Розділ 5 Невизначений інтеграл

5.1. Первісна функція.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на інтервалі $X=(a,b)$ (скінченному або нескінченному), якщо у кожній точці цього інтервала $f(x)$ є похідною для $F(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$.

З цього означення слідує, що задача знаходження первісної обернена до задачі диференціювання: по заданій функції $f(x)$ потрібно знайти функцію $F(x)$, похідна якої рівна $f(x)$.

Первісна визначена неоднозначно: для функції $\frac{1}{1+x^2}$ первісними будуть функція arctg$x$, і функція arctg$x$ – 10: $(\text{arctg}\, x)'=(\text{arctg}\, x-10)'=\frac{1}{1+x^2}$. Для того, щоб описати усю множину первісних функції $f(x)$, розглянемо *властивості первісної*.

Властивості первісної.

1. Якщо функція $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на інтервалі X, то функція $f(x)+C$, де C – довільна стала, теж буде первісною для $f(x)$ на цьому інтервалі. (Доведення: $F'(x)=\left(F(x)+C\right)'=f(x)$).

2. Якщо функція $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$ на інтервалі $X=(a,b)$, то будь яка інша первісна $F_1(x)$ може бути представлена у вигляді $F_1(x)=F(x)+C$, де C – стала на X функція.

Доведення. Так як функції $F(x)$ і $F_1(x)$ – первісні для $f(x)$, то $F'(x)=F_1'(x)=f(x)\Rightarrow\left(F_1(x)-F(x)\right)'=0\Rightarrow$ (по теоремі про умову сталості диференційованої функції на інтервалі) $F_1(x)-F(x)=C=\text{const}\Rightarrow F_1(x)=F(x)+C$.

3. Для будь якої первісної $F(x)$ виконується рівність $dF(x)=f(x)\,dx$.

З цих властивостей слідує, що якщо $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на інтервалі X, то уся множина первісних функції $f(x)$ (тобто функцій, що мають похідну $f(x)$ і диференціал $f(x)dx$) на цьому інтервалі описується виразом $F(x)+C$, де C – довільна стала.

5.2. Невизначений інтеграл та його властивості.

Означення. Множина первісних функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* від цієї функції і позначається символом $\int f(x)dx$.

Як слідує з вищевикладеного, якщо $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, то $\int f(x)dx=F(x)+C$, де C – довільна стала. Функцію $f(x)$ прийнято називати *підінтегральною функцією,* добуток $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*.

Властивості невизначеного інтеграла, що слідують безпосередньо з означення:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
2. $\int F'(x)dx = F(x)+C$ (або $\int dF(x) = F(x)+C$).

5.3. Таблиця невизначених інтегралів.

1	$\int 0\cdot dx = C$.	11	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.
2	$\int 1\cdot dx = x + C$.	12	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$.	13	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.
4	$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$.	14	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$.	15	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$.
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$.	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$.	17	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C$.
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.	18	$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C$.
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.	19	$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.
10	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.	20	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$; $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x+\pi/2}{2}\right\rvert + C$.

У формулах 14, 15, 16, 19 припускається, що $a>0$. Кожна з формул таблиці справедлива на будь якому інтервалі, на якому неперервна підінтегральна функція. Усі ці формули можна довести диференціюванням правої частини. Доведемо, наприклад, формулу 4: якщо $x>0$, то $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$; якщо $x<0$, то $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Доведемо, що будь яка неперервна функція має первісну і, як наслідок, невизначений інтеграл. При вивченні диференціювання було встановлено, що за допомогою таблиці похідних і правил диференціювання можна отримати похідну будь якої елементарної функції, і ця похідна може бути елементарною функцією. Операція інтегрування цією властивістю не володіє: навіть відносно прості функції можуть мати первісні, які через елементарні функції не виражаються. Так не беруться в елементарних функціях наступні інтеграли, що відносяться до класу спеціальних функцій:

$\int e^{-x^2}dx$ – інтеграл Пуассона; $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ – інтеграли Френеля; $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральні синус, косинус, логарифм.

5.4. Найпростіші правила інтегрування.

1. $\int a\cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$ ($a = \text{const}$);

2. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

$$\int\left(5x^2-6x+\frac{8}{x\sqrt[4]{x}}\right)dx = 5\int x^2dx - 6\int xdx + 8\int x^{-5/4}dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{8}{-1/4}x^{-1/4} + C =$$

$$= \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{32}{\sqrt[4]{x}} + C.$$

$$\int\left(2\sin x - \frac{8}{x^2+4} + \frac{1}{x^2-4}\right)dx = 2\int \sin xdx - 8\int \frac{dx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{x^2-4} = -2\cos x - 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

3. Підведення під знак диференціала сталого доданка: якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(x+a)dx = F(x+a)+C$ ($a = \text{const}$).

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+6} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-3} = \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{3}}{x-3+\sqrt{3}}\right| + C.$$

4. Підведення під знак диференціала сталого множника: якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$ ($a = \text{const}$).

$$\int \frac{dx}{\sin^2 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d3x}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}\,3x + C.$$

Прийоми 3, 4 легко комбінуються: якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ ($a, b = \text{const}$).

$$\int \cos(5x+6)dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x+6)d(5x+6) = \frac{1}{5}\sin(5x+6)+C.$$

5.5. Заміна змінної у невизначеному інтегралі (інтегрування підстановкою).

Нехай $\int f(x)dx = F(x)+C$. Тоді $\int f(t(x))t'(x)dx = F(t(x))+C$. Тут $t(x)$ – диференційовна монотонна функція.

Доведення безпосередньо слідує з формули для похідної складеної функції. Перепишемо перший інтеграл, замінивши змінну x на t: $\int f(t)dt = F(t) + C$. Це означає, що $F'(t) = f(t)$. Замінимо незалежну змінну t на функцію t = $t(x)$: $F'(t(x)) = f(t(x)) \cdot t'(x)$. Отже, функція $F(t(x))$ є первісною для добутку $f(t(x)) \cdot t'(x)$, або $\int f(t(x))t'(x)dx = F(t(x)) + C$.

При розв'язуванні задач заміну змінної можна виконати двома способами.

1.Якщо у підінтегральній функції можна зразу відмітити обидва співмножники,і$f(t(x))$, і $t'(x)$, то заміна змінної проводиться підведенням множника $t'(x)$ під знак диференціала: $t'(x)dx = dt$, і задача зводиться до обчислення інтеграла $\int f(t)dt$.

$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$ (задача зведена до обчислення $\int \frac{dt}{t}$, де t = cos$x$) $= -\ln|\cos x| + C$ (аналогічно знаходиться інтеграл від $\operatorname{ctg} x$).

$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d \sin x =$ (задача зведена до обчислення $\int e^t dt$, де t=sin$x$) $= e^{\sin x} + C$.

У більш складних задачах операція підведення під знак диференціала може виконуватись кілька разів.

$$\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 \frac{x}{1+x^4} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4}(2xdx) = \frac{1}{2}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 \frac{1}{1+x^4} dx^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 \left(\frac{-dx^2}{1+x^4}\right) = -\frac{1}{2}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} \operatorname{arcctg}^4 x^2 d \operatorname{arcctg} x^2 =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot 5}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} (5 \operatorname{arcctg}^4 x^2 d \operatorname{arcctg} x^2) = -\frac{1}{10}\int e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} (d \operatorname{arcctg}^5 x^2) = -\frac{1}{10} e^{\operatorname{arcctg}^5 x^2} + C.$$

2. Заміну змінної можна провести зведенням підінтегрального виразу до нової змінної.

$\int \boldsymbol{e}^{\sin \boldsymbol{x}} \cos \boldsymbol{x} \boldsymbol{dx}$. Робимо підстановку t=sin$x$. Виражаємо усі множники підінтегрального виразу через змінну t: $x = \arcsin t$; $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$; в результаті:

$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C =$ (повертаємось до початкової змінної) $= e^{\sin x} + C$.

$\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})}$. Підінтегральна функція містить два множники, жоден з яких не є похідною другого, тому підводити їх під знак диференціала не потрібно. Спробуємо ввести нову змінну, таку, щоб корені добувалися:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}(1+\sqrt[3]{x-5})}=\left|\begin{array}{l} x-5=t^6;\ t=\sqrt[6]{x-5}; \\ x=t^6+5;\ dx=6t^5dt \end{array}\right|=\int \frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int \frac{t^2dt}{t^2+1}=6\int \frac{(t^2+1-1)dt}{t^2+1}=$$

$$=6\left(\int \boldsymbol{dt}-\int \frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{t}^2+1}\right)=6(\boldsymbol{t}-\operatorname{arctg}\boldsymbol{t})+\boldsymbol{C}=6\left(\sqrt[6]{\boldsymbol{x}-5}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{\boldsymbol{x}-5}\right)+\boldsymbol{C}\ .$$

[illegible]: $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ (інтеграл №19 з таблиці невизначених інтегралів). Тут підінтегральна функція складається з єдиного множника; зробимо таку заміну змінної, щоб корінь добувався: $x=a\sin t$ (або $x=a\cos t$, $a>0$):

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{array}{l} x=a\sin t;\ dx=a\cos t dt; \\ \sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t \end{array}\right|=a^2\int \cos^2 t\cdot dt\ :$$

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}; \qquad \cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}\ .$$

Тому $a^2\int \cos^2 t\cdot dt=a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(\int dt+\int \cos 2t dt\right)=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\int \cos 2t\cdot d2t\right)=$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\cos t\right)+C=\left|\begin{array}{l} \sin t=\dfrac{x}{a};\ \cos t= \\ \sqrt{1-\sin^2 t}=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C\ .$$

Виведемо формули 17, 15, 20 з таблиці невизначених інтегралів:

17.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=\left|\begin{array}{l} t=x+\sqrt{x^2+\alpha};\ t-x=\sqrt{x^2+\alpha};\ (t-x)^2=x^2+\alpha; \\ t^2-2tx+x^2=x^2+\alpha;\ x=\dfrac{t^2-\alpha}{2t};\ \sqrt{x^2+\alpha}=t-\dfrac{t^2-\alpha}{2t}= \\ =\dfrac{t^2+\alpha}{2t};\ dx=\dfrac{t^2+\alpha}{2t^2}dt \end{array}\right|=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C\ \cdot$$

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int \frac{2a}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=$

$$=\frac{1}{2a}\left(\int \frac{d(x-a)}{x-a}-\int \frac{d(x+a)}{x+a}\right)=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\ .$$

20. $\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{dx}{\sin 2\frac{x}{2}}=\int \frac{dx}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}=\int \frac{d(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)}=\int \frac{\dfrac{d(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{\dfrac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}=$

$$=\int \frac{d(\operatorname{tg}(x/2))}{\operatorname{tg}(x/2)}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C\ .$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\pi/2}{2}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

5.6. Інтегрування по частинам.

Інтегрування по частинам – прийом, який використовується так часто, як і заміна змінної. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – функції, які мають неперервні частинні похідні. Тоді по формулі диференціювання добутку $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du \Rightarrow u\cdot dv=d(uv)-v\cdot du$. Знаходимо невизначені інтеграли для обох частин цієї рівності (при цьому $\int d(uv)=uv+C$):

$$\int u\cdot dv = uv-\int v\cdot du.$$

Ця формула називається *формулою інтегрування по частинам.*

Часто її записують в похідних ($dv=v'dx,\ du=u'dx$):

$$\int u\cdot v'dx = uv-\int v\cdot u'dx.$$

$$\int x\sin x dx=\left|\begin{array}{l} u=x;\ dv=\sin x dx; \\ du=dx;\ v=\int\sin x dx=-\cos x\end{array}\right|=x(-\cos x)-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

$$\int\ln x dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x;\ dv=dx; \\ du=\dfrac{dx}{x};\ v=x\end{array}\right|=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

Формула інтегрування по частинам може використовуватись неодноразово.

$$\int e^x x^3dx=\int x^3(e^xdx)=\int x^3de^x=x^3e^x-\int e^xdx^3=x^3e^x-\int e^x3x^2dx=x^3e^x-3\int x^2(e^xdx)=$$

$$=x^3e^x-3\int x^2de^x=x^3e^x-3(x^2e^x-\int e^xdx^2)=x^3e^x-3(x^2e^x-\int e^x2xdx)=$$

$$=x^3e^x-3x^2e^x+6\int xde^x=x^3e^x-3x^2e^x+6(xe^x-\int e^xdx)=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6\int e^xdx=$$

$$=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+C=e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C.$$

Наведені приклади показують, для яких функцій потрібно використовувати формулу інтегрування по частинам:

5.6.1. Інтеграли виду $\int P_n(x)\cdot\cos ax\cdot dx$, $\int P_n(x)\cdot\sin ax\cdot dx$, $\int P_n(x)\cdot a^x\cdot dx$, де $P_n(x)$ – многочлен *n*-го степеня.

Так, для $\int P_n(x)\cdot\cos ax\cdot dx$ маємо:

$$u = P_n(x), \quad dv = \cos ax dx\,,\ du = (P_n(x))' dx = P_{n-1}(x)dx,\ v = (\sin ax)/a\,,$$

і $\int P_n(x)\cdot\cos ax\cdot dx = P_n(x)\cdot(\sin ax)/a - 1/a\int P_{n-1}(x)\cdot\sin ax\cdot dx$. В результаті ми отримали інтеграл того ж типу з многочленом степеня, на одиницю менше. Після ***n***-кратного використання формули степінь многочлена зменшиться до нуля, тобто многочлен перетвориться у сталу, і інтеграл зведеться до табличного.

5.6.2. Інтеграли $\int \boldsymbol{P_n(x)\cdot f(x)\cdot dx}$, де $\boldsymbol{f(x)}$ – трансцендентна функція, яка має дробово-раціональну або дробово-ірраціональну похідну (ln*x*, arctg*x*, arcctg*x*, arcsin*x*, arccos*x*).

В цьому випадку потрібно узяти $u = f(x)$, d$v = P_n(x)dx$, для того, щоб в інтегралі $\int vdu$ була не $f(x)$, а її похідна.

$$\int x\cdot\arcsin x\cdot dx = \left|\begin{matrix} u = \arcsin x;\ dv = xdx; \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ v = \dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int\frac{x^2dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \left|\begin{matrix} x = \sin t;\ dx = \cos tdt \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int\sin^2 tdt = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\int(1-\cos 2t)dt = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{t}{4} + \frac{\sin t\cos t}{4} + C = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{\arcsin x}{4} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C\,.$$

5.6.3. Зведення інтеграла до самого себе.

За допомогою інтегрування по частинам інтеграл виражається через такий же інтеграл; в результаті маємо рівняння відносно цього інтеграла.

$I = \int\sqrt{a^2-x^2}dx$ (це інтеграл №19 з таблиці невизначених інтегралів).

$$I = \int\sqrt{a^2-x^2}dx = \left|\begin{matrix} u = \sqrt{a^2-x^2};\ dv = dx; \\ du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}};\ v = x\end{matrix}\right| = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\arcsin\frac{x}{a}\,.$$

В результаті для шуканого інтеграла ми отримали рівняння: $I = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\arcsin\frac{x}{a}$, розв’язуючи яке, отримаємо $2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C$ (константа C з’явилась внаслідок того, що інтеграли I в правій і лівій частинах рівняння визначені з точністю до довільної сталої) і $I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$ (константа $\frac{C}{2}$ переозначена через C). Аналогічно виводиться інтеграл №20 з таблиці невизначених інтегралів.

Зведення інтеграла до самого себе – самий простий спосіб знаходження інтегралів виду: $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ і $\int e^{ax}\sin bx dx$ $(a, b = \mathrm{const})$.

[illegible]

$$I = \int e^{ax}\cos bx \cdot dx = \begin{vmatrix} u = \cos bx; & dv = e^{ax}dx \\ du = -b\sin bx dx; & v = e^{ax}/a \end{vmatrix} = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx \cdot dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \sin bx; & dv = e^{ax}dx \\ du = b\cos bx dx; & v = e^{ax}/a \end{vmatrix} = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx \cdot dx\right) =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I.$$

Отже, після двократного інтегрування по частинам отримали рівняння відносно I: $I = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{be^{ax}}{a^2}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I$, розв'язування якого $I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx + b\sin bx\right) + C$.

При знаходженні цих інтегралів не принципово, приймемо ми $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$ чи $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx dx$.

5.6.4. Рекурентні співвідношення.

Якщо підінтегральна функція залежить від деякого параметра n, і отримаємо співвідношення, яке виражає інтеграл через аналогічний з меншим значенням n, то це співвідношення називається *рекурентним співвідношенням*.

$$I_n = \int \cos^n x \cdot dx.$$

Представимо підінтегральну функцію у вигляді $\cos^n x = \cos^{n-2} x \cdot \cos^2 x$ $= \cos^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) = \cos^{n-2} x - \sin x \cos^{n-2} x \sin x$.

$$\boldsymbol{I_n} = \int \cos^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{dx} = \int \cos^{\boldsymbol{n}-2} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{dx} - \int \sin \boldsymbol{x} \cos^{\boldsymbol{n}-2} \boldsymbol{x} \sin \boldsymbol{x dx} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} = \sin \boldsymbol{x};\ \boldsymbol{dv} = \cos^{\boldsymbol{n}-2} \boldsymbol{x} \sin \boldsymbol{x dx}; \\ \boldsymbol{du} = \cos \boldsymbol{x dx};\ \boldsymbol{v} = -\dfrac{\cos^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}-1}; \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{I_{n-2}} - \sin \boldsymbol{x}\left(-\frac{\cos^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}-1}\right) + \int\left(-\frac{\cos^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}-1}\right)\cos \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{I_{n-2}} + \frac{\sin \boldsymbol{x} \cos^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}-1} - \frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\int \cos \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{dx} =$$

$$= \boldsymbol{I_{n-2}} + \frac{\sin \boldsymbol{x} \cos^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}-1} - \frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{I_n} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\boldsymbol{n}-1}\right)\boldsymbol{I_n} = \boldsymbol{I_{n-2}} + \frac{\sin \boldsymbol{x} \cos^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}-1} \Rightarrow \boldsymbol{I_n} = \frac{\boldsymbol{n}-1}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{I_{n-2}} + \frac{\sin \boldsymbol{x} \cos^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}$$

.

Тепер, знаючи $I_1 = \int \cos x \cdot dx = \sin x + C$, $I_2 = \int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$, ми можемо виписати:

$$I_3 = \int \cos^3 x \cdot dx = \frac{3-1}{3}I_1 + \frac{\sin x \cos^{3-1} x}{3} = \frac{2}{3}\sin x + \frac{\sin x \cos^2 x}{3} + C;$$

$$I_4 = \int \cos^4 x \cdot dx = \frac{4-1}{4}I_2 + \frac{\sin x \cos^{4-1} x}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(2x + \sin 2x\right) + \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + C;$$

$$I_5=\int\cos^5 x\cdot dx=\frac{5-1}{5}I_3+\frac{\sin x\cos^{5-1}x}{5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}\left(2\sin x+\sin x\cos^2 x\right)+\frac{\sin x\cos^4 x}{5}+C \text{ і}$$

т.д.

В якості другого прикладу виведемо ще рекурентну формулу для інтеграла, який знадобиться в подальшому: $I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$:

$$\boldsymbol{I_n}=\int\frac{1}{\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{a}^2\right)^{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{dx}=\frac{1}{\boldsymbol{a}^2}\int\frac{\boldsymbol{a}^2}{\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{a}^2\right)^{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{dx}=\frac{1}{\boldsymbol{a}^2}\int\frac{(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{a}^2)-\boldsymbol{x}^2}{\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{a}^2\right)^{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{dx}=\frac{1}{\boldsymbol{a}^2}\int\frac{1}{\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{a}^2\right)^{\boldsymbol{n}-1}}\boldsymbol{dx}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int x\frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int xd\left[\frac{1}{2(-n+1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right]=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}x\left[\frac{1}{2(-n+1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right]+$$

$$+\frac{1}{a^2}\int\left[\frac{1}{2(-n+1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\right]dx=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)a^2}I_{n-1}=$$

$$=\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}.$$

Тепер, починаючи з $I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$, можемо знайти:

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{2\cdot2-3}{2\cdot(2-1)a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2\cdot(2-1)a^2}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{2-1}}=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}+C;$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3}=\frac{2\cdot3-3}{2\cdot(3-1)a^2}\left(\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}\right)+\frac{x}{2\cdot(3-1)a^2}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{3-1}}=$$

$$=\frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}\right)+\frac{x}{4a^2}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^2}+C \text{ і т.д.}$$

5.7. Інтеграли, які містять квадратний тричлен ax^2+bx+c.

5.7.1. Інтеграли виду $\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ $(a\neq0)$ зводяться до табличних виділенням повного квадрата в тричлені:

$$\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}=\frac{Mx+N}{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)}=\frac{Mx+N}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}=\frac{M\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}=$$

$$=\frac{M\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}=\frac{M}{2a}\cdot\frac{2\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{2N}{M}-\frac{b}{a}\right)}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}.$$

Зміст цих перетворень: доданок Mx у чисельнику перетворюється у похідну знаменника, що отримався; другий доданок у чисельнику від x не залежить. Тепер відносно змінної $t=x+\frac{b}{2a}$ інтеграл звівся до $\frac{M}{2a}\left(\int\frac{2t}{t^2\pm c_1^2}dt+L\int\frac{dt}{t^2\pm c_1^2}\right)$, де $L=\frac{2N}{M}-\frac{b}{a}$, $c_1^2=\frac{|4ac-b^2|}{4a^2}$.

Перший інтеграл $\int\frac{2t}{t^2\pm c_1^2}dt=\int\frac{d\left(t^2\pm c_1^2\right)}{t^2\pm c_1^2}=\ln|t^2\pm c_1^2|+C$, другий – один з табличних інтегралів – 14 або 15.

Приклад:

$$\int\frac{7\boldsymbol{x}+3}{-5\boldsymbol{x}^2+9\boldsymbol{x}-6}\boldsymbol{dx}=\frac{7}{-5\cdot2}\int\frac{2\boldsymbol{x}+\frac{6}{7}}{\boldsymbol{x}^2-\frac{9}{5}\boldsymbol{x}+\frac{6}{5}}\boldsymbol{dx}=-\frac{7}{10}\int\frac{2\boldsymbol{x}+\frac{6}{7}}{\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{6}{5}-\frac{81}{100}}\boldsymbol{dx}=-\frac{7}{10}\int\frac{2\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)+\left(\frac{18}{10}+\frac{6}{7}\right)}{\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}\boldsymbol{dx}=$$

$$=-\frac{7}{10}\left(\int\frac{2\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)\boldsymbol{dx}}{\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}+\left(\frac{9}{5}+\frac{6}{7}\right)\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}\right)=-\frac{7}{10}\int\frac{\boldsymbol{d}\left(\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}\right)}{\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}-$$

$$-\frac{7}{10}\cdot\left(\frac{63+30}{35}\right)\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}}=-\frac{7}{10}\ln\left|\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{39}{100}\right|-\frac{93}{50}\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\left(\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{39}}{10}\right)^2}=$$

$$=-\frac{7}{10}\ln\left|\boldsymbol{x}^2-\frac{9}{5}\boldsymbol{x}+\frac{81}{100}+\frac{39}{100}\right|-\frac{93}{50}:\frac{\sqrt{39}}{10}\operatorname{arctg}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\frac{9}{10}}{\frac{\sqrt{39}}{10}}\right)+\boldsymbol{C}=-\frac{7}{10}\ln\left|5\boldsymbol{x}^2-9\boldsymbol{x}+6\right|-\frac{93}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\left(\frac{10\boldsymbol{x}-9}{\sqrt{39}}\right)+\boldsymbol{C}.$$

Той же результат можна отримати заміною змінної $t=2ax+b$ (похідна знаменника), або $t=ax+\frac{b}{2}$, або $t=x+\frac{b}{2a}$:

$$\int\frac{7x+3}{-5x^2+9x-6}dx=\left|\begin{array}{l}t=-10x+9;\\ x=-\frac{t-9}{10};dx=-\frac{dt}{10}\end{array}\right|=\int\frac{7\left(-\frac{t-9}{10}\right)+3}{-5\left(-\frac{t-9}{10}\right)^2+9\left(-\frac{t-9}{10}\right)-6}\left(-\frac{dt}{10}\right)=$$ (після усіх перетворень)

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{7t-93}{t^2+39}dt=-\frac{7}{5}\int\frac{t\cdot dt}{t^2+39}+\frac{93}{5}\int\frac{dt}{t^2+39}=-\frac{7}{10}\int\frac{d(t^2+39)}{t^2+39}+\frac{93}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{39}}\right)=$$

$$=-\frac{7}{10}\ln(\boldsymbol{t}^2+39)+\frac{93}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\sqrt{39}}\right)+\boldsymbol{C}=-\frac{7}{10}\ln((-10\boldsymbol{x}+9)^2+39)+\frac{93}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\left(\frac{-10\boldsymbol{x}+9}{\sqrt{39}}\right)+\boldsymbol{C}=$$

$$= -\frac{7}{10}\ln\left[20(5x^2-9x+6)\right] - \frac{93}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\left(\frac{10x-9}{\sqrt{39}}\right) + C =$$

$$= -\frac{7}{10}\ln(5\boldsymbol{x}^2-9\boldsymbol{x}+6) - \frac{93}{5\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\left(\frac{10\boldsymbol{x}-9}{\sqrt{39}}\right) + \boldsymbol{C}.$$

5.7.2. Інтеграли виду $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx \;\; (a \neq 0)$.

$$\int\sqrt{3\boldsymbol{x}^2-5\boldsymbol{x}+6}\cdot d\boldsymbol{x} = \sqrt{3}\int\sqrt{\left(\boldsymbol{x}-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{47}{36}}\cdot \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{x}-\frac{5}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\boldsymbol{x}-\frac{5}{6}\right)\sqrt{\left(\boldsymbol{x}-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{47}{36}}+\frac{47}{36}\cdot\ln\left|\left(\boldsymbol{x}-\frac{5}{6}\right)+\sqrt{\left(\boldsymbol{x}-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{47}{36}}\right|\right]+\boldsymbol{C} =$$

$$= \frac{1}{12}(6\boldsymbol{x}-5)\sqrt{3\boldsymbol{x}^2-5\boldsymbol{x}+6}+\frac{47\sqrt{3}}{72}\cdot\ln\left|\left(\boldsymbol{x}-\frac{5}{6}\right)+\sqrt{\boldsymbol{x}^2-\frac{5}{3}\boldsymbol{x}+2}\right|+\boldsymbol{C}.$$

$$\int\sqrt{6-5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{x}^2}\,d\boldsymbol{x} = \sqrt{3}\int\sqrt{-\boldsymbol{x}^2-\frac{5}{3}\boldsymbol{x}+2}\,d\boldsymbol{x} = \sqrt{3}\int\sqrt{-\left(\boldsymbol{x}+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{25}{36}+2}\,d\boldsymbol{x} = \sqrt{3}\int\sqrt{\frac{97}{36}-\left(\boldsymbol{x}+\frac{5}{6}\right)^2}\cdot \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{x}+\frac{5}{6}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\boldsymbol{x}+\frac{5}{6}\right)\sqrt{\frac{97}{36}-\left(\boldsymbol{x}+\frac{5}{6}\right)^2}+\frac{97}{36}\arcsin\frac{\boldsymbol{x}+5/6}{\sqrt{97/36}}\right]+\boldsymbol{C} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\boldsymbol{x}+\frac{5}{6}\right)\sqrt{2-\frac{5}{3}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2}+\frac{97}{36}\arcsin\frac{6\boldsymbol{x}+5}{\sqrt{97}}\right]+\boldsymbol{C} =$$

$$= \frac{1}{12}(6\boldsymbol{x}+5)\sqrt{6-5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{x}^2}+\frac{97\sqrt{3}}{72}\arcsin\frac{6\boldsymbol{x}+5}{\sqrt{97}}+\boldsymbol{C}.$$

5.7.3. Інтеграли виду $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \;\; (a \neq 0)$, як і в п.6.7.1, зводяться до табличних виділенням повного квадарата у тричлені:

$$\frac{\boldsymbol{Mx}+\boldsymbol{N}}{\sqrt{\boldsymbol{ax}^2+\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{c}}} = \frac{\boldsymbol{Mx}+\boldsymbol{N}}{\sqrt{\boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{x}^2+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}\right)}} = \frac{\boldsymbol{Mx}+\boldsymbol{N}}{\sqrt{\boldsymbol{a}\left(\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{a}}\right)^2+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}-\frac{\boldsymbol{b}^2}{4\boldsymbol{a}^2}\right)}} = \frac{\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{a}}\right)+\left(\boldsymbol{N}-\frac{\boldsymbol{Mb}}{2\boldsymbol{a}}\right)}{\sqrt{\frac{4\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{b}^2}{4\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{b}}{2\boldsymbol{a}}\right)^2}};$$

перший доданок у чисельнику дасть інтеграл від степеневої функції з показником степеня–1/2, другий – в залежності від знака a – табличний інтеграл №16 або №17:

$$\int \frac{7x+3}{\sqrt{-5x^2+9x+6}}\,dx = \left| \begin{array}{l} -5x^2+9x+6 = -5\left(x^2-2\frac{9}{10}x+\frac{81}{100}-\frac{6}{5}-\frac{81}{100}\right)= \\ -5\left[\left(x-\frac{9}{10}\right)^2-\frac{201}{100}\right]=5\left[\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right] \end{array}\right| = \int \frac{7\left(x-\frac{9}{10}\right)+3+\frac{63}{10}}{\sqrt{5\left[\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right]}}\,dx =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{5}}\int \frac{\left(x-\frac{9}{10}\right)}{\sqrt{\left[\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right]}}\,dx+\frac{93}{10\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left[\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right]}} = -\frac{7}{2\sqrt{5}}\int \frac{-2\left(x-\frac{9}{10}\right)}{\sqrt{\left[\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right]}}\,dx+\frac{93}{10\sqrt{5}}\int \frac{d\left(x-\frac{9}{10}\right)}{\sqrt{\left[\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right]}} =$$

$$= -\frac{7}{2\sqrt{5}}\int \left[\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right]^{-1/2} d\left[\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2\right]+\frac{93}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{x-9/10}{\sqrt{201/100}} =$$

$$= -\frac{7}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{201}{100}-\left(x-\frac{9}{10}\right)^2}+\frac{93}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x-9}{\sqrt{201}}+C = -\frac{7}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}-x^2+\frac{9}{5}x}+\frac{93}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x-9}{\sqrt{201}}+C =$$

$$= -\frac{7}{5}\sqrt{-5x^2+9x+6}+\frac{93}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x-9}{\sqrt{201}}+C\,.$$

5.7.4. Інтеграли виду $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \;\; (a \neq 0,\, n > 1)$.

Беруться з використанням тієї ж техніки. Після приведення підінтегральної функції до виду (див. 5.7.1) $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{M}{2a^n}\cdot\frac{2\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{2N}{M}-\frac{b}{a}\right)}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]^n}$ відносно змінної $t = x+\frac{b}{2a}$ інтеграл зводиться до $\frac{M}{2a^n}\left(\int\frac{2t}{(t^2\pm c_1^2)^n}\,dt+L\int\frac{dt}{(t^2\pm c_1^2)^n}\right)$. Перший інтеграл $\int\frac{2t}{(t^2\pm c_1^2)^n}\,dt = \int\frac{d\left(t^2\pm c_1^2\right)}{(t^2\pm c_1^2)^n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(t^2\pm c_1^2)^{n-1}}+C$, другий може бути знайдений по рекурентній формулі, виведеній у 5.6.4.

$$\int\frac{5x+6}{(x^2+6x+15)^3}dx = \frac{5}{2}\int\frac{2x+12/5}{(x^2+6x+15)^3}\,dx = \frac{5}{2}\int\frac{(2x+6)+(12/5-6)}{(x^2+6x+15)^3}\,dx =$$

$$\frac{5}{2}\int\frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+15)^3}+\frac{5}{2}\left(-\frac{18}{5}\right)\int\frac{dx}{(x^2+6x+15)^3} = \frac{5}{2}\int\frac{d(x^2+6x+15)}{(x^2+6x+15)^3}-9\int\frac{dx}{(x^2+6x+15)^3} =$$

(перший інтеграл – інтеграл від степеневої функції; другий – отриманий у 6.6.4 по рекурентній формулі інтеграл I_3, в якому потрібно замінити x на $x+3$, $a=\sqrt{6}$)

$$= \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x^2+6x+15)^2}-9\left[\frac{3}{4\cdot 6}\left(\frac{1}{2\sqrt{6}^3}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{6}}+\frac{x+3}{2\cdot 6((x+3)^2+6)}\right)+\frac{1}{4\cdot 6}\cdot\frac{x+3}{((x+3)^2+6)^2}\right] =$$

$$=\frac{-5}{4(x^2+6x+15)^2}-\frac{3}{32\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{6}}-\frac{3}{32}\frac{x+3}{(x^2+6x+15)}-\frac{3}{8}\frac{x+3}{(x^2+6x+15)^2}+C\,.$$

5.7.5.Інтеграли виду $\int\frac{dx}{(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Підстановкою $t=\frac{1}{Mx+N}$ зводяться до інтегралів, які розглядалися у 5.7.3.

$$\int\frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2+6x+15}}=\left|\begin{matrix} t=\frac{1}{x-4}, & x-4=\frac{1}{t}, \\ x=\frac{1}{t}+4, & dx=-\frac{dt}{t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{-\frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{t}^2}}{\frac{1}{\boldsymbol{t}}\sqrt{\left(\frac{1}{\boldsymbol{t}}+4\right)^2+6\left(\frac{1}{\boldsymbol{t}}+4\right)+15}}=-\int\frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{t}\sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{t}^2}+\frac{8}{\boldsymbol{t}}+16+\frac{6}{\boldsymbol{t}}+24+15}}=-\int\frac{\boldsymbol{dt}}{\sqrt{55\boldsymbol{t}^2+14\boldsymbol{t}+1}}==-\frac{1}{\sqrt{55}}\int\frac{\boldsymbol{dt}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{t}+\frac{7}{55}\right)^2+\frac{6}{55}}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{55}}\ln\left|\boldsymbol{t}+\frac{7}{55}+\sqrt{\boldsymbol{t}^2+\frac{14}{55}\boldsymbol{t}+\frac{1}{55}}\right|+\boldsymbol{C}=-\frac{1}{\sqrt{55}}\ln\left|\frac{1}{\boldsymbol{x}-4}+\frac{7}{55}+\sqrt{\left(\frac{1}{\boldsymbol{x}-4}\right)^2+\frac{14}{55(\boldsymbol{x}-4)}+\frac{1}{55}}\right|+\boldsymbol{C}\,.$$

5.8. Інтегрування раціональних функцій.

5.8.1. Інтегрування простих дробів.

Простими дробами називаються раціональні функції наступних чотирьох типів:

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k\ge 2$;

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$; IV. $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $k\ge 2$, $p^2-4q<0$.

Інтеграли від дробів перших двох типів – табличні інтеграли:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=\ln|x-a|+C;\qquad \int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{-k+1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C;$$

Інтегрування дробів III і IV типів розглянуто у 6.7**.**

5.8.2. Інтегрування раціональних функцій.

Алгоритм обчислення інтегралів від раціональних функцій, тобто інтегралів виду

$$\int f(x)dx=\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=\int\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b_1x+b_0}dx$$

полягає у наступному:

1. Якщо дріб $\dfrac{\boldsymbol{P_n(x)}}{\boldsymbol{Q_m(x)}}$ – неправильний, її інтегрування зводиться до інтегрування многочлена і правильного дробу. Для цього він представляється у вигляді $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_{n-m}(x) + \dfrac{P_{n1}(x)}{Q_m(x)}$, $n1<m$; знаходження цілої частини $L_{n-m}(x)$ і остачі $P_{n1}(x)$ може бути виконано, наприклад, за допомогою процедури ділення "кутом". Далі розглядається інтегрування правильних дробів.

2. Знаменник $Q_m(x)$ правильного дробу представляється у вигляді добутку $Q_m(x) = b_m(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}...(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$, де x_1, x_2, …,x_s – попарно різні дійсні корені цього многочлена, k_1, k_2, …,k_s – їх кратності, квадратні тричлени (що відповідають попарно різним парам спряжених коренів $\alpha_j \pm i\beta_j$ кратностей l_1, l_2, …,l_r) $x^2+p_jx+q_j$, $j=1,2,...,r$ з дійсними коефіцієнтами не мають дійсних коренів (тобто $p_j^{\,2}-4q_j<0$), $k_1+k_2+\ldots+k_s+2(l_1+l_2+\ldots+l_r)=n$.

3. Дріб представляється у вигляді суми простих дробів з невизначеними коефіцієнтами:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_{1,1}}{x-x_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2}+\frac{A_{1,3}}{(x-x_1)^3}+\ldots+\frac{A_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_{2,1}}{x-x_2}+\frac{A_{2,2}}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2,k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+\ldots$$

$$..+\frac{A_{s,1}}{x-x_s}+\frac{A_{s,2}}{(x-x_s)^2}+\ldots+\frac{A_{s,k_s}}{(x-x_s)^{k_s}}+\frac{M_{1,1}x+N_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{1,2}x+N_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_{1,l_1}x+N_{1,l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+$$

$$+\frac{M_{2,1}x+N_{2,1}}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_{2,2}x+N_{2,2}}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\ldots+\frac{M_{2,l_2}x+N_{2,l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}}+\ldots+\frac{M_{r,1}x+N_{r,1}}{x^2+p_rx+q_r}+\frac{M_{r,2}x+N_{r,2}}{(x^2+p_rx+q_r)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{\boldsymbol{M_{r,l_r}x+N_{r,l_r}}}{\boldsymbol{(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}}}.$$

4. Права частина розкладу приводиться до спільного знаменника. Спільні знаменники зліва і справа скорочуються, і з умови рівності чисельників складається система лінійних рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів. Використовуються способи:

4.1. Спосіб частинних значень. У рівність підставляються різні значення x і таким чином складаються рівняння системи. Спочатку беруться корені $Q_m(x)$; якщо усі корені знаменника – дійсні різні числа, будуть знайдені усі невизначені коефіцієнти.

4.2. Прирівнюються коефіцієнти при однакових степенях x многочленів зліва і справа від знака рівності. При цьому кількість рівнянь обов’язково буде рівна кількості невизначених коефіцієнтів.

4.3. Комбінований спосіб. Деякі коефіцієнти визначаються по частинним значенням, для знаходження інших складаються рівняння по способу 4.2.

5. Виконується інтегрування простих дробів.

$$I=\int\frac{x^3}{(x-1)(x+3)}dx.$$

Дріб неправильний, тому виділяємо цілу частину:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+3)}=\frac{x^3}{x^2+2x-3}=x-2+\frac{7x-6}{(x-1)(x+3)}.$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & x^2+2x-3 \\
\hline
x^3+2x^2-3x & x-2 \\
\quad -2x^2+3x & \\
\quad -2x^2-4x+6 & \\
\qquad 7x-6 &
\end{array}$$

Правильний дріб представляємо у вигляді $\frac{7x-6}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$. Зводимо суму зліва до спільного знаменника:

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x+3)}=\frac{\overset{x+3}{A}}{x-1}+\frac{\overset{x-1}{B}}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{(A+B)x+(3A-B)}{(x-1)(x+3)}.$$

Рівність чисельників:

$A(x+3)+B(x-1)=7x-6$. Підставивши у цю рівність x = 1, отримаємо: 4A= 7 – 6 = 1, A=1/4; при x= –3 отримаємо –4B= –21 – 6 = –27, B= 27/4. Якщо прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} x & A+B=7; \\ 1 & 3A-B=-6; \Rightarrow 4A=1 \Rightarrow A=1/4 \Rightarrow B=7-A=27/4 \end{array}$$, тобто той же результат.

Отже,

$$I=\int\frac{x^3}{(x-1)(x+3)}dx=\int\left(x-2+\frac{1}{4(x-1)}+\frac{27}{4(x+3)}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{27}{4}\ln|x+3|+C.$$

$I=\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$.

Розклад має вигляд: $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$. Приводимо до спільного знаменника:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{\overbrace{A}^{(x^2+1)^2}}{x-2}+\frac{\overbrace{Bx+C}^{(x-2)(x^2+1)}}{x^2+1}+\frac{\overbrace{Dx+E}^{x-2}}{(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2)=$$

$$=A(x^4+2x^2+1)+(Bx+C)(x^3-2x^2+x-2)+(Dx+E)(x-2)=(A+B)x^4+(-2B+C)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+$$

$$+(-2B+C-2D+E)x+(A-2C-2E)$$

$$\begin{array}{l} x=2\,|\,8+4+13=25A\Rightarrow A=1; \\ x^4\,|\,A+B=0\Rightarrow B=-A=-1; \\ x^3\,|-2B+C=0\Rightarrow C=-2; \\ x^2\,|\,2A+B-2C+D=2\Rightarrow D=-3; \\ 1\;|\,A-2C-2E=13\Rightarrow E=-4. \end{array}$$

Звідси:

$$I=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\right)dx=\ln|x-2|-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{3}{2}\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}-4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-2\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}-$$

$$-4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-2\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{3}{2(x^2+1)}-\frac{4}{2}\left[\mathrm{arctg}\,x+\frac{x}{x^2+1}\right]+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3-4x}{x^2+1}-4\,\mathrm{arctg}\,x+C.$$

$I=\int\frac{6x^2+46x+95}{(x+4)^3}dx$.

Представлення підінтегральної функції у вигляді суми простих дробів: $\frac{6\boldsymbol{x}^2+46\boldsymbol{x}+95}{(\boldsymbol{x}+4)^3}=\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{x}+4}+\frac{\boldsymbol{B}}{(\boldsymbol{x}+4)^2}+\frac{\boldsymbol{C}}{(\boldsymbol{x}+4)^3}=\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+4)^2+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+4)+\boldsymbol{C}}{(\boldsymbol{x}+4)^3}=\frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2+(8\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}+16\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{(\boldsymbol{x}+4)^3}$.

При $x=-4$: $C=6\cdot16-46\cdot4+95=7$. Коефіцієнт при x^2 : $A=6$. Коефіцієнт при x : $8A+B=46$,

$B=46-48=-2$.

Тому

$$I=\int\frac{6x^2+46x+95}{(x+4)^3}dx=\int\left(\frac{6}{x+4}-\frac{2}{(x+4)^2}+\frac{7}{(x+4)^3}\right)dx=6\ln|x+4|+\frac{2}{x+4}-\frac{7}{2(x+4)^2}+C.$$

5.9. Інтегрування функцій, які раціонально залежать від $\sin x$, $\cos x$.

Розглянемо інтеграли $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де функція $R(\sin x, \cos x)$, що раціонально залежить від $\sin x$, $\cos x$, – відношення двох многочленів відносно цих функцій.

5.9.1. Універсальна тригонометрична підстановка.

Перехід у підінтегральній функції до змінної $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ перетворює $R(\sin x, \cos x)$ у функцію, яка раціонально залежить від t; методи інтегрування таких функцій розглянуті у попередньому розділі. Виразимо $\sin x$, $\cos x$, dx через t: $\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=$ (ділимо на $\cos^2\frac{x}{2}$) $=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=$ (ділимо на $\cos^2\frac{x}{2}$) $=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. В результаті усі компоненти підінтегральної функції виражаються через функції, які раціонально залежать від t.

$$\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\left|t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\int\frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2}=\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}=$$

$$=\int\frac{2d(t-4)}{(t-4)^2-1}=\frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

Універсальна тригонометрична підстановка завжди раціоналізує підінтегральну функцію, з її допомогою легко беруться інтеграли виду $\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$ (a, b, c – сталі).

5.9.2. Частинні тригонометричні підстановки.

1) Підінтегральна функція непарна відносно sin$x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Підстановка $t = \cos x$.
2) Підінтегральна функція непарна відносно cos$x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Підстановка $t = \sin x$.
3) Підінтегральна функція парна відносно sin$x$ і cos$x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Підстановка $t=\mathrm{tg}\,x$ (або $t=\mathrm{ctg}\,x$). $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $x = \mathrm{arctg}\,t$; $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx$.

Підінтегральна функція непарна відносно sin$x$: $\dfrac{(-\sin x)^3}{\cos x - 3} = -\dfrac{\sin^3 x}{\cos x - 3}$, тому

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x,\ x = \arccos t, \\ \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}, \\ dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^3}{t-3} \cdot \left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) = -\int \frac{1-t^2}{t-3} dt = \int \frac{t^2-9+8}{t-3} dt =$$

$$= \int (t+3)dt + 8\int \frac{dt}{t-3} = \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|t-3| + C = \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln|\cos x - 3| + C.$$

(можна перейти до $t = \cos x$ більш просто:

$\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx = \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos x - 3} (\sin x dx) = -\int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos x - 3} d(\cos x)$ і т.д.).

$\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx =$ (Підінтегральна функція непарна відносно cos$x$) =

$$\left| \begin{array}{l} \sin x = t; x = \arcsin t; \\ \cos x = \sqrt{1-t^2};\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^3}{t^4} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

$\int \dfrac{dx}{4\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 8\cos^2 x - 3} =$ (підінтегральна функція не змінюється при одночасній зміні знака у sin$x$ і cos$x$, тому $t=\mathrm{tg}\,x$)

$$= \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{4\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 4\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 8\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 3} = \int \frac{dt}{4t^2 - 4t + 8 - 3 - 3t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5} =$$

$$= \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2 + 1} = \mathrm{arctg}(t-2) + C = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x - 2) + C.$$

При знаходженні таких інтегралів для пониження степеня користуються основною тригонометричною тотожністю:

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x\sin x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^3 x\sin x}dx=\int\frac{dx}{\cos x\sin x}+\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{dx/\cos^2 x}{\sin x/\cos x}-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}+$$
$$+\frac{1}{2\cos^2 x}+C=\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C.$$

$$\int\operatorname{tg}^5 x dx=\int\operatorname{tg}^3 x\cdot\sin^2 x\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\operatorname{tg}^3 x\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}d(\operatorname{tg}x)=\int\frac{\operatorname{tg}^5 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}d(\operatorname{tg}x)=$$
$$=\int\frac{(\operatorname{tg}^5 \boldsymbol{x}+\operatorname{tg}^3 \boldsymbol{x})-(\operatorname{tg}^3 \boldsymbol{x}+\operatorname{tg}\boldsymbol{x})+\operatorname{tg}\boldsymbol{x}}{\operatorname{tg}^2 \boldsymbol{x}+1}\boldsymbol{d}(\operatorname{tg}\boldsymbol{x})=\int\left(\operatorname{tg}^3 \boldsymbol{x}-\operatorname{tg}\boldsymbol{x}+\frac{\operatorname{tg}\boldsymbol{x}}{\operatorname{tg}^2 \boldsymbol{x}+1}\right)\boldsymbol{d}(\operatorname{tg}\boldsymbol{x})=\frac{\operatorname{tg}^4 \boldsymbol{x}}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 \boldsymbol{x}}{2}+\frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}^2 \boldsymbol{x}+1)+\boldsymbol{C}.$$

$$\int\operatorname{ctg}^4 x dx=\int\operatorname{ctg}^2 x\cdot\cos^2 x\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int\operatorname{ctg}^2 x\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}d(\operatorname{ctg}x)=-\int\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}d(\operatorname{ctg}x)=$$
$$=-\int\frac{(\operatorname{ctg}^4 \boldsymbol{x}+\operatorname{ctg}^2 \boldsymbol{x})-(\operatorname{ctg}^2 \boldsymbol{x}+1)+1}{\operatorname{ctg}^2 \boldsymbol{x}+1}\boldsymbol{d}(\operatorname{ctg}\boldsymbol{x})=-\int\left(\operatorname{ctg}^2 \boldsymbol{x}-1+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \boldsymbol{x}+1}\right)\boldsymbol{d}(\operatorname{ctg}\boldsymbol{x})=-\frac{\operatorname{ctg}^3 \boldsymbol{x}}{3}+\operatorname{ctg}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}.$$

5.9.3. Інтегрування добутку парних степенів sin*x*, cos*x*.

При обчисленні інтегралів $\int\sin^{2m}x\cos^{2m}x\cdot dx$ потрібно понизити степінь тригонометричних функцій переходом до косинуса подвійного кута: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. Кут подвоюється до тих пір, поки один із степенів не стане непарним.

$$\int\cos^4 x\sin^2 x dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)(1-\cos 2x)dx=$$
$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x)dx=\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 2x dx-\frac{1}{8}\int\cos^2 2x dx-\frac{1}{8}\int\cos^3 2x dx=$$
$$=\frac{x}{8}+\frac{\sin 2x}{16}-\frac{1}{8}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx-\frac{1}{8}\int\cos^2 2x(\cos 2x dx)=\frac{x}{8}+\frac{\sin 2x}{16}-\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-$$
$$-\frac{1}{8}\int(1-\sin^2 2x)\frac{d\sin 2x}{2}=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin 2x}{16}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

5.9.4. Інтегрування добутків синусів і косинусів кратних дуг.

При знаходженні інтегралів виду $\int\sin mx\cdot\cos nx\cdot dx$, $\int\sin mx\cdot\sin nx\cdot dx$, $\int\cos mx\cdot\cos nx\cdot dx$ за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],\qquad \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Задача зводиться до інтегрування лінійної комбінації тих же функцій (з другими аргументами).

Приклад: $\int\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right)+\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\right)\right]dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\sin\frac{7x}{12}dx+\frac{1}{2}\int\sin\frac{x}{12}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{7}\cos\frac{7x}{12}-\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{1}\cos\frac{x}{12}+C=-\frac{6}{7}\cos\frac{7x}{12}-6\cos\frac{x}{12}+C.$$

5.10. Інтегрування деяких алгебраїчних ірраціональностей.

5.10.1. Інтеграли виду $\int R(x,\sqrt[n]{x})dx$, де n– натуральне число, $R(x,\sqrt[n]{x})$ – функція, що раціонально залежить від своїх аргументів.

Приклад такої функції: $\frac{3x-\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt[4]{x}}=\frac{3x-(\sqrt[12]{x})^4}{x^2+(\sqrt[12]{x})^3}=R(x,\sqrt[12]{x})$. До такого типу зводяться інтеграли виду: $\int R(x,x^p,x^q,x^r,...)dx$, де p, q, r, … – раціональні числа, так як, якщо n – спільний знаменник чисел p, q, r, …, то підінтегральна функція раціонально залежить від x і $x^{\frac{1}{n}}$. Підстановка $x=t^n$ раціоналізує підінтегральну функцію, тобто зводить її до раціональної функції змінної t.

Приклад: $\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Найменше спільне кратне показників коренів рівне 6, тому використовуємо підстановку:$x=t^6$:

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx=\left|x=t^6;\,dx=6t^5dt\right|=\int\frac{t^3}{t^6-t^4}6t^5dt=6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt=6\int\frac{t^4-1+1}{t^2-1}dt=$$

$$=6\int(t^2+1)dt+6\int\frac{dt}{t^2-1}=2t^3+6t+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

5.10.2. Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де a, b, c, d–сталі, інші параметри раціоналізуються підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$.

Приклад:

$$\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{(1+x)^2}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1-x}{1+x}=t^3,\ 1-x=t^3+xt^3,\ x=\dfrac{1-t^3}{1+t^3}=-1+\dfrac{2}{1+t^3},\\ dx=-\dfrac{6t^2dt}{(1+t^3)^2},\ 1+x=\dfrac{2}{1+t^3};\end{array}\right|=-\frac{6}{4}\int t(1+t^3)^2\,\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\int t^3dt=-\frac{3}{8}t^4+C=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4}+C.$$

5.10.3. Тригонометричні підстановки для інтегралів виду $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

1. $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ раціоналізується підстановкою $x = a\sin t$ (або $x = a\cos t$).

2. $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\cdot dx$ раціоналізується підстановкою $x=\dfrac{a}{\sin t}$ (або $x=\dfrac{a}{\cos t}$, або $x=a\,\mathrm{ch}\,t$).

3. $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ раціоналізується підстановкою $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ (або $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$, або $x = a\,\mathrm{sh}\,t$).

Приклад: $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Інтеграл виду $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\cdot dx$, підстановка $x=\mathrm{ctg}\,t$. $\mathrm{ctg}^2 t+1=\dfrac{1}{\sin^2 t}$, $dx=-\dfrac{dt}{\sin^2 t}$,

тому $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx=\int(-\sin t)\left(\frac{1}{\sin^2 t}-\mathrm{ctg}\,t\right)dt=$

$$=\int(-\sin t)\left(\frac{1}{\sin^2 t}-\mathrm{ctg}\,t\right)dt=\int\cos t\,dt-\int\frac{dt}{\sin t}=\sin t-\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right|+C=\sin t+\ln\left|\mathrm{ctg}\frac{t}{2}\right|+C=$$

$$=\sin(\mathrm{arcctg}\,x)+\ln\left|\mathrm{ctg}\frac{\mathrm{arcctg}\,x}{2}\right|+C.$$

Приклад:

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}=\left|x=\frac{1}{\cos t},\ dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt,\ x^2-1=\frac{1}{\cos^2 t}-1=\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}=\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right|=\int\frac{\cos t\,dt}{1+2\cos^2 t}=$$

$$=\int\frac{d\sin t}{3-2\sin^2 t}=-\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{d\sqrt2\sin t}{2\sin^2 t-3}=-\frac{1}{2\sqrt2\cdot\sqrt3}\ln\left|\frac{\sqrt2\sin t-\sqrt3}{\sqrt2\sin t+\sqrt3}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt2\sin t+\sqrt3}{\sqrt2\sin t-\sqrt3}\right|+C=$$

$$=\left|\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\cos t\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right|=\frac{1}{2\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt{2(x^2-1)}+\sqrt3x}{\sqrt{2(x^2-1)}-\sqrt3x}\right|+C.$$

Вправи для самостійного розв'язування

1. $\int \frac{x^3-2\sqrt{x}-4x}{\sqrt[3]{x}}dx$

2. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx$

3. $\int \frac{(2+\sqrt{x})(x^2+5)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

4. $\int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}dx$

5. $\int \left(2+\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$

6. $\int \left(\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}\right)dz$

7. $\int \left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$

8. $\int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt[5]{x}}{x^3}dx$

9. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x}}dx$

10. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

11. $\int \frac{(x^2-4x)^3}{3x^5}dx$

12. $\int \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

13. $\int \frac{(x-3)(x+3)}{x^3-9x}dx$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+tg^2x}}$

15. $\int \frac{dx}{9+2x^2}$

16. $\int \frac{dx}{8+5x^2}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}$

19. $\int (3\sin 2x-2\cos x)dx$

20. $\int (x^3+3x^2-2x+1)dx$

21. $\int (2\sin x-\cos x)dx$

22. $\int (x-1)^2 e^x dx$

23. $\int (2^x+3^x-\cos x+\sin x)dx$

24. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$

25. $\int \sin 6x dx$

26. $\int ctg^2 x dx$

27. $\int \sin^3 x\cos x dx$

28. $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$

29. $\int ctgx dx$

30. $\int e^{\sin x}\cos x dx$

31. $\int (\cos 3x+4)dx$

32. $\int \sqrt{3+\sin 5x}\cos 5x dx$

33. $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$

34. $\int \left(x^4+\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

35. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$

36. $\int \left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

37. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x}dx$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$

39. $\int\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 dx$

40. $\int\cos^3\frac{x}{2}dx$

41. $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

42. $\int\frac{2x^4-2x^2-3}{1+x^2}dx$

43. $\int 4^x\left(3+\frac{4^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$

44. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$

45. $\int\frac{x^5+x^3+x^2+3}{1+x^2}dx$

46. $\int\frac{x^2+3}{1+x^2}dx$

47. $\int\frac{5tg^2x-3}{\sin^2 x}dx$

48. $\int\frac{3x^7+1}{x^4}dx$

49. $\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

50. $\int\frac{dx}{5x+2}$

51. $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

52. $\int\frac{arctg^3x}{1+x^2}dx$

53. $\int\frac{e^{3x}+e^{2x}+1}{e^x+1}dx$

54. $\int\frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

55. $\int\frac{3x^2}{x^3+1}dx$

56. $\int\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

57. $\int\sqrt{3x+4}dx$

58. $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$

59. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$

60. $\int\frac{\cos 3x}{\sqrt{2+5\sin 3x}}dx$

61. $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$

62. $\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$

63. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$

64. $\int x\ln xdx$

65. $\int x^2\sin xdx$

66. $\int(x^2+4x+2)\ln xdx$

67. $\int x^2e^{-x}dx$

68. $\int arctg\sqrt{5x-1}dx$

69. $\int(x^2+2x)\sin xdx$

70. $\int x^2\ln xdx$

71. $\int xe^{3x}dx$

72. $\int\ln(1+x^2)dx$

73. $\int x\ln(3x+1)dx$

74. $\int\cos(\ln x)dx$

75. $\int(x^2+3x+3)\ln xdx$

76. $\int x^2e^xdx$

77. $\int(x+1)^2e^{-x}dx$

78. $\int x\sin 2xdx$

79. $\int x\cos 3xdx$

80. $\int x^2arctgxdx$

81. $\int(x^3+1)\cos xdx$