному значенню аргументу однозначно поставити у відповідність одне заздалегідь відоме значення функції. Така залежність, як правило, є оборотною, тобто за відомим значенням функції завжди можна знайти відповідне значення її аргументу: $x = f^{-1}(y)$.

Проте на практиці реальні процеси демонструють іншу відповідність змінних. Так за один і той же робочий час тим самим підприємством може бути зроблена різна кількість продукції, та сама продукція може мати різну собівартість, та сама кількість продукції може бути продана за різну ціну, люди того самого зросту можуть мати різну вагу.

У підсумку, *тому* самому *значенню* аргументу x можуть відповідати *різні* значення функції y. Часто значення функції носять характер випадкових величин, які при зміні значень аргументу можуть мати різні центри групування, дисперсію і закон розподілу. У цьому випадку зворотне перетворення з метою відшукання значення аргументу x за відомим значенням функції y не є однозначним.

Для встановлення залежності між такими неоднозначними змінними використовують теорію кореляційно-регресійного аналізу, у якій дослід-жуються зміни середніх значень функції при зміні одного або багатьох аргументів. Проте формальні методи кореляційного аналізу не дають відпо-віді на питання “що є причиною, а що є наслідком або яка змінна є аргументом, а яка – функцією?”. Відповідь на це питання має дати дослідник.

Метою побудови регресійних моделей може бути встановлення залежності між *середніми* значеннями двох змінних (параметрів), одну з яких дослідник *призначає* функцією, а другу – її аргументом.

У основі регресійного аналізу лежать дві гіпотези.

1. Передбачається, що досліджувана сукупність параметрів *має* внутрішній статистичний зв'язок, який може бути виявлений і формалізований у вигляді кореляційної (отже лінійної) залежності одного параметра від іншого або від інших. Тобто вважається, що існує внутрішній лінійний зв'язок *середніх* значень цих параметрів.

2. Передбачається, що випадковий розкид (дисперсія) значень (кожного) параметру має регулярну компоненту, яка залежить від деякого аргументу ("сигналу"), і випадкову компоненту ("шум"). Випадкова компонента ("шум") розподілена за нормальним законом.

Початковою інформацією для побудови лінійної однофакторної регресійної моделі є сукупність із n двовимірних точок (x_i, y_i), де кожна координата точки, як правило, має свій фізичний сенс, наприклад x_i – зріст людини в сантиметрах, y_i – її вага в кілограмах.

Під час формалізації постановки задачі розглянемо двовимірну випадкову величину (X, Y), над якою проведено n незалежних випробувань і в результаті випробувань отримана вибірка – n пар чисел (координат точки):

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

де x_i – значення випадкової величини X у i-му випробуванні;

y_i – значення випадкової величини Y у i-му випробуванні.

Необхідно знайти *наближене* зображення значень однієї з випадкових величин як функції значень другої випадкової величини.

Означення. *Вибірковим рівнянням регресії Y на X* $(y \to x)$ називається рівняння, яке встановлює залежність змінної y від змінної x, тобто коли змінна y вважається *функцією*, а змінна x – *аргументом*: $y = f(x)$, при цьому початковою інформацією є вибірка з n пар чисел.

Означення. *Вибірковим* рівнянням регресії *X на Y* $(x \to y)$ називається рівняння $x = \varphi(y)$, у якому при тій же початковій інформації вже змінна x уважається *функцією*, а змінна $\boldsymbol{y}$ – її *аргументом*.

Означення. *Лінійною* називається регресія у випадку, коли залежності $f(x)$ і $\varphi(y)$ є *лінійними функціями*. Тоді рівняння регресії мають вигляд:

$$y = a \cdot x + b; \qquad x = c \cdot y + d.$$

Порядок розрахунку параметрів рівняння регресії розглянемо без виведення і для двох варіантів умов: при відсутності і при наявності збіжних точок у вибірці.

1. Нехай серед точок (x_i, y_i) вибірки збіжних точок немає. Для того щоб скласти вибіркове рівняння прямої лінії регресії, виконуються наступні розрахунки:

а) обчислюються середні значення величин: $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x \cdot y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ і знаходяться середні квадратичні відхилення $S_x = \sigma_x$, $S_y = \sigma_y$ із використанням формул, перерахованих з обліком доцільної послідовності їх застосування:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2;$$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i; \quad S_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2; \quad S_x = \sqrt{S_x^2}; \quad S_y^2 = \overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2; \quad S_y = \sqrt{S_y^2};$$

б) обчислюється значення вибіркового коефіцієнту кореляції r:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y}.$$

Нагадаємо, що вибірковий коефіцієнт кореляції характеризує рівень лінійного кореляційного зв'язку двох випадкових величин. Чим ближче $|r|$ до одиниці, тим більш сильним є зв'язок двох величин, чим ближче $|r|$ до нуля, тим зв'язок слабше;

в) для одержання рівняння регресії Y на X: $y = a \cdot x + b$ обчисляємо коефіцієнти a і b даного рівняння за формулами:

$$a = r\frac{S_y}{S_x}; \quad b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}.$$

Для одержання рівняння регресії X на Y: $x = c \cdot y + d$ обчисляємо коефіцієнти c і d даного рівняння за формулами:

$$c = r\frac{S_x}{S_y}; \quad d = \overline{x} - c \cdot \overline{y}.$$

Обидві прямі лінії $y = a \cdot x + b$ і $x = c \cdot y + d$ проходять через точку $(\overline{x}, \overline{y})$. Для зображення обох прямих ліній на одному графіку друге рівняння варто подати у вигляді: $y = x/c - d/c$.

2. При великій кількості точок $\boldsymbol{n}$ у вибірці значення x_i може зустрітися $\boldsymbol{m}_i$ разів, значення y_j може зустрітися n_j разів. Та сама пара чисел (x_i, y_j) може зустрітися n_{ij} разів. У цьому випадку вибірку зручно подати у вигляді кореляційної таблиці (див. табл. 9.15) так, що кількість повторень m_i значень координат x_i, кількість повторень $\boldsymbol{n}_j$ значень координат y_j і обсяг вибірки $\boldsymbol{n}$ дорівнюватимуть:

$$m_i = \sum_{j=1}^{\ell} n_{ij}, \quad n_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}; \quad n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} n_{ij} = \sum_{j=1}^{\ell} n_j = \sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Таблиця 9.15

Кореляційна таблиця

x_i	Y_j				
	y_1	y_2	…	y_ℓ	m_i
x_1	n_{11}	n_{12}	…	$n_{1\ell}$	m_1
x_2	n_{21}	n_{22}	…	$n_{2\ell}$	m_2
…	…	…	…	…	…
x_k	n_{k1}	n_{k2}	…	$n_{k\ell}$	m_k
n_j	n_1	n_2	…	n_ℓ	n

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії знаходимо аналогічно першому випадку, розрахунки величин $\overline{x}, \overline{y}, \overline{x \cdot y}, \overline{x^2}, \overline{y^2}$ виконуємо з урахуванням наявності повто-рюваних значень змінних за форму-лами:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i; \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell} y_i \cdot n_j;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot m_i; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\ell} y_i^2 \cdot n_j; \quad \overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} x_i \cdot y_i \cdot n_{ij}.$$

Якщо розглядається вибірка з генеральної сукупності безперервних випадкових величин X і Y, то кореляційна таблиця буде містити інтервали $[a_{i-1}, a_i)$ і $[b_{j-1}, b_j)$.

У цьому випадку для обчислення величин $\overline{x}, \overline{y}, \overline{x \cdot y}, \overline{x^2}, \overline{y^2}$ спочатку потрібно перейти до дискретних рядів, а потім виконати обчислення за розглянутими вище формулами.

Зауваження. Якщо значення координат точок (x_i, y_j) є дуже великими або дуже маленькими числами, то при обчисленні значень величин $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x \cdot y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ можна спочатку перейти до розглянутих раніше (див. п. 9.4) *умовних варіантів* u_i і v_j:

$$u_i = \frac{x_i - \alpha}{p}, \quad v_j = \frac{y_j - \beta}{q}$$

і знайти їх середні значення $\overline{u}$, $\overline{v}$ і S_u, S_v, а потім знайти *середні* значення початкових координат $\overline{x}$, $\overline{y}$ та їх середніх квадратичних відхилень S_x, S_y:

$$\overline{x} = p \cdot \overline{u} + \alpha, \quad \overline{y} = q \cdot \overline{v} + \beta; \quad S_x = p \cdot S_u, \quad S_y = q \cdot S_v.$$

Перехід до умовних варіантів не змінює величину вибіркового коефіцієнту кореляції, тому $r_{xy} = r_{uv} = r$.

Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y за даними таблиці спостережень (див. табл. 9.16)

Таблиця 9.16

Таблиця спостережень

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

• Складемо розрахункову таблицю (див. табл. 9.17).

Таблиця 9.17

Розрахункова таблиця

i	x_i	y_j	x_i^2	y_j^2	$x_i\ y_j$
1	1,00	1,25	1,00	1,56	1,25
2	1,50	1,40	2,25	1,96	2,10
3	3,00	1,50	9,00	2,25	4,50
4	4,50	1,75	20,25	3,06	7,88
5	5,00	2,25	25,00	5,06	11,25
$\sum$	15,00	8,15	57,50	13,90	26,98
$\sum/n$	3	1,63	11,5	2,779	5,395

За допомогою таблиці знаходимо оцінки середніх значень:

$$\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{15}{5} = 3; \quad \overline{y} = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} y_j = \frac{8{,}15}{5} = 1{,}63; \quad \overline{xy} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot y_i = \frac{26{,}975}{5} = 5{,}395;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \frac{57{,}5}{5} = 11{,}5; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = \frac{13{,}897}{5} = 2{,}779.$$

Потім визначаємо значення середніх квадратичних відхилень:

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \sqrt{11{,}5 - 9} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58;$$

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2} = \sqrt{2{,}779 - 2{,}657} = \sqrt{0{,}122} = 0{,}35.$$

Знайдемо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{5{,}395 - 3 \cdot 1{,}63}{1{,}58 \cdot 0{,}35} = \frac{0{,}505}{0{,}553} = 0{,}913.$$

Для вибіркового рівняння прямої лінії регресії Y на X, що має вигляд $y = a \cdot x + b$, обчислимо значення коефіцієнтів a і b за відомими формулами, одержимо:

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = 0{,}913 \cdot \frac{0{,}35}{1{,}58} = 0{,}202;$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} = 1{,}63 - 0{,}202 \cdot 3 = 1{,}63 - 0{,}606 = 1{,}024.$$

Остаточно вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X набуде вигляду:

$$y = 0{,}202 \cdot x + 1{,}024.$$

Для одержання рівняння регресії X на Y: $x = c \cdot y + d$ обчисляємо коефіцієнти c і d за формулами:

$$c = r\frac{S_x}{S_y} = 0{,}913 \cdot \frac{1{,}58}{0{,}35} = 4{,}122; \quad d = \overline{x} - c \cdot \overline{y} = 3 - 4{,}122 \cdot 1{,}63 = -3{,}719.$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y набуде вигляду:

$$x = 4{,}122 \cdot y - 3{,}719.$$

Для побудови даного рівняння в тій же системі координат, що і рівняння регресії Y на X, скористаємося варіантом перерахунку $y = x/c - d/c$ і виразимо змінну y через змінну x, одержимо:

$$y = 0{,}242 \cdot x + 0{,}902.$$

9.10. Метод найменших квадратів.

У ряді практичних задач обробки результатів вимірів, у тому числі значень випадкових величин, виникає необхідність згладженого подання значень однієї величини (наприклад, величини y), як функції іншої величини (наприклад, величини x). Одним із найбільш поширених способів такого наближеного зображення є метод найменших квадратів.

За допомогою методу найменших квадратів розв'язується задача добору такої аналітичної залежності $y(x) = \Psi_m(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)$, графік якої *не обов'язково* проходив би через *усі* задані точки, але максимально "згладжував" би випадкові похибки вимірюваних ординат функції $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, тобто щоб сума квадратів відхилень значень аналітичної залежності $\Psi_m(x, a_0, a_1, \ldots, a_m)$ від значень вимірюваних ординат $y_i = f(x_i)$ у цих точках була мінімальною:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \Psi_m(x_i)]^2 \Rightarrow \min. \Psi_m(x_i). \qquad (9.20)$$

Апроксимація за методом найменших квадратів виконується у два етапи:

– *на першому* етапі вибирають *вигляд* $\Psi_m(x, a_0, \ldots, a_m)$ шуканої формули;

– *на другому* етапі для формули обраного вигляду "підбирають" *значення параметрів* $a_0, a_1, \ldots, a_m$, виходячи з вимоги (9.20).

Процес добору полягає в одержанні системи з $(m+1)$-го рівняння для визначення значень усіх $(m+1)$ параметрів $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Виходячи з вимоги мінімізації відхилення значень $\Psi_m(x_i)$ від значень $y_i = f(x_i)$, система рівнянь формується шляхом відшукання похідних за кожним параметром (a_k) від рівняння (9.20) і прирівнювання їх до нуля:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \Psi_m(x_i, a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_m)] \cdot \left(\frac{d\,\Psi_m}{da_k}\right)_{x_i} = 0;\; k = 0, 1, \ldots, m.$$

Розділивши ліву і праву частини на множник (–2), який "заважає", одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \Psi_m(x_i, a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_m)] \cdot \left(\frac{d\,\Psi_m}{da_k}\right)_{x_i} = 0; \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{9.21}$$

де $\left(\frac{d\,\Psi_m}{da_k}\right)_{x_i} = \Psi'_{a_k}(x_i, a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_m)$ – значення часткової похідної від функції Ψ_m за параметром a_k у точці x_i.

Для розв'язання системи рівнянь (9.21) потрібно задатися конкретним видом апроксимуючої функції Ψ_m.

9.10.1. Лінійна апроксимація.

У цьому випадку $\Psi'_{a_0} = 1;\; \Psi'_{a_1} = x$. Тоді рівняння (9.21) набуде вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_0 + a_1\, x_i)] = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n}[y_i - (a_0 + a_1\, x_i)]\, x_i = 0.$$

У цьому рівнянні розкриємо дужки і зробимо підсумовування, що доз-воляє одержати:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n \cdot a_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

Розділивши ліву і праву частини кожного рівняння на кількість точок n, одержимо:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - a_0 - a_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0; \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

Доданки в цих виразах дорівнюють:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = m_y = \overline{y};\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = m_x = \overline{x}; \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha_{11} = \overline{xy};\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \alpha_{2x} = \overline{x^2}$$

і мають сенс оцінок математичних сподівань (m_x, m_y), змішаного початкового другого моменту (α_{11}) і початкового другого моменту (α_{2x}), тому система рівнянь для пошуку значень коефіцієнтів a_0 і a_1 може бути записана більш компактно:

$$\left.\begin{aligned} m_y - a_0 - a_1 \cdot m_x &= 0, \\ \alpha_{11} - a_0 \cdot m_x - a_1 \cdot \alpha_{2x} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} \overline{y} - a_0 - a_1 \cdot \overline{x} &= 0, \\ \overline{xy} - a_0 \cdot \overline{x} - a_1 \cdot \overline{x^2} &= 0. \end{aligned}\right\}.$$

Звідки випливає, що в апроксимуючому поліномі $\Psi_1 = a_0 + a_1 x$ коефіцієнти a_0 і a_1 можна визначити за формулами:

$$a_1 = \frac{\alpha_{11} - m_x \cdot m_y}{\alpha_{2x} - m_x^2} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}; \qquad a_0 = m_y - a_1 \cdot m_x = \overline{y} - a_1 \cdot \overline{x}.$$

Аналогічно знаходяться параметри і для апроксимуючих функцій будь-якого іншого вигляду. Проте загального правила для вибору відповідного вигляду емпіричної формули не існує. Водночас, для найбільш поширених семи видів функцій існує процедура формальної оцінки їх придатності.

Для умов, розглянутих у попередньому прикладі (див. табл. 9.16), знайти лінійну апроксимацію залежності змінної y від змінної x за даними тієї ж таблиці спостережень, що повторюємо (див. табл. 9.18).

Таблиця 9.18

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

● Отримана раніше розрахункова таблиця має вигляд (див. табл. 9.19):

Таблиця 9.19

i	x_i	y_j	x_i^2	y_j^2	$x_i\, y_j$
1	1,00	1,25	1,00	1,56	1,25
2	1,50	1,40	2,25	1,96	2,10
3	3,00	1,50	9,00	2,25	4,50
4	4,50	1,75	20,25	3,06	7,88
5	5,00	2,25	25,00	5,06	11,25
Σ	15,00	8,15	57,50	13,90	26,98
Σ/n	3	1,63	11,5	2,779	5,395

Необхідні оцінки з таблиці були знайдені і мають такі значення:

$$\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{15}{5} = 3; \quad \overline{y} = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} y_j = \frac{8{,}15}{5} = 1{,}63; \quad \overline{xy} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = \frac{26{,}975}{5} = 5{,}395;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \frac{57{,}5}{5} = 11{,}5; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = \frac{13{,}897}{5} = 2{,}779.$$

Отже, для лінійної апроксимації $y = a_0 + a_1 x$ знаходимо:

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \frac{5{,}395 - 3 \cdot 1{,}63}{11,5 - (3)^2} = \frac{5{,}395 - 4{,}89}{11,5 - 9} = \frac{5{,}395 - 4{,}89}{11,5 - 9} = \frac{0{,}505}{2,5} = 0,202;$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1 \cdot \overline{x} = 1{,}63 - 0{,}202 \cdot 3 = 1{,}63 - 0{,}606 = 1{,}024.$$

Результуючий вираз має вигляд: $y = 1{,}024 + 0{,}202 \cdot x$ і цілком збігається з отриманим раніше рівнянням регресії Y на X: $y = 0{,}202 \cdot x + 1{,}024$.

Графічне зображення цих ліній наведене на рис. 9.8.

Відзначимо, що лінія регресії $y \to x$ у даному випадку має менший кут нахилу, ніж лінія регресії $x \to y$.

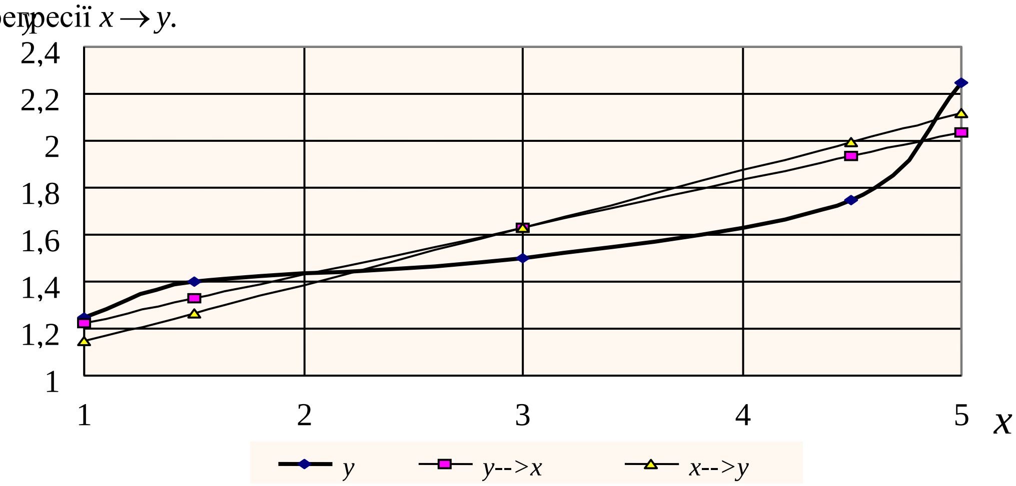


Рис. 9.8. Лінії регресії.

Питання для самоперевірки.

1. Що таке вибіркова і генеральна сукупності, як вони співвідносяться між собою?
2. Що таке “варіант”, його частота і відносна частота?
3. Поясніть поняття: варіаційний (статистичний) ряд, розмах варіації, полігон частот, гістограма, інтервальний варіаційний ряд.
4. Що таке емпірична функція розподілу і якими властивостями вона володіє?
5. Що називається числовими характеристиками вибірки?
6. Як визначаються вибіркове середнє, а також вибіркова дисперсія, вибіркові початкові і центральні моменти?
7. Які варіанти називаються умовними та у яких випадках вони застосовуються?
8. Поясніть основні елементи закону великих чисел – нерівність Чебишева і закон трьох сигм, а також закон розподілу суми випадкових величин.
9. Поясніть зміст поняття “*збігається за ймовірністю*” на прикладі ствердження теореми Чебишева, відповідно до якої при необмеженому збільшенні числа випробувань середнє арифметичне випадкової величини *збігається за ймовірністю* до її математичного сподівання.
10. Поясніть сенс вимог до статистичних оцінок параметрів: незсуненості, ефективності, обгрунтованості.
11. Що таке виправлена оцінка дисперсії випадкової величини?
12. Навіщо і як можна використовувати теорему Лапласа?
13. Поясніть значення понять: довірчий інтервал, довірча ймовірність, рівень значущості.
14. Як можна розрахувати значення довірчого інтервалу і довірчої ймовірності?
15. Як можна оцінити необхідний обсяг вибірки?
16. Що означає перевірка статистичних гіпотез?
17. У чому полягає критерій Пірсона і як він використовується при перевірці гіпотез?
18. Що називають вибірковим рівнянням прямої лінії регресії і як можна розрахувати коефіцієнти цього рівняння?
19. Для яких цілей використовується метод найменших квадратів? Поясніть порядок його застосування на прикладі лінійної апроксимації множини двовимірних точок.

Таблиця значення функції $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^4 e^{-z^2/2} dz$

X	**Φ(x)**	**X**	**Φ(x)**	**X**	**Φ(x)**	**X**	**Φ(x)**
0,00	0,0000	**0,24**	0,0948	**0,48**	0,1844	**0,72**	0,2642
0,01	0,0040	**0,25**	0,0987	**0,49**	0,1879	**0,73**	0,2673
0,02	0,0080	**0,26**	0,1026	**0,50**	0,1915	**0,74**	0,2703
0,03	0,0120	**0,27**	0,1064	**0,51**	0,1950	**0,75**	0,2734
0,04	0,0160	**0,28**	0,1103	**0,52**	0,1985	**0,76**	0,2764
0,05	0,0199	**0,29**	0,1141	**0,53**	0,2019	**0,77**	0,2794
0,06	0,0239	**0,30**	0,1179	**0,54**	0,2054	**0,78**	0,2823
0,07	0,0279	**0,31**	0,1217	**0,55**	0,2088	**0,79**	0,2852
0,08	0,0319	**0,32**	0,1255	**0,56**	0,2123	**0,80**	0,2881
0,09	0,0359	**0,33**	0,1293	**0,57**	0,2157	**0,81**	0,2910
0,10	0,0398	**0,34**	0,1331	**0,58**	0,2190	**0,82**	0,2939
0,11	0,0438	**0,35**	0,1368	**0,59**	0,2224	**0,83**	0,2967
0,12	0,0478	**0,36**	0,1406	**0,60**	0,2257	**0,84**	0,2995
0,13	0,0517	**0,37**	0,1443	**0,61**	0,2291	**0,85**	0,3023
0,14	0,0557	**0,38**	0,1480	**0,62**	0,2324	**0,86**	0,3051
0,15	0,0596	**0,39**	0,1517	**0,63**	0,2357	**0,87**	0,3078
0,16	0,0636	**0,40**	0,1554	**0,64**	0,2389	**0,88**	0,3106
0,17	0,0675	**0,41**	0,1591	**0,65**	0,2422	**0,89**	0,3133
0,18	0,0714	**0,42**	0,1628	**0,66**	0,2454	**0,90**	0,3159
0,19	0,0753	**0,43**	0,1664	**0,67**	0,2486	**0,91**	0,3186
0,20	0,0793	**0,44**	0,1700	**0,68**	0,2517	**0,92**	0,3212
0,21	0,0832	**0,45**	0,1736	**0,69**	0,2549	**0,93**	0,3238
0,22	0,0871	**0,46**	0,1772	**0,70**	0,2580	**0,94**	0,3264
0,23	0,0910	**0,47**	0,1808	**0,71**	0,2611	**0,95**	0,3289
0,96	0,3315	**1,37**	0,4147	**1,78**	0,4625	**2,36**	0,4909
0,97	0,3340	**1,38**	0,4162	**1,79**	0,4633	**2,28**	0,4913
0,98	0,3365	**1,39**	0,4177	**1,80**	0,4641	**2,40**	0,4918
0,99	0,3389	**1,40**	0,4192	**1,81**	0,4649	**2,42**	0,4922
1,00	0,3413	**1,41**	0,4207	**1,82**	0,4656	**2,44**	0,4927
1,01	0,3438	**1,42**	0,4222	**1,83**	0,4664	**2,46**	0,4931
1,02	0,3461	**1,43**	0,4236	**1,84**	0,4671	**2,48**	0,4934
1,03	0,3485	**1,44**	0,4251	**1,85**	0,4678	**2,50**	0,4938
1,04	0,3508	**1,45**	0,4265	**1,86**	0,4686	**2,52**	0,4941
1,05	0,3531	**1,46**	0,4279	**1,87**	0,4693	**2,54**	0,4945
1,06	0,3554	**1,47**	0,4292	**1,88**	0,4699	**2,56**	0,4948
1,07	0,3577	**1,48**	0,4306	**1,89**	0,4706	**2,58**	0,4951
1,08	0,3599	**1,49**	0,4319	**1,90**	0,4713	**2,60**	0,4953
1,09	0,3621	**1,50**	0,4332	**1,91**	0,4719	**2,62**	0,4956

1,10	0,3643	**1,51**	0,4345	**1,92**	0,4726	**2,64**	0,4959
1,11	0,3665	**1,52**	0,4357	**1,93**	0,4732	**2,66**	0,4961
1,12	0,3686	**1,53**	0,4370	**1,94**	0,4738	**2,68**	0,4963
1,13	0,3708	**1,54**	0,4382	**1,95**	0,4744	**2,70**	0,4965
1,14	0,3729	**1,55**	0,4394	**1,96**	0,4750	**2,72**	0,4967
1,15	0,3749	**1,56**	0,4406	**1,97**	0,4756	**2,74**	0,4969
1,16	0,3770	**1,57**	0,4418	**1,98**	0,4761	**2,76**	0,4971
1,17	0,3790	**1,58**	0,4429	**1,99**	0,4767	**2,78**	0,4973
1,18	0,3810	**1,59**	0,4441	**2,00**	0,4772	**2,80**	0,4974
1,19	0,3830	**1,60**	0,4452	**2,02**	0,4783	**2,82**	0,4976
1,20	0,3849	**1,61**	0,4463	**2,04**	0,4793	**2,84**	0,4977
1,21	0,3869	**1,62**	0,4474	**2,06**	0,4803	**2,86**	0,4979
1,22	0,3883	**1,63**	0,4484	**2,08**	0,4812	**2,88**	0,4980
1,23	0,3907	**1,64**	0,4495	**2,10**	0,4821	**2,90**	0,4981
1,24	0,3925	**1,65**	0,4505	**2,12**	0,4830	**2,92**	0,4982
1,25	0,3944	**1,66**	0,4515	**2,14**	0,4838	**2,94**	0,4984
1,26	0,3962	**1,67**	0,4525	**2,16**	0,4846	**2,96**	0,4985
1,27	0,3980	**1,68**	0,4535	**2,18**	0,4854	**2,98**	0,4986
1,28	0,3997	**1,69**	0,4545	**2,20**	0,4861	**3,00**	0,4986
1,29	0,4015	**1,70**	0,4554	**2,22**	0,4868	**3,20**	5
1,30	0,4032	**1,71**	0,4564	**2,24**	0,4875	**3,40**	0,49931
1,31	0,4049	**1,72**	0,4573	**2,26**	0,4881	**3,60**	0,49966
1,32	0,4066	**1,73**	0,4582	**2,28**	0,4887	**3,80**	0,49984
1,33	0,4082	**1,74**	0,4591	**2,30**	0,4893	**4,00**	0,49992
1,34	0,4099	**1,75**	0,4599	**2,32**	0,4898	**4,50**	0,49996
1,35	0,4115	**1,76**	0,4608	**2,34**	0,4904	**5,00**	0,49999
1,36	0,4131	**1,77**	0,4616				

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	v			n	v		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,1	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,96	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	v			n	v		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Критичні точки розподілу χ^2

Число степенів свободи *k*	Рівень значимості α					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,89**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,0001
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число степенів свободи *k*	Рівень значимості α (двостороння критична область)					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,99
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	,3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Рівень значимості α (одностороння критична область)					

Біноміальний розподіл – the binomial distribution

Випадковий – random
Випадкові величини – the random variables
Випадкові процеси – random processes

Гіпотези – the hypothesis
Густина (щільність) – the density
Густина розподілу – the density distribution.

Двомірна випадкова величина – two-dimensional random variable
Дискретний – discrete
Дисперсія – the dispersion
Диференціальна функція розподілу – the differential distribution functiony
Добуток – the product
Достовірний – reliable
Дробові числа – floating point numbers

Ексцес – the kurtosis
Елемент імовірності – the element probability
Еліптичний – elliptic
Ефективний – effective

Закон рівномірної щільності – the law of uniform density
Залежний – dependent

Інтеграл імовірності – the probability integrals
Інтегральна функція розподілу – the integral distribution function

Ймовірність – the probability

Комбінаторика – the combinatorics
Конусний – conical
Кореляційний момент – the moment correlation

Математичне очікування – mathematical expectation
Многокутник розподілу – the polygons sharing
Множина елементарних подій – the set of elementary events.
Момент зв’язку – the moment connection
Момент другого порядку – second order moment
Момент першого порядку – the moment of first order

Найімовірніше число – the most likely number
Незалежний – independent
Неможливий – could not be random

Неперервний – the continuous
Несумісні події – the incompatible events
Нормальний закон розподілу – normal law of distribution
Перестановка – the permutation
Повна група подій – the complete group of events
Подвійний інтеграл – the double integral
Подія – the event
Послідовність – the progression
Початковий момент – starting point
Приріст – the growth
Простір – space
Протилежний – opposite

Розміщення – an accommodation
Ряд розподілу – the number distribution

Середнє значення – an average
Середнє квадратичне відхилення – the mean square deviation
Співвідношення – ratio
Сполученням – combination
Сталий множник – the sustainable multiplier
Статистична ймовірність – the statistical probability
Статистичний ряд – the statistical series
Статистична сукупність – statistical combination
Степінь розсіювання – the power dissipation
Сума – the amount
Сумісні події – the compatible evenst

Твірна функція – produced feature

Фундаментальний закон – the fundamental laws
Функція розподілу – the distribution function
Функція розподілу ймовірностей – probability distribution function

Характеристика розсіювання – the characteristic scattering

Центр розподілу імовірності – the probability distribution center
Центрована випадкова величина – the centered random variable

Числові параметри – the number of parameters