Розділ 6 Визначений інтеграл

6.1. Сумування нескінченно малих.

Нехай задана неперервна функція на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ – її будь-яка первісна.

Розіб’ємо відрізок $[a; b]$ на n частин і утворимо різницю

$$F(b) - F(a) \tag{6.1}$$

значень первісної на кінцях заданого відрізку $[a; b]$.

Різниця (6.1) дорівнює сумі таких же різниць, складених для тих відрізків, на які розбито відрізок $[a; b]$, тобто

$$F(b)-F(a)=[F(x_1)-F(a)]+[F(x_2)-F(x_1)]+\ldots+[F(x_i)-F(x_{i-1})]+\ldots+[F(b)-F(x_{n-1})] \tag{6.2}$$

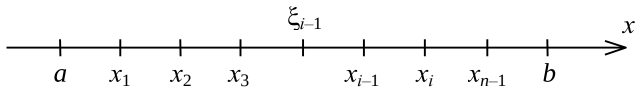


Рис. 6.1

З теореми Лагранжа про кінцевий приріст маємо рівність

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})F'(\xi_{i-1}).$$

де $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}]$.

Позначивши $x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1}$ і враховуючи, що

$$F'(\xi_{i-1}) = f(\xi_{i-1})$$

рівність (6.2) перепишемо у вигляді:

$$F(b) - F(a) = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} \tag{6.3}$$

Рівність (6.3) справедлива тільки при значеннях $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, що задовольняють теорему Лагранжа. Але якщо необмежено збільшувати число розбиттів n відрізка $[a; b]$, так що довжина відрізка Δx_{i-1} прямує до нуля, рівність (6.3) буде виконуватись і різниця $F(b)$–$F(a)$ буде сумою нескінченного числа спадаючих доданків:

$$\lim_{n\to\infty}[\, f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n\,] = F(b) - F(a) \tag{6.4}$$

Рівність (6.3) справедлива не тільки при певному виборі точок $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, але і при будь-якому їх виборі.

Тому формула (6.4) є *формулою сумування нескінченно малих, відкрита Лейбніцем і Ньютоном.*

6.2. Поняття визначеного інтеграла. Перший підхід.

Означення. Сума

$$\delta = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

називається *інтегральною сумою* або *сумою Рімана*.

Означення. Кінцева границя I суми δ при $\lambda = \max_i \Delta x_i \to 0$ називається *визначеним інтегралом* суми $f(x)$ на відрізку [a; b] і позначається:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \Theta = \int_a^b f(x)dx \ , \tag{6.5}$$

де a, b– нижня та верхня межа інтегрування,$\int$– знак інтеграла, введений Г. Лейбніцем. У випадку існування границі I функція $f(x)$ називається *інтегрованою на проміжку* [a; b]. Лейбніц ввів знак інтеграла$\int$ у вигляді витягнутої букви S, яка позначає знак сумування.

Вводячи поняття про визначений інтеграл, як про границю інтегральної суми і вводять його позначення, можна рівність (6.5) переписати у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{6.6}$$

Це є відома *формула Лейбніца-Ньютона*, що пов'язує в одне обидва числення: диференціальне і інтегральне.

В інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ буква x називається *змінною інтеграції*, і ця змінна може бути позначена і будь-якою іншою буквою, так що завжди маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(f)dt \ .$$

Зазначимо, що означення визначеного інтеграла може бути застосовано тільки до обмеженої функції.

Теорема (необхідна умова інтегрування). Інтегрована на проміжку [a;b] функція обмежена.

Доведення. Припустимо супротивне: Нехай функція $f(x)$ на проміжку необмежена. Тоді при будь-якому розбитті проміжка на частини – вона зберегла цю властивість хоча б однієї із частин, і за рахунок вибору на цій частині точки ξ можна зробити $f(\xi)$, а з нею і суму δ– скільки завгодно велику; при цих умовах кінцеві границі для δ, існувати не можуть.

6.3. Властивості визначеного інтеграла.

6.3.1. Визначений інтеграл є міра площі.

- Дійсно, інтегральна сума

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{6.7}$$

утворена з добутків виду

$$f(\xi_{i-1})\Delta x_{i-1} \qquad (6.8)$$

Нехай $\xi_{i-1}=x_{i-1}$. Тоді добуток (6.8) зображає площу прямокутника, основою якого є різниця $x_i-x_{i-1}=\Delta x_{i-1}$, а висотою – ординати $f(x_{i-1})$. Тому інтегральна сума (6.7) є сума площин таких прямокутників або площа східчастої фігури, вписаної в криволінійну трапецію *AabB*, обмежену кривою $y=f(x)$ (рис. 6.2).

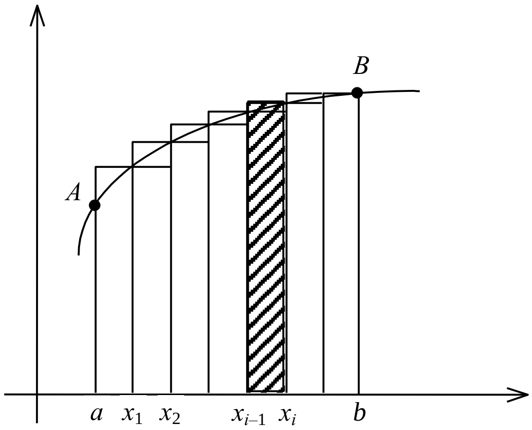


Рис. 6.2

Внаслідок цього площа криволінійної трапеції *AabB* більше інтегральної суми (6.7). Але якщо вибрати за точки $\xi_i(i = 0, \ldots, n-1)$ праві кінці відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, то одержимо *описану* навколо криволінійної трапеції *AabB*. Тому площа криволінійної трапеції *AabB*. Тому площа криволінійної трапеції *AabB* була б декілька меншою інтегральної суми (8.7).

Границя інтегральної суми (6.7) при будь-якому виборі точок ξ_iі при $\lambda=\max\Delta x_i\to 0$ за означенням є визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже, робимо *висновок: Визначений інтеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *дорівнює площі криволінійної трапеції*.

6.3.2. При переставленні границь, визначений інтеграл змінює знак, не змінюючи абсолютної величини.

- Приймаючи, що $a<b$ і що $a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b$ матимемо, за означенням:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi)(x_i - x_{i-1}).$$

Якщо переставимо границі інтегрування a і b, то будемо розглядати вже відрізок $[b; a]$ і беручи ті ж самі точки розбиття, матимемо відрізки $[x_{i-1}; x_{i-1}]$, а не $[x_{i-1}; x_i]$. Отже:

$$\int\limits_b^a f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\left[(x_i - x_{i-1}\right] = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Тому

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx. \qquad (6.9)$$

Зауваження. Цю властивість можна також довести за формулою Ньютона-Лейбніца, яка справедлива за будь-яких a і b. Зокрема, вона буде справедлива, якщо число a замінити на b, а число b числом a. Тому

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

Звідси маємо формулу (8.9).

Наслідок. $\int_a^b f(x)dx = 0$.

- Дійсно, покладаючи в формулі $a = b$, одержуємо a

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(a) = 0\ .$$

6.3.3. Ділення відрізка інтегрування.

Нехай точка $c \in [a;\ b]$, то $F(x)$ – буде первісною і для функції $f(x)$ для відрізків $[a;\ c]$ і $[c;\ b]$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца, матимемо:

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(b),$$

$$\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c).$$

Отже

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (6.10)$$

Геометрична інтерпретація:

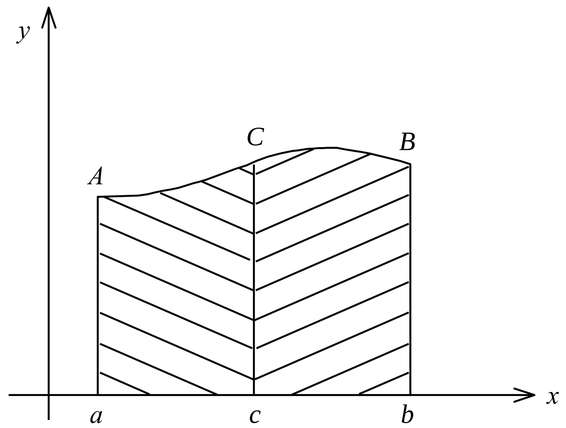


Рис. 6.3.

Площа криволінійної трапеції $AabB$ дорівнює сумі площ криволінійної трапеції $AacC$ і $CcbB$ (рис. 6.3).

6.3.4.Знак визначеного інтеграла.

Якщо

$$f(x) > 0 \text{ для } x \in (a;\ b),\ a < b,$$

то $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$. Якщо $f(x)>0$, $a>b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx < 0$. Якщо $f(x)<0$ для $x\in(a;\ b)$, $a<b$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx < 0$.

- За означенням визначений інтеграл є границя інтегральної суми:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

У випадку $f(x)>0$, $a<b$ доданки $f(\xi_i)\Delta x_i$ інтегральної суми має додатне значення, бо обидва множники $f(x_{i-1})$ і Δx_{i-1}, додатні.

Якщо, $a>b$, то хоча $f(x_{i-1}) > 0$, множник Δx_{i-1} від'ємний, бо

$$\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1} \text{ і } a>x_1>x_2> \ldots >x_{i-1}>x_i> \ldots >b.$$

Розглядаючи доданки $f(x_{i-1})\Delta x_{i-1}$ інтегральної суми, матимемо, що множник $f(\xi_i)<0$, множник Δx_{i-1} додатній, бо $a<b$.

Геометрична інтерпретація:

1. Площа кривої має різні знаки по різні сторони кожної межі інтегрування *a*. (Рис. 6.4).

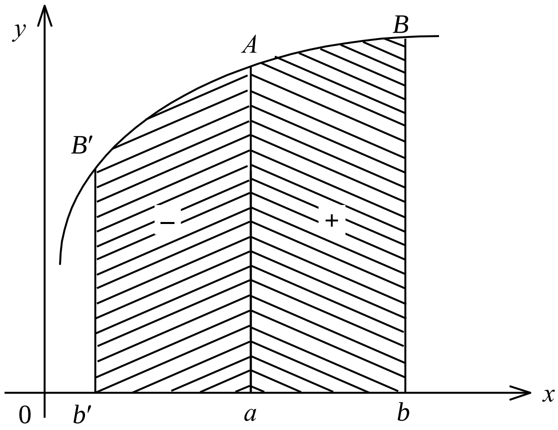


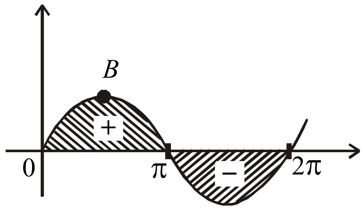
Рис. 6.4

2. Площі кривих, розташованих над віссю абсцис, вважаються додатними, а площі кривих, розташованих під віссю абсцис, – від'ємними (рис. 6.5).

Рис. 6.5

Знайти суму площин двох сусідніх хвиль синусоїди

- $\int\limits_0^{2\pi} \sin x dx = (-\cos)\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$



6.3.5. Якщо $\varphi(x) > \psi(x)$ для $x \in (a; b)$, $a < b$, то

$$\int\limits_a^b \phi(x)dx > \int\limits_a^b \psi(x)dx .$$

- Дійсно, визначимо знак різниці:

$$\int\limits_a^b \phi(x)dx - \int\limits_a^b \psi(x)dx = \int\limits_a^b (\phi(x) - \psi(x))dx .$$

6.3.6. Визначений інтеграл суми функцій розбивається на алгебраїчну суму інтегралів.

$$\int\limits_a^b \left[f(x) + \psi(x) \right] dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b \psi(x)dx \qquad (6.11)$$

- Розглянемо інтегральну суму

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) + \psi(\xi_i))\Delta x_i ,$$

яку в силу дистрибутивності можна розкласти на дві суми

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=n}^{n-1} \psi(\xi_i)\Delta x_i .$$

Переходячи до границі при $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i \to 0$ матимемо:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) + \psi(\xi_i))\Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=n}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{x \to 0} \sum_{i=n}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

тобто виконує рівність (7.11).

6.3.7. Сталий множник виноситься за знак визначеного інтеграла.

$$\int\limits_a^b const f(x)dx = const \int\limits_a^b f(x)dx \qquad (6.12)$$

- Згідно означення визначеного інтегралу

$$\int\limits_a^b const f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} const \\ f(\xi_i) \end{pmatrix} \Delta x_i$$

Але в інтегральній сумі сталий множник можна винести за знак суми

$$\sum_{i=0}^{n-1} constf(\xi_i)\Delta x_i = const\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Переходячи до границі, матимемо

$$\ln\sum_{i=n}^{n-1} constf(\xi_i)\Delta x_i = const\ln\sum^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

6.3.8. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a; b]$ і $a < b$, тоді

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (6.13)$$

- Рівність (6.13) легко одержується, якщо безпосередньо перейти до границь, в нерівності для інтегральних сум

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\Delta x_i .$$

6.3.9. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a; b]$, де $a<b$, і якщо на цьому проміжку має нерівність

$$m \le f(x) \le M ,$$

то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (6.14)$$

- Рівність (6.14) одержимо, якщо безпосередньо перейдемо до границь в нерівності

$$m\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \le M\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i$$

і враховуючи, що $\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = b-a$.

Теорема про середнє значення. Нехай $f(x)$ – інтегровна на $[a; b]$ функція і нехай на всьому проміжку $m \le f(x) \le M$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \qquad (6.15)$$

де $m \le \mu \le M$.

Доведення. Якщо $a<b$, то за властивістю 6.14 будемо мати:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

звідси

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M .$$

Якщо $a > b$, то проводимо ті ж самі пояснення, а потім приходимо до рівності (6.15).

Випадок неперервності функції $f(x)$.

Якщо вважати числа m і M – найбільшим і найменшим значеннями функції (вони існують за теоремою Вейєрштрасса), то проміжне значення μ, за теоремою Больцано-Коші, функція $f(x)$ приймає в деякій точці c проміжка $[a; b]$.

Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c), \quad c \in [a;b]$$

Геометрична ілюстрація.

Нехай $f(x) \geq 0$. Розглянемо криволінійну фігуру $ABCD$ (рис. 6.6) під кривою $y = f(x)$. Тоді площа криволінійної фігури (що виражена визначеним інтегралом) дорівнює площі прямокутника з основою AB і висотою LM.

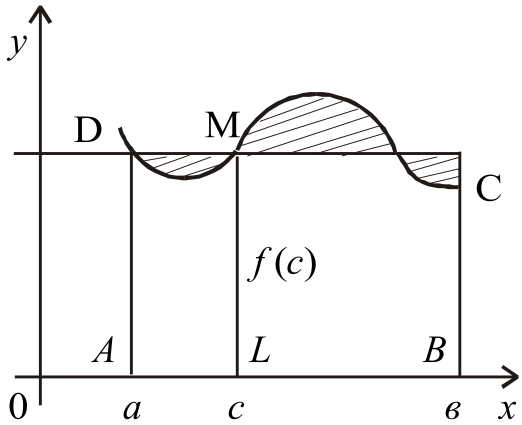


Рис. 6.6

6.3.10.Узагальнена теорема про середнє значення.

Нехай: 1) $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні в проміжку $[a; b]$;

2) $m \leq f(x) \leq M$;

3) $g(x) \geq 0$ [або $g(x) \leq 0$].

Тоді

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \text{ де } m \leq \mu \leq M. \quad (6.16)$$

Доведення. Не порушуючи загальності покладемо $g(x) \geq 0$ і $a < b$; тоді матимемо:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Із цієї нерівності отримаємо

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx \quad (6.17)$$

Із-за того, що $g(x) \geq 0$, матимемо:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6.4. Визначений інтеграл як функція верхньої межі.

Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на проміжку $[a;\ b]$, то вона інтегровна і на проміжку $[a;\ x]$, де $x \in [a;\ x]$. Замінюючи межу b у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ змінної x, отримаємо вираз:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{6.18}$$

який є функцією від x.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на $[a;\ b]$, то функція $\Phi(x)$ буде неперервною від на тому ж проміжку.

Доведення. Надамо змінній x приріст Δx так щоб значення $x + \Delta x$ не виходимо за межі розглядаємо проміжку. Отримаємо нове значення функції (6.18):

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \tag{6.19}$$

Віднімемо із рівності (6.19) рівність (6.18):

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \tag{6.19*}$$

Застосуємо до рівності (6.19*) теорему про середнє значення:

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \mu \Delta x,$$

де $\mu \in [m', M']$, $m' = \sin\limits_{[x,\, x+\Delta x]} f(x)$,

$$M' = \sup_{[x,\, x+\Delta x]} f(x).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) \to 0 \ \text{ або } \ \Phi(x+\Delta x) \to \Phi(x),$$

що доводить неперервність функції $\Phi(x)$.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці $t = x$, то в цій точці функція $\Phi(x)$ має похідну, рівну $f(x)$:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Доведення: Дійсно, із (6.18) матимемо

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \mu, \text{ де } m' \le \mu \le M'$$

Функція $f(x)$ неперервна при $t = x$, отже, за будь-яким $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що при $|\Delta x| < \delta$:

$$f(x) - \varepsilon < f(x) < f(x) + \varepsilon$$

для усіх значень t на проміжку $[x;\ x + \Delta x]$. В такому випадку мають місце нерівності:

$$f(x) - \varepsilon \le m' \le \mu \le M' \le f(x) + \varepsilon.$$

так що

$$|\mu - f(x)| \le \varepsilon$$

Як то, що

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mu = f(x)$$

Ми отримали висновок який має принципове значення:

Для неперервної на проміжку [a; b] функції y = f(x) завжди існує первісна прикладом її є визначений інтеграл (6.17) *зі змінною верхньою межею.*

6.5. Поняття визначеного інтеграла. Другий підхід.

Нехай на відрізку [a; b] задана обмежена функція $y = f(x)$. Розглянемо розбиття T відрізка [a; b] точками ділення:

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

на кожному відрізку розбиття [x_k; x_{k+1}] знайдемо нижню і верхню межу значень функції $y = f(x)$ відповідно m_k і M_k:

$$m_k = \inf_{x \in [x_k,\, x_{k+1}]} f(x),$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_k,\, x_{k+1}]} f(x).$$

Означення. Дві суми $S_D = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ і $S_D = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ **,** якщо$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$відповідно називаються *нижньою і верхньою сумами Дарбу*.

Властивості сум Дарбу:

1. Для кожного розбиття T виконується нерівність:

$$S_D \le S_D$$

2. Якщо розбиття D_2 одержується із розбиття D_1 додаванням декількох нових точок, то $S_{D_1} \le S_{D_2}$, $S_{D_1} \ge S_{D_2}$, тобто при зменшенні розбиття нижні суми Дарбу можуть тільки збільшитися, а верхні суми тільки зменшаться.

3. Для будь-яких розбиттівD_1 і D_2 виконується нерівність

$$S_{D_1} \le S_{D_2},$$

тобто будь-яка нижня сума Дарбу не перевищує будь-якої суми.

Означення. Функція $y = f(x)$, обмежена на відрізку називається *інтегровною на цьому відрізку*, якщо існує єдине число I, що розділяє множини нижніх і верхніх сум Дарбу для будь-яких розбиттів відрізка [a; b]. Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на відрізку [a; b], то єдине число, що розділяє ці дві множини, називаються *визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ по відрізку [a; b] і позначають наступне:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Розглянемо функцію Діріхле. Розглянемо функцію Діріхле $y = D(x)$ на відрізку [0; 1]:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x - \text{ірраціональне;} \\ 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне.} \end{cases}$$

Ця функція є типовим прикладом *обмеженої неінтегровної функції*.

Дійсно, візьмемо будь-яке розбиття T, у будь-якому відрізку розбиття $[x_k; x_{k+1}]$ обов'язково містяться як раціональні так і ірраціональні точки, отже для будь-якого відрізка $\Delta_k : m_k = 0$, $M_k = 1$. Тоді всі нижні суми Дарбу $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta X_k = 0$, оскільки усі $m_k = 0$, і усі верхні суми Дарбу $\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = 1$ або $\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1\Delta x_n = 1-$ довжина відрізка [0; 1].

Таким чином, множина нижніх сум містить одне число $X = \{0\}$ і множина верхніх сум містить одне число $Y = \{1\}$, таким чином, що будь-яке число із відрізка [0; 1] розділяє множину X і Y. Значить, функція Діріхле не є інтегровною на відрізку [0; 1].

Теорема (критерій інтегровності). Для того щоб функція $y = f(x)$ визначена і обмежена на відрізку $[a; b]$, була інтегровною на цьому відрізку необхідно і достатньо щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало розбиття T таке, що $S_D - S_D < \varepsilon$.

Доведення. Достатність очевидна: покладемо $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, отримаємо систему відрізків, що стягуються $[S_{2n}; S_{2n}]$, яка і буде єдиним розділяючим числом.

Нехай, навпаки, відомо, що розділяюче число єдине. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ в інтервал $(I - \varepsilon/2;\ I + \varepsilon/2)$ довжини ε попадають точки із $\{S_D\}$ і $\{S_D\}$. Отже, знайдуться розбиття T і T_2такі, що

$$S_D^{T_1} - SJ_D^{T_1} < \varepsilon .$$

Візьмемо за T розбиття яке включає точки із T_1 і із T_2. Тоді за властивістю сум Дарбу матимемо:

$$S_D^{T_1} \le S_D^{T_1},\ S_D^{T} \ge S_D^{T_2} .$$

Звідси

$$S_D^{T} - S_D^{T} < \varepsilon \tag{6.20}$$

Означення. Різниця $M_k - m_k$ називається *коливанням функції*$f(x)$ на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ і позначаєтьсяω_k.

З урахуванням означення нерівність (6.20) можна переписати наступним чином:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \tag{6.21}$$

6.6. Інтегровність неперервної функції.

Теорема. Функція неперервна на відрізку $[a; b]$ інтегровна на цьому відрізку.

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon < 0$.

За властивістю рівномірної неперервності знайдеться таке розбиття T відрізка $[a; b]$, що для всіх відрізків розбиття буде виконуватись нерівність $\omega_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon .$$

Це означає інтегровність функції на відрізку $[a; b]$.

6.7. Основна формула інтегрального числення.

Відомо, що для неперервної на проміжку [a; b] функції $f(x)$ інтеграл

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

є первісною. Якщо $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$ функція, то

$$\Phi(x)=F(x)+C.$$

Сталу C можна визначити, якщо покласти $x = a$ або $\Phi(a) = 0$. Будемомати

$$0 = \Phi(a) = F(x) + C, \text{ звідси} C = -F(x)$$

Остаточно,

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Зокрема при $x = b$, отримаємо

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \text{ або}$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b F(b)-F(a) \qquad (6.22)$$

де $F'(x)=f(x)$.

Це – *формула Ньютона-Лейбніца* – основна формула інтегрального числення.

За допомогою формули (6.22) встановлюється зв'язок між теоремами про середнє в диференціальному і інтегральному численні.

1. $\int_a^b \sin xdx=-\cos x\Big|_a^b=\cos a-\cos b$.

2. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0, \quad (n\neq m)$.

6.8. Формули зведення. Формула інтегрування частинами.

Основна формула інтегрального числення може в деяких випадках зразу давати значення визначеного інтегралу. З іншого боку, за її допомогою різні формули зведення в теорії невизначених інтегралів перетворюються в аналогічні формули вже в визначених інтегралах, що дозволяє обчислення одного інтеграла зводити до обчислення другого більш простого інтеграла.

Загальна форма формул зведення має вигляд:

$$\int f(x)dx=\phi(x)-\int g(x)dx \qquad (6.23)$$

Якщо областю застосування подібної формули є проміжок [a; b], то її у визначених інтегралах відповідає формула

$$\int_a^b f(x)dx=\phi(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)dx \qquad (6.24)$$

де функції f і g - неперервні

Дійсно, позначимо інтеграл $\int g(x)dx$ через $\Phi(x)$:

$$\int g(x)dx = \Phi(x).$$

Тоді за основною формулою матимемо:

$$\int_a^b f(x)dx = [\phi(x) - \Phi(x)]\Big|_a^b = \phi(x)\Big|_a^b - \Phi(x)\Big|_a^b$$

Але

$$\int_a^b g(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

тому приходимо до формули (8.24).

Зокрема, формула інтегрування частинами приймає вигляд:

$$\int_a^b udu = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (6.25)$$

а узагальнена формула переходить в таку:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \Big[uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + ... + (-1)^n u^{(n)}v\Big]\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}vdx \qquad (6.26)$$

Формула (6.24) встановлює відношення між *числами* і вона простіша формули (6.23), яка встановлює відповідності між *функціями*.

[redacted] Обчислити інтеграл $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx$.

За формулою (6.26) матимемо:

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx = \left| \begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin xdx \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x \\ v = \int \sin xdx = -\cos x \end{array} \right| = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 xdx =$$

$$= 0 + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2)dx = (n-1)\left[\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} xdx - \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n xdx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\right..$$

Звідси матимемо рекурентну формулу

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \text{ або}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (6.27)$$

За допомогою формули (6.27) інтеграл I_n послідовно зводиться до інтегралу I_0 або I_1.

Якщо n– парна степінь ($n = 2k$), то матимемо:

$$I_{2k} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2k} xdx = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k\cdot(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Якщо n– непарна степінь ($n = 2k + 1$), то матимемо:

$$I_{2k+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x dx = \frac{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 3\cdot 1}.$$

Отже

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ — парна} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{при } n \text{ — непарна} \end{cases} \qquad (6.28)$$

6.9. Формула змінної у визначеному інтегралі.

Основна формула інтегрального числення дозволяє встановити правило заміни змінної у визначеному інтегралі.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – неперервна на проміжку $[a; b]$ функція.

Покладемо $x = \varphi(t)$ і вважаємо, що функція $\varphi(t)$ задовольняє умовам:

1. $\varphi(t)$ визначена і неперервна в деякому проміжку $[\alpha; \beta]$;
2. $\varphi(t) \in [a; b]$ коли $t \in [\alpha; \beta]$;
3. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
4. існує неперервна похідна $\varphi'(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$.

Тоді має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (6.29)$$

Дійсно, ми признаємо, що підінтегральні функції неперервні, тому існують не тільки ці визначені інтеграли, але й відповідні їм невизначені, і в обох випадках можна застосувати основну формулу.

Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то $F(\varphi(t))$ первісна для функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Зауваження. Важлива особливість формули (6.29): при обчисленні невизначеного інтеграла за допомогою заміни змінної отримуючи шукану функцію, що виражена через t, ми обов'язково повертаємося до старої змінної t, але у випадку визначеного інтегралу, в цьому немає потреби. Якщо обчислений другий із визначених інтегралів, який є числом, то це означає що обчислений і перший.

Знайдемо інтеграл $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$.

$$\bullet \quad \int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 5\sin t \\ dx = 5\cos t dt \\ \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \\ = \sqrt{25-25\sin^2 t} = \\ = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = \sqrt{25\cos^2 t} = 5|\cos t| \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 5 \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \\ \text{Коли } t\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \ \cos t \text{ — приймає} \\ \text{додаткові значення, тому } |\cos t| = \cos t \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 5\cos t \cdot 5\cos t dt = 25\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{25}{5}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt - \frac{25}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi \cdot 25}{4} .$$

6.10. Обчислення визначених інтегралів за допомогою властивостей підінтегральних функцій.

Істотні спрощення обчислень можливі при знаходженні інтегралів від парних, непарних, періодичних функцій:

1. Якщо $f(x)$ – парна функція, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
2. Якщо $f(x)$ – непарна функція, то $\int_b^a f(x)dx = 0$.
3. Якщо $f(x)$ – періодична з періодом T функція $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx \ \ (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ ...)$.

Знайти $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$$\bullet \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\| \begin{array}{c} \text{підінтегрльна функція} \\ \text{парна, бо } x\arcsin x \text{ є добуток} \\ \text{двох непарних функції} \end{array} \right\| =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t, \\ x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{6} \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^{\pi/6} \frac{\sin t\cdot t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot \cos t\,dt = 2\int_0^{\pi/6} t\sin t\,dt = \left\| \begin{array}{c} \text{за формулою} \\ \text{інтегрування частинами} \\ \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \end{array} \right\| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = t \\ \sin t\,dt = dv \\ v = \int \sin t\,dt = -\cos t \\ du = dt \end{array} \right| = 2\left(-t\cos t\Big|_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6} \cos t\,dt = -\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \sin t\Big|_0^{\pi/6} \right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 \right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \right) = \frac{6-\pi\sqrt{3}}{6}$$

[redacted] Знайти $\int_{-5}^{5} \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\,dx$

- $$\int_{-5}^{5} \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\,dx = \left\| \begin{array}{l} \text{підінтегрльна функція} \\ \text{непарна, бо} \\ f(x) = \dfrac{(-x)^3\sin^2(-x)}{(-x)^4+2(-x)^2+1} = \\ = -\dfrac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1} = -f(x) \end{array} \right\| = 0$$

[redacted] Знайти $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx$

- $$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx = \left\| \begin{array}{l} \text{подінтегральна функція періодична,} \\ \textit{тому можна із верхньої і нижньої} \\ \textit{меж інтегрування відняти } \pi \end{array} \right\| =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x(1+\mathrm{tg}^4 x)}\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x(1+\mathrm{tg}^4 x)}\,dx =$$

$$=2\int_0^1 \frac{tdt}{1+t^4}=\left|\begin{array}{l} t^2=z \\ dt^2=dz \\ 2tdt=dz \\ tdt=\dfrac{1}{2}dz \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 1 \\ \hline z & 0 & 1 \end{array} \end{array}\right| = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2}=\int_0^1 \frac{dz}{z^2+1}=\operatorname{arctgz}\Big|_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}..$$

[redacted] Знайти $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

$$\bullet\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left\|\begin{array}{l} \text{невизначений інтеграл } \displaystyle\int\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} \\ \text{не виражається в елементарних} \\ \text{функціях, але визначений можна} \\ \text{обчислити штучним шляхом} \end{array}\right\| =$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left\|\begin{array}{l} \text{в другому інтгралі} \\ \text{покладаємо } x=\pi-t \\ \text{тоді } dx=-dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & \pi/2 & \pi \\ \hline t & \pi/2 & 0 \end{array} \end{array}\right\| =$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin dx}{1+\cos^2 x}-\int_{\pi/2}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin xdx}{1+\cos^2 x}+\int_0^{\pi/2}\frac{(\pi-t)\sin tdt}{1+\cos^2 t}=$$

$$\underbrace{\int_0^{\pi/2}\frac{x\sin xdx}{1+\cos^2 x}-\int_0^{\pi/2}\frac{t\sin tdt}{1+\cos^2 t}}_{\substack{\text{(визначений інтеграл не залежить} \\ \text{від позначення змінної} \\ \text{інтегрування)}}}+\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin tdt}{1+\cos^2 t}=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\sin tdt}{1+\cos^2 t}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} \cos t=z \\ d\cos t=dz \\ -\sin dt=dz \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \pi/2 \\ \hline z & 1 & 0 \end{array} \end{array}\right| = \pi\int_0^1\frac{dz}{1+z^2}=\pi arctgz\Big|_0^1=\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{4}\ .$$

6.11. Геометричне застосування визначеного інтеграла.

6.11.1. Обчислення площі в прямокутних координатах.

1. Якщо на відрізку [a; b] функція $f(x) \geq 0$ то, площа криволінійної трапеції, обмеженою кривою 0, то площа криволінійної трапеції, обмеженою кривою $y = f(x)$, віссю OX і прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює:

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{6.30}$$

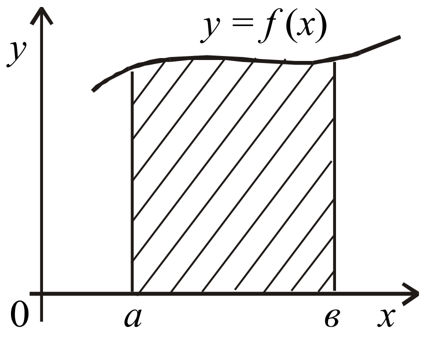


Рис. 6.7

2. Якщо треба обчислити площу фігури, що обмежена кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \geq f_2(x)$ ординати $x = a$ і $x = b$, то матимемо

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \tag{6.31}$$

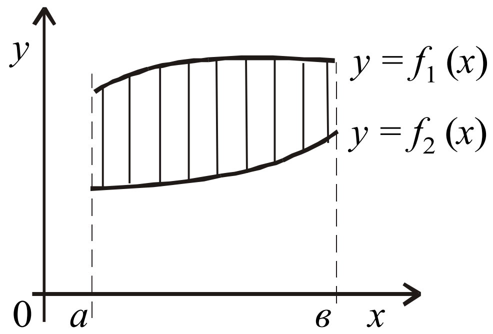


Рис. 6.8

Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt[4]{x}$ і $y = x^4$.

- Знаходимо точки перетину кривих

$$\sqrt[4]{x} = x^4 \Rightarrow x = x^{16} \text{ отже } x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

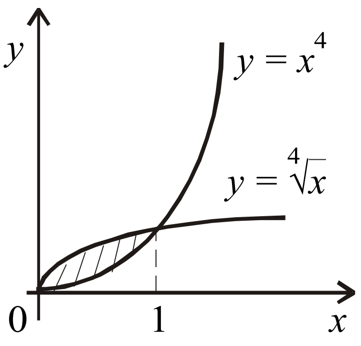


Рис.6.9

Отже, за формулою (6.31):

$$S=\int_0^1(\sqrt[4]{x}-x^4)dx=\left(\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}\ .$$

3. Якщо крива задана рівняннями в параметричній формі

$$x=\phi(t)\ \text{ і }\ y=\psi(t),\ \ \alpha\le t\le\beta\ ,\ \ \begin{array}{l}\phi(\alpha)=a,\\ \phi(\beta)=b,\end{array} \tag{6.32}$$

то площа криволінійної фігури обчислюється за формулою

$$S=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt \tag{6.33}$$

Дійсно, нехай рівняння (6.32) визначають деяку $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і отже, площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx\ \text{ або}$$

$$\int_a^b y(x)dx=\left|\begin{array}{c} x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b\\ \hline t & \alpha & \beta\end{array}\\ y(x)=y(\varphi(t))=\\ =f(\varphi(t))=\\ =\psi(t)\end{array}\right|=\int_\alpha^\beta\psi(t)\varphi'(t)dt\ .$$

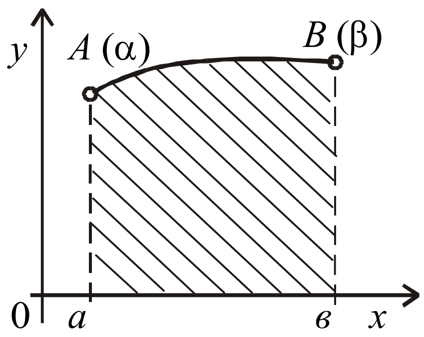


Рис. 6.10

Обчислити площу фігури, що обмежена віссю OX і однієї аркою циклоїди $x = 5(t - \sin t)$, $y = 5(1 - \cos t)$.

- За формулою (6.33)

$$S = \int_0^{2\pi} 5(1-\cos t)5(1-\cos t)dt = 25\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= 25\left[\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t dt = 25\left[2\pi - 0 + \pi\right] = 25\cdot 3\pi = 75\pi.\right.$$

6.11.2. Довжина дуги кривої.

I. Довжина дуги кривої в прямокутних координатах. Нехай в прямокутних координатах на площині задана крива рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ і $f'(x)$ – неперервні на відрізку $[a; b]$ функції.

Знайдемо довжину дуги AB цієї кривої, що заключена між вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 6.11).

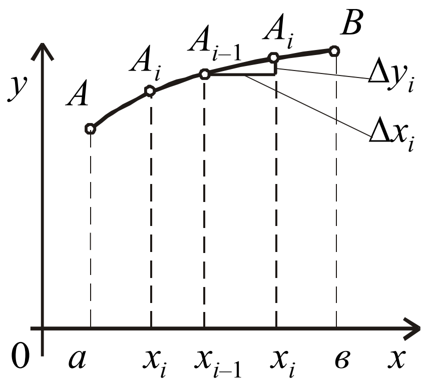


Рис. 6.11

Нагадаємо означення дуги кривої.

Візьмемо на дузі AB точки $A, A_1, A_2, \ldots, B$ з абсцисами $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ і проведемо хорди AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$, довжини яких позначимо відповідно $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots \Delta l_n$. Тоді отримаємо ламану $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}B$, вписану в другу AB. Довжина ламаної дорівнює $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Означення. *Довжиною l дуги AB* називається границя, до якої прямує довжина вписаної ламаної, коли довжина її найбільшого ланки прямує до нуля:

$$l = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \tag{6.34}$$

Довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \tag{6.35}$$

Доведемо формулу (6.35). Введемо позначення $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i\,.$$

За теоремою Лагранжа матимемо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\, f'(\xi_i)\,, \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

Отже,

$$\Delta l_i = \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i$$

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$l_n = \sum_{i-1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i\,.$$

За умовою, $f'(x)$ – неперервна, тому функція $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ теж неперервна. Отже, існує границя написаної інтегральної суми, який дорівнює визначеному інтегралу:

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f''(x)]^2}\,dx$$

Обчислити довжину напівкубічної параболи $y = (x+1)^{3/2}$, $-1 \le x \le 4$.

- За формулою (6.35):

$$l = \int_{-1}^{4} \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,dx = \int_{-1}^{4} \sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{4} \sqrt{9x+13}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}(9x+13)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{4} = \frac{1}{18}(9\cdot 4+13)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{18}(-9+13)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{18}\cdot(49)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{18}(4)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{18}\cdot 7^3 - \frac{1}{18}\cdot 8 = \frac{343}{18} - \frac{8}{18} = \frac{335}{18}\,.$$

ІІ. Довжина дуги кривої у випадку, коли рівняння кривої задано в параметричній формі:

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \tag{6.36}$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервні функції з неперервними похідними, причому $\varphi(t) \neq 0$, $t \in [\alpha;\, \beta]$. У цьому випадку рівняння (6.36) визначають деяку функцію $y = f(t)$ – неперервну і мають неперервну похідну:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Нехай $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тоді зробивши в інтегралі (6.35) підстановку $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dx$, отримаємо:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\cdot\varphi'(t)dt \text{ або}$$

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\psi'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}dt \qquad (6.37)$$

Обчислити довжину дуги астроїди $x = 5\cos^3 t$, $y = 5\sin^3 t$.

- Крива симетрична відносно обох координатних осей, тому обчислюємо спочатку довжину її четвертої частини, розташованої в першої чверті. Знаходимо

$$x'_t=-15\cos^2 t\sin t$$

$$y'_t=15\sin^2 t\cos t.$$

Параметр t буде змінюватися від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Отже:

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{\pi/2}\sqrt{225\cos^4 t\sin^2 t+225\sin^4+\cos^2 t}dt=15\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}dt=$$

$$=15\int_0^{\pi/2}\sin t\cos dt=15\int_0^{\pi/2}\sin t\cos tdt=15\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2}=\frac{15}{2}.$$

Зауваження. Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t) \qquad (6.38)$$

то довжина дуги обчислюється за формулою

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}dt \qquad (6.39)$$

III. Довжина дуги кривої в полярних координатах.

Нехай в полярних координатах задано рівняння кривої

$$\rho = f(\theta), \qquad (6.40)$$

де ρ– полярний радіус, θ– полярний кут.

Напишемо формули переходу від полярних координат до декартових: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Якщо замість ρ підставити вираз (6.40) через θ, то отримаємо рівняння:

$$x = f(\theta)\cos\theta,\quad y = f(\theta)\sin\theta.$$

Ці рівняння можна розглядати як параметричні рівняння кривої і для обчислення довжини дуги застосувати формулу (6.37). Для цього знайдемо похідні від x і y по параметру θ:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta;$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta .$$

Тоді

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [\,f'(\theta)]^2 + [\,f(\theta)]^2 = \rho'^2 + \rho^2$$

Отже,

$$l = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta \qquad (6.41)$$

Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1+\cos\theta)$.

Змінюючи полярний кут θ від 0 до π отримаємо половину шуканої довжини.

$$\rho' = -a\sin\theta .$$

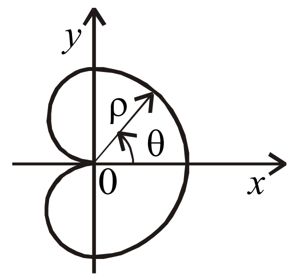


Рис. 6.12

Отже,

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a .$$

IV. Обчислення об'єму тіла по площам паралельних перерізів.

Нехай маємо деяке тіло *T*. Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною перпендикулярної до осі *OX* (рис. 6.13). Ця площа буде залежати від положення площі перерізу, тобто буде функцією від *x*:

$$Q = Q(x).$$

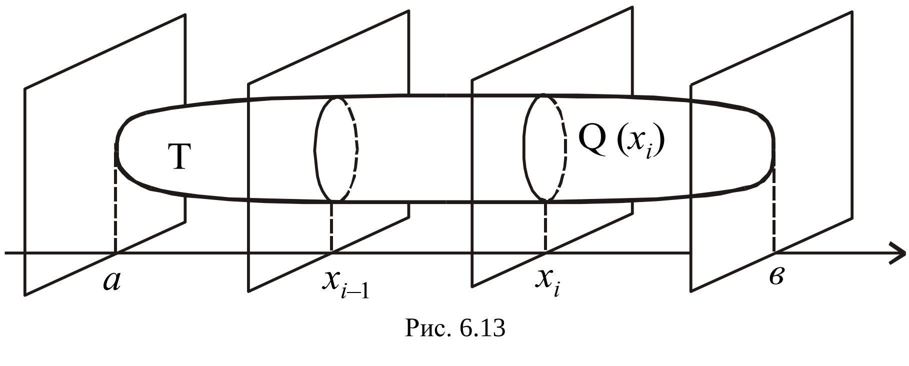


Рис. 6.13

Припустимо, що $Q(x)$ є неперервна функція від x і визначимо об'єм даного тіла. Проведемо площі $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, …, $x_n = b$.

Ці площини розбивають тіло на шари.

В кожному окремому проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ оберемо довільну точку ξ_iі, для кожного значення $i = 1, 2, \ldots, n$, побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна осі OX і напрямна являє собою контур перерізу тіла T площиною $x = \xi_i$. Об'єм такого елементарного циліндра з площиною основи $Q(\xi_i)$ $(x_{i-1} \le x \le x_i)$ і висотою Δx_i дорівнює $Q(\xi_i)\Delta x_i$. Об'єм всіх циліндрів буде:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i$$

Границя цієї суми при $\max x_i \to 0$ (якщо вона існує) називається *об'ємом даного тіла*:

$$V = \lim_{\max \Delta x_1 \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i \qquad (6.42)$$

Сума V_n є *інтегральною сумою* для неперервної функції $Q(x)$ на відрізку $a \le x \le b$, границя (6.42) існує і виражається визначеним інтегралом:

$$V = \int_a^b Q(x)dx \qquad (6.43)$$

V. *Об'єм тіла обертання.*

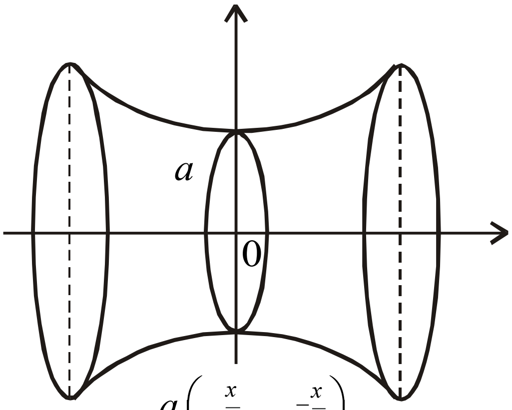
Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі OX криволінійною трапецією $aABb$, обмеженою кривою $y = f(x)$ віссю OX і прямими $x = a$, $x = b$.

В цьому випадку довільний переріз тіла площиною перпендикулярної до осі абсцис, є коло площа якого $Q = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$.

Застосовуючи формулу (6.43), отримаємо формулу для *обчислення об'єма тіла обертання*:

$$v = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad (6.44)$$

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням лінією $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ навколо осі OX на проміжку від 0 до b (рис. 6.14):



$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

Рис. 6.14

- За формулою (6.44):

$$V=\pi\frac{a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=\frac{\pi a^2}{4}\int_0^b\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=\frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^b=$$

$$=\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}}-e^{-\frac{2b}{a}}\right)+\frac{\pi ab}{2}.$$

VI. Площа поверхні тіла обертання.

Нехай задана поверхня, утворена обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі OX. Визначимо площу цієї поверхні на проміжку $a \le x \le b$. Функції $f(x)$, $f'(x)$ негативні для $x \in [a; b]$.

Проведемо хорди $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$ довжини яких позначимо Δl_1, $l_2, \ldots, \Delta l_n$ (рис. 6.15).

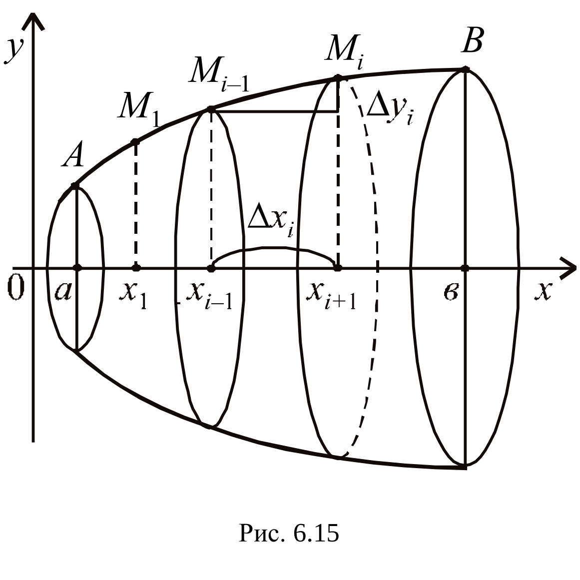


Рис. 6.15

Кожна хорда довжини Δl_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при обертанні описує усічений конус, площа поверхні якого ΔS_i дорівнює:

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Але $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)} \Delta x_i$.

Застосовуючи теорему Лагранжа, отримаємо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \equiv f'(\xi_i)\text{, де}$$

Отже,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i\,,$$

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$$

Площа поверхні, що описана ламаною буде дорівнювати

$$S_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$$

або

$$S_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \tag{6.45}$$

Означення. Границя суми (8.45), коли найбільша ланка ламаної Δl_i прямує до нуля, називається *площею поверхні* обертання.

Сума (6.45) не є інтегральною сумою для функції

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \tag{6.46}$$

бо в доданку, що відповідає відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ є декілька точок цього відрізка $x_{i-1} > x_i > \xi_i$.

Але можна довести, що границя суми (6.45) дорівнює границі інтегральної суми для функції (6.46), тобто:

$$S_{\text{поверхні}} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$$

або

$$S_{\text{поверхні}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \tag{6.47}$$

Визначити площу поверхні параболоїда, утвореного обертанням навколо осі OX дуги параболи $y^2 = 2px$, $0 \le x \le a$.

$$f(x) = \sqrt{2px}, \quad f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}.$$

- За формулою (6.47):

$$P=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}dx=$$
$$=2\pi\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}\bigg|_0^a=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2}-p^{3/2}\right].$$

6.12. Наближені обчислення визначених інтегралів.

Якщо первісна підінтегральної функції відома, визначений інтеграл обчислюють за формулою Ньютона-Лейбніца. Але може виникнути ситуація, коли первісна або не виражається у вигляді елементарної функції, або вираз для первісної має складний вигляд. В цьому випадку застосовують наближені формули обчислення визначених інтегралів.

Основна ідея отримання цих формул полягає у заміні підінтегральної функції на функцію більш простого вигляду, наприклад, многочлен, інтеграл від якого знаходять безпосередньо за формулою Ньютона-Лейбніца.

I. Формула прямокутників. Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок інтегрування на $2n$ частин:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{2k}<\ldots<x_{2n-2}<x_{2n-1}<x_{2n}=b.$$

На кожному відрізку $[x_{2n-2}; x_{2k}]$ побудуємо прямокутник $cCDd$ висотою $f(x_{2k-1})$. (рис. 6.16). Площу криволінійної трапеції замінімо на суму площ усіх таких прямокутників. Таким чином, визначений інтеграл наближено дорівнює наступній сумі:

$$\int_a^b f(x)dx\approx f(x_1)\cdot 2h+f(x_3)\cdot 2h+\ldots+f(x_{2n-1})\cdot 2n=2n(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1}) \qquad (6.48)$$

де h – довжина відрізка розбиття,

$$h=\frac{b-a}{2n},\quad x_1=a+h,\ldots,x_{2k+1}=x_{2k}+2h.$$

Формула (6.48) називається *формулою прямокутників*.

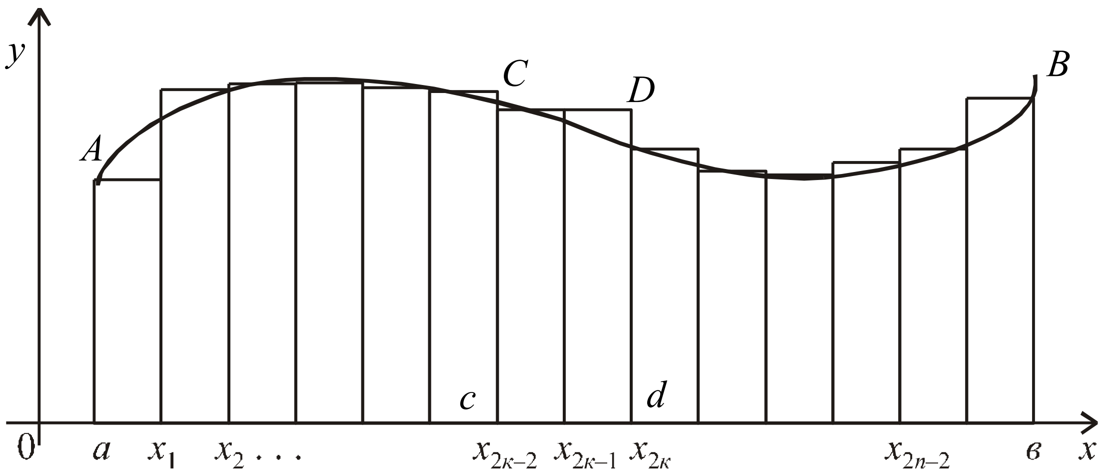


Рис. 6.16

Доведено, що похибка застосування формули (6.48) не більше ніж

$$\Delta = \frac{(b-a)^2}{24n^2}M, \qquad M = \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|, \tag{6.49}$$

Звичайно обчислення закінчується, коли модуль різниці $|S_{2n} - S_n|$ стає менше заданої точності.

Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2}dx.$

- Покладемо $f(x) = e^{x^2}$, $a = -1$, $b = 1$, тоді $h = \dfrac{1}{h}$;

$$x_1 = -1 + h;\ S_0 = 0,$$

$$x_{i+1} = x_i + 2h,\ i = 2,\ldots,n-1$$

$$S_i = S_{i-1} + f(x_i)$$

Результати обчислень наведено у таблиці

N	2	4	8	16	32	64	128
S_n	2	1,558	1,509	1,497	1,495	1,494	1,494

З таблиці видно, що значення інтеграла з заданою точністю отримується на 6 кроці.

ІІ. Формула трапецій. Геометричні розрахунки приводять до іншої формули: *формули трапецій*. Замінимо задану криву вписаною в неї ламаною з вершинами в точках (x_i; y_i), де $y_i = f(x_i)$. Тоді криволінійна трапеція заміниться іншою, утвореною *трапеціями*.

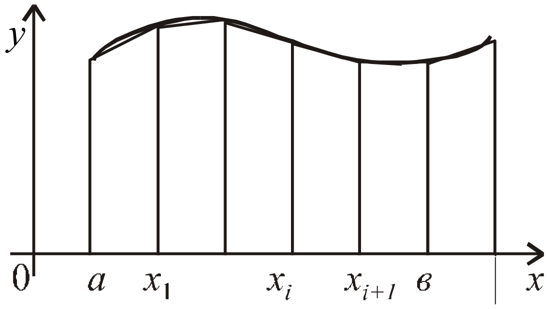


Рис. 6.17

Якщо вважати, що проміжок [a; b] поділений на рівні частини, то площі цих трапецій будуть:

$$\frac{b-a}{n}\frac{y_0+y_1}{2},\quad \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_1+y_2}{2},\ \ldots,\ \frac{b-a}{n}\frac{y_{n-1}+y_n}{2}$$

Додаючи, приходимо до формули

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right) \qquad (6.50)$$

Формула (6.50) називається *формулою трапецій*.

Доведено, що похибка застосування формули (6.50) не більше ніж

$$P\Delta = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}M \qquad M=\max_{x\in[a;b]} f''(x) \qquad (6.51)$$

Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ з точністю до 0,001.

- За формулою (6.51):

$$R_n<0,\quad |R_n|<\frac{1}{6n^2}$$

Візьмемо n = 10, тоді

$$|R_{10}|<\frac{1}{600}<1\cdot 7\cdot 10^{-3}$$

Обчислення наведемо в таблиці:

i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
i	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

Отже, за формулою (6.50)

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1\cdot 500}{2}+6{,}1877\right)=0{,}69377.$$

ІІІ. Формула Сімпсона. Для отримання наближеної формули обчислення визначеного інтеграла більш високої точності, ніж формули прямокутників та трапецій, будемо вписувати замість прямолінійних відрізків куски *параболи*.

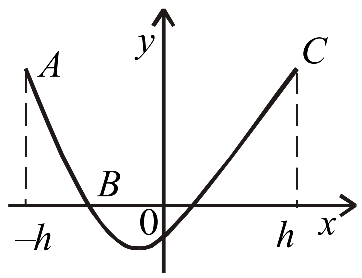


Рис. 6.18

Можна довести, що площа S криволінійної трапеції обмеженої параболою $y = ab^2 + bx + c$, що проходить через точки $A(-h;\, y_1)$, $B(0;\, (0;\, y_2)$, $C(h;\, y_3)$ виражається формулою

$$S = \frac{h}{3}\left(y_1 + 4h_2 + y_3\right) \tag{6.52}$$

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції $y = f(x)$ і розіб'ємо відрізок інтегрування $[a;\, b]$ на $2n$ рівних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

Через кожні три точки

$$A_0 A_1 A_2,\ \ldots\ A_{2k} A_{2k+1} A_{2k},\ \ldots,\ A_{2n-2} A_{2n-1} A_{2n}$$

проведемо параболу, отримаємо n криволінійних трапецій, обмежених зверху параболами. За формулою (6.52) площа кожної такої частинної криволінійної трапеції, що опирається на відрізок $[x_{2k},\, x_{2k-2}]$ дорівнює:

$$\int_{2k}^{2k+2} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_{2k} + 4y_{2k} + y_{2k+2}\right)$$

де $y_k = f(x_k)$, $0 \le k \le 2n$.

Додаючи почленно ці наближені рівності, отримаємо формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1}\right] \tag{6.53}$$

Формула (6.53) називається *формулою Сімпсона*.

Можна довести, що похибка формули (6.53) не більше ніж

$$M\,\frac{(b-a)^5}{2880n^4},\quad M = \max_{x\in[a;b]}\left|f^{\mathrm{IV}}(x)\right| \tag{6.54}$$

Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{x^2}dx$ з точністю до 0,001.

- За формулою (6.54) отримаємо, що $y^{\mathrm{IV}} > 0,\ \left|y^{\mathrm{IV}}\right| = y^{\mathrm{IV}} = 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3)$.

Очевидно, що похідна y^{IV} зростає при $0 \le x \le 1$ і має найбільше значення при $x = 1$.

Таким чином:

$$\left|R_n\right| \le \frac{1}{180n^4} \cdot 76e$$

Якщо ми візьмемо $n = 10$, отримаємо:

$$\left|R_n\right| \le \frac{76e}{180 \cdot 10^4} < 0,00012.$$

Розрахунки наведемо у таблиці:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	0101	1,0408	1,0942	1,1735	1,2840	1,433	1,6323	1,8965	2,2479	2,7183

Тоді за формулою (6.53) отримаємо:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx 1,463.$$

Зауваження. У деяких випадках застосовують інші, більш удосконалені обчислювальні схеми (наприклад, Гаусса, Чебишева та ін.), які дозволяють знаходити наближено значення визначених інтегралів ще більш зручніше.

Вправи для самостійного розв’язування

Обчислити визначені інтеграли (1–51):

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x \cos x dx.$

2. $\int_0^1 \left(1+e^{3x}\right)^2 e^{3x}dx.$

3. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

4. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}.$

5. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx.$

7. $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

8. $\int_2^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{x-1}}.$

9. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}.$

10. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}.$

11. $\int_5^8 \frac{\sqrt{x-4}}{x}dx.$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3\, xdx.$

13. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

14. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}.$

15. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx.$

16. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

17. $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2}dx.$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx.$

19. $\int_1^{e-1} \ln\left(x+1\right)dx.$

20. $\int_1^e x^2 \ln xdx.$

21. $\int_0^1 x^3e^{2x}dx.$

22. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$

23. $\int_1^2 (2-x)e^{\frac{x}{2}}dx.$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

25. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx.$

26. $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx.$

27. $\int_0^{0,5} \frac{x \arcsin x}{\left(1-x^2\right)^2} dx.$

28. $\int_1^e \frac{2\ln x+1}{x} dx.$

29. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}.$

30. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx.$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$

32. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx.$

33. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$

34. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

35. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$

36. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$

37. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}.$

38. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

39. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}dx.$

40. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$

41. $\int_1^e \ln x\, dx.$

42. $\int_0^{2\pi} x \sin 2x\, dx.$

43. $\int_0^1 xe^{3x}dx.$

44. $\int_0^1 \ln(x+1)dx.$

45. $\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx.$

46. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos 3x\, dx.$

47. $\int_1^e x \ln x\, dx.$

48. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}.$

49. $\int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x\, dx.$

50. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$

51. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

За допомогою визначених інтегралів обчислити площі фігур, що обмежені лініями (52–79):

52. $y=1-x^2;\quad y=x^2-7.$

53. $4y=x^2;\quad y^2=4x.$

54. $y=x^2+4x;\quad y=x+4.$

55. $y=e^x;\quad y=e^{-x};\quad x=1.$

56. $y=-x^2+9;\quad y=2x+1.$

57. $y=x^2;\quad y=2-x^2.$

58. $y=x^2;\quad y=2-x.$

59. $xy=9;\quad y=6;\quad x=3;\quad x=0;\quad y=0.$

60. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

61. $y^2=2x+4;\quad x=0.$

62. $y^2=x^3;\quad y=8;\quad x=0.$

63. $y^2=x;\quad x-y-6=0.$

64. $(y-x)^2 = x^3;\quad x=1.$

65. $x^2+y^2=8;\quad y=\dfrac{x^2}{2}.$

66. $y^2=16-8x;\quad y^2-24x=48.$

67. $xy=4;\quad x=1;\quad x=4;\quad y=0.$

68. $y=-x^2;\quad x+y+2=0.$

69. $y=x^2-1;\quad 2x+y-2=0.$

70. $y=x^2;\quad y=8-x^2.$

71. $xy=3;\quad x+y=4.$

72. $y=-x^2;\quad y=5x^2-6.$

73. $y^2=2x;\quad y=x.$

74. $y=x^2;\quad x=y^2.$

75. $y^2=2x+1;\quad x=1.$

76. $y^2=1-x;\quad x=-3.$

77. $y=e^x;\quad y=e^{-x};\quad x=1.$

78. $xy=6;\quad x+y-7=0.$

79. $y^2=2x+1;\quad x-y-1=0.$

За допомогою визначених інтегралів обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, що обмежені лініями (80–95):

80. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1;\quad y=\pm b,$ навколо осі $Oy.$

81. $xy=4;\quad x=1;\quad x=4;\quad y=0,$ навколо осі $Ox.$

82. $y^2=1-x;\quad x=0,$ навколо осі $Oy.$

83. $y=x^3;\quad y=0;\quad x=2,$ навколо осі $Oy.$

84. $y=x^2;\quad y=x+6,$ навколо осі $Ox.$

85. $x^2-y^2=a^2;\quad x=\pm a,$ навколо осі $Ox.$

86. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,$ навколо осі $Oy.$

87. $y^2=2x+1;\quad x=0,$ навколо осі $Ox.$

88. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1;\quad y=\pm 3,$ навколо осі $Oy.$

89. $y=x^2;\quad y=0;\quad x=2,$ навколо осі $Ox.$

90. $xy=9;\quad y=3;\quad y=9;\quad x=0,$ навколо осі $Oy.$

91. $y=\sin x;\quad 0\le x\le \pi;\quad y=0,$ навколо осі $Ox.$

92. $y=x^3;\quad x=0;\quad y=8,$ навколо осі $Oy.$

93. $x^2-y^2=4;\quad y=\pm 2,$ навколо осі $Oy.$

94. $y=x^2;\quad y^2=x,$ навколо осі $Ox.$

95. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,$ навколо осі $Oy.$

Відповіді:

1. $\frac{1}{160}$. **2.** $\frac{1}{9}\left(\left(1+e^3\right)^3-8\right)$. **3.** 2. **4.** 1.

5. $\operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}$. **6.** $\frac{\pi}{4}$. **7.** $2\left(1-\ln\frac{3}{2}\right)$. **8.** $\frac{27}{4}+\ln 2$.

9. $7+2\ln 2$. **10.** $\frac{17}{6}$. **11.** $2-\pi+4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **12.** $\frac{1-\ln 2}{2}$.

13. $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **14.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **15.** $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. **16.** $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.

17. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. **18.** $\frac{\pi}{4}$. **19.** $2(1-\ln 2)$. **20.** $\frac{1}{9}\left(2e^3+1\right)$.

21. $\frac{e^2+3}{8}$. **22.** $\frac{1}{4}(\pi-2\ln 2)$. **23.** $\frac{4}{e}$. **24.** $\frac{1}{4}(\pi-2\ln 2)$.

25. $\frac{\pi}{4}-1$. **26.** $\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$. **27.** $\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **28.** 2.

29. $2e(e-1)$. **30.** $\frac{1}{3}a^3$. **31.** $\frac{1}{3}$. **32.** $\frac{\pi}{4}$.

33. $\ln 2$. **34.** $2-\ln 2$. **35.** $\frac{32}{3}$. **36.** $2(1+\ln 2)$.

37. $\frac{5}{3}-2\ln 2$. **38.** $4-2\ln 3$. **39.** $\frac{25}{4}\pi$. **40.** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.

41. 1. **42.** $-\pi$. **43.** $\frac{1}{9}\left(2e^3+1\right)$. **44.** $2\ln 2-1$.

45. $2-e^{-1}$. **46.** $-\frac{2}{9}$. **47.** $\frac{e^2}{4}$. **48.** $\frac{1}{4}(\pi+2\ln 2)$.

49. $\frac{\pi}{2}-1$. **50.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **51.** $\frac{\pi}{16}$.

52. $\frac{64}{3}$. **53.** $\frac{16}{3}$. **54.** $\frac{125}{6}$. **55.** $e+e^{-1}-2$.

56. 36. **57.** $\frac{8}{3}$. **58.** $\frac{9}{2}$. **59.** $9(1+\ln 2)$.

60. πab. **61.** $\frac{16}{3}$. **62.** 19,2. **63.** $\frac{125}{6}$.

64. 0,8. **65.** $2\pi+\frac{4}{3}$; $6\pi-\frac{4}{3}$. **66.** $\frac{32}{3}\sqrt{6}$. **67.** $8\ln 2$.

68. $\frac{9}{2}$. **69.** $\frac{32}{3}$.

70. $\frac{64}{3}$. **71.** $4-3\ln 3$. **72.** 8. **73.** $\frac{2}{3}$.

74. $\frac{1}{3}$. **75.** $2\sqrt{3}$. **76.** $\frac{32}{3}$. **77.** $e+\frac{1}{e}-2$.

78. $17{,}5-6\ln 6.$

79. $\frac{16}{3}.$

80. $\frac{8\pi a^2 b}{3}.$

81. $12\pi.$

82. $\frac{16\pi}{15}.$

83. $\frac{64}{5}\pi.$

84. $\frac{500}{3}\pi.$

85. $\frac{8\pi a^3}{3}.$

86. $\frac{4}{3}\pi a^2 b.$

87. $\frac{\pi}{4}.$

88. $32\pi.$

89. $\frac{32}{5}\pi.$

90. $18\pi.$

91. $\frac{\pi^2}{2}.$

92. $19{,}2\pi.$

93. $\frac{64}{3}\pi.$

94. $0{,}3\pi.$

95. $24\pi.$

Розділ 7 Невласні інтеграли

Вводячи поняття інтегралу, ми припускали, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція обмежена на цьому відрізку. В протилежному випадку множина сум Дарбу не буде обмеженою. Але, можливі випадки, коли одна або обидві ці умови не виконуються. У такому випадку відповідні інтеграли називаються *невласними*. Ми будемо розрізняти два випадки: *невласні інтеграли І-го* (проміжок інтегрування необмежений) і *ІІ-го роду* (підінтегральна функція не обмежена).

7.1. Невласні інтеграли І-го роду: інтеграли з нескінченними межами інтегрування.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;\ +\infty)$ і інтегровна в будь-якій кінцевій його частині $[a; A]$ так що інтеграл $\int_a^A f(x)dx$ має зміст при будь-якому $A > a$.

Означення. Границя інтеграла $\int_a^A f(x)dx$ (скінченна або нескінченна) при $A \to +\infty$ називається *невласним інтегралом І-го роду* від функції $f(x)$ і позначається:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx \qquad (7.1)$$

Геометрична ілюстрація.

Нехай задана невід'ємна функція $y = f(x)$, неперервна на півінтервалі $[a;\ +\infty)$. Для кожного $b > a$ визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ дає площу криволінійної трапеції $aABb$.

Зміщуючи відрізок Bb управо, ми отримаємо замість значення невласного інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ площу «трикутника» $Aa\infty$. (рис. 7.1)

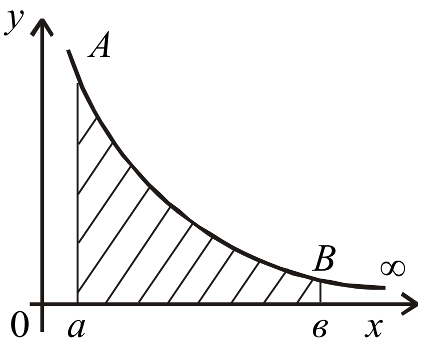


Рис. 7.1

Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ $(a>0)$ залежно від параметра λ.

Розв'язування. Якщо границя $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ існує і скінченна, то невласний інтеграл *збіжний*. В протилежному випадку – *розбіжний*.

Аналогічно, з означенням (7.1) можна розглядати невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею:

$$\int\limits_{-\infty}^{A} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^A f(x)dx \tag{7.2}$$

Можна також розглядати невласний інтеграл на проміжку (– ∞; ∞):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx \tag{7.3}$$

$$c\in(-\infty;\infty)$$

Можна показати, що права частина (7.3) не залежить від вибору проміжної точки c.

Розв'язування. За означенням (7.1) $\lambda\neq1$:

$$\int\limits_a^{+\lambda}\frac{dx}{x^{\lambda}}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A\frac{dx}{x^{\lambda}}=\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_a^A=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{A^{1-\lambda}}{1-\lambda}-\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right)=\left[\begin{array}{ll}\infty, & \text{при } \lambda>1.\\ \text{розбіжний}, & \text{при } \lambda\le1.\end{array}\right.$$

Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^{+\infty}\sin bxdx$ $(b>0)$.

Розв'язування. За означенням (7.1):

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin bxdx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A\sin bx=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\Big|_0^A\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}\cos bA+\frac{1}{b}\right).$$

Границя $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}\cos bA\right)$ не існує, тому початковий інтеграл розбіжний.

Якщо функція $f(x)$ додатна, то інтеграл

$$\Phi(A)=\int_a^A f(x)dx \tag{7.4}$$

являє собою монотонно зростаючу функцію від змінної A. Питання про існування скінченної границі при $A\to\infty$ розв'язується за допомогою наступних теорем, які ми наводимо без доведення.

Теорема. Для збіжності невласного інтеграла (7.1) необхідно і достатньо, щоб інтеграл (7.4) при зростанні A залишався обмеженим зверху:

$$\int_a^A d(x)dx \le L \quad (L=\text{const}).$$

Теорема. Якщо хоча б при $x\ge A$ має місце нерівність $f(x)\le g(x)$,то із збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ слідує збіжність інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$, або, із розбіжності $\int_a^{\infty} f(x)dx$ слідує розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

7.2. Невласні інтеграли II роду: інтеграли від необмежених функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a; b]$.

Означення. Точка $x=b$ називається *особливою* точкою якщо функція $f(x)$ не обмежена в будь-якому відрізку, що належать проміжку $(a; b]$.

Теорема. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K \quad (0\le K\le+\infty),$$

то із збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$, при $K < +\infty$, випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності першого інтеграла випливає розбіжність другого.

Теорема. Нехай для достатньо великих x (Коші) функція $f(x)$ має вигляд:

$$f(x)=\frac{\phi(x)}{x^{\lambda}} \quad (\lambda>1).$$

Тоді, якщо$\lambda > 1$ і$\varphi(x) \ge c > 0$, то цей інтеграл розбігається.

Теорема. Якщо збігається інтеграл $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ то збігається і інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Означення. Якщо одночасно з інтегралом $\int_a^{\infty} f(x)$ збігається і інтеграл $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*, а функція $f(x)$ – *абсолютно інтегровною* на проміжку $[a; b)$.

Теорема. Нехай функції *f(x)* і *g(x)* визначені на проміжку $[a;\ \infty)$, причому:

1)функція *f(x)* інтегровна на цьому проміжку, так що інтеграл (8.1) збігається;

2)функція *g(x)* монотонна і обмежена:

$$|g(x)| \le L \quad (L = const).$$

Тоді інтеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) g(x) dx \qquad (7.5)$$

збігається.

Теорема (ознака Діріхле). Нехай

1) функція *f(x)* інтегровна на будь-якому проміжку $[a;\ A]$ і інтеграл (7.4) обмежений:

$$\left| \int_a^A f(x) dx \right| \le K \quad (K = const).$$

2) функція *g(x)* монотонно прямує до 0 при $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0 .$$

Тоді інтеграл (7.5) збігається.

 Дослідити збіжність інтегралів:

1. $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (a > 0)$.

2. $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{arctgx}{x^3} dx \quad (a > 0)$.

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\mu} e^{-ax} \cos x dx \quad (\mu, a > 0)$

Розв'язування. 1. За ознакою Діріхле покладемо:

$$f(x) = \sin x,\ g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Умови (7.1) і (7.2) виконані, бо $\left| \int_a^A \sin x dx \right| = |\cos a - \cos A| \le 2$ і функція $\frac{1}{x^2}$ монотонно спадає, прямує до 0 при $x \to \infty$.

Тому інтеграл збіжний.

2. За ознакою Абеля покладемо:

$$f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad g(x) = \mathrm{arctg} x.$$

За умовою (7.1) інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ збігається, за умовою (7.2) $|\mathrm{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$.

Отже, інтеграл збігається.

3. За ознакою Абеля покладемо:

$$f(x)=x^{\mu}e^{-ax}, \quad g(x)=\cos x.$$

Інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} x^{\mu}e^{-ex}dx$ – збіжний, $|\cos x|\le 1$, тому інтеграл збіжний.

Означення. Границя інтеграла $\int\limits_{a}^{b-\eta} f(x)dx$ при $\eta\to 0$ називається *невласним інтегралом II роду* функції $f(x)$ від a до b і позначається:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{a}^{b-\eta} f(x)dx. \qquad (7.6)$$

Якщо границя існує, то кажуть, що невласний інтеграл (9.6) *збігається*. Якщо границя не існує або нескінченна, то інтеграл (9.6) *розбіжний*.

Геометрична інтерпретація.

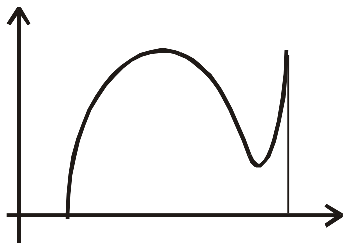


Рис. 7.2

Аналогічно, якщо $x = a$– особлива точка, то невласний інтеграл визначають так:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо $x = c$– єдина внутрішня особлива точка на відрізку $[a; b]$, то покладають:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

за умов, що обидва невласні інтеграли справа збігаються.

Якщо особливих точок на відрізку $[a; b]$ декілька, то відрізок розбивають так, щоб у кожному відрізку розбиття було не більше однієї особливої точки і користуються означенням (7.1).

Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$.

Покладемо:

$$F(a+0)=\lim_{\varepsilon\to 0+0} F(a+\varepsilon),$$

$$F(b-0)=\lim_{\varepsilon\to 0-0} F(b-\varepsilon).$$

(якщо ці границі існують). Тоді, аналогом формули Ньютона-Лейбніца для збіжних інтегралів, у яких особливими точками є точки $x = a$ і $x = b$, буде формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0).$$

Дослідити збіжність інтеграла: $\int_0^a \frac{dx}{x^\lambda}, \quad a > 0, \quad a = const.$

Розв'язування.

1. $\lambda \neq 1$. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ має одну особливу точку на відрізку інтегрування [0; a]:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_\varepsilon^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right|_{0+\varepsilon}^a = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

Відповідь: інтеграл збіжний.

2. $\lambda = 1$. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x}$ має одну особливу точку на відрізку інтегрування [0; a]:

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_\varepsilon^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln|x| \Big|_\varepsilon^a = \lim_{\varepsilon \to 0+0} (\ln a - \ln \varepsilon).$$

Інтеграл розбіжний.

Основні ознаки існування інтеграла.

1. Нехай $f(x) \geq 0$. Тоді, для збіжності невласного інтеграла (7.1) необхідно і достатньо, щоб при усіх $\varepsilon > 0$ виконувалась нерівність:

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \leq L \quad (L = const).$$

2. *Ознака Коші*. Нехай для достатньо близьких до b значень x функція $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-\lambda)^\lambda}, \quad (\lambda > 0).$$

Тоді: 1) якщо $\lambda \geq 1$ і $g(x) \geq c > 0$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ розбігається.

3. Якщо при $x \to b$ функція $y = f(x)$ є нескінченно великого порядку $\lambda > 0$ (у порівнянні з $\frac{1}{b-x}$), то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається або розбігається залежно від того, чи буде $\lambda < 1$ або $\lambda \geq 1$.

Дослідити збіжність інтеграла:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

Розв'язування. $x = 1$ – особлива точка. Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, являє собою нескінченно велику порядку $1/4$, бо

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{4}}, \text{ при } x \to 1.$$

Отже, інтеграл збігається.

б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

Розв'язування. $x = 1$ – особлива точка. Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ являє собою нескінченно велику порядку 1, бо

$$\frac{\ln x}{x-1} \to 1 \text{ при } x \to 1.$$

Отже, інтеграл розбігається.

Зауваження. Властивості невласних інтегралів аналогічні властивостям визначених інтегралів і отримуються з них таким чином: невласні інтеграли є границею визначених, тому, звичайно, достатньо написати для останніх рівність або нерівність, що виражають потрібну властивість, і перейти до границь.

7.3. Деякі особливі інтеграли.

I. Інтеграл Ейлера.

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx. \tag{7.7}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \left\| \begin{array}{l} \text{інтегруван ням частинами цей} \\ \text{невластиви й інтеграл можна звести} \\ \text{до визначеног о і довести таким чином} \\ \text{його існування} \end{array} \right\| =$$

$$= x \ln \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int_0^{\pi/2} x ctgx dx.$$

Обчислимо інтеграл (7.7):

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \left| \begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{l}{x = 2t} \\ x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & \pi/4 \end{array} \right| = 2\int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/4} \sin t dt + 2\int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt =$$

$$
=\left|\begin{array}{c} \text{в останньому} \\ \hline t=\dfrac{\pi}{2}-u \\ dt=-du \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \pi/4 \\ \hline u & \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{4} \end{array} \end{array}\right| = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t dt + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin t dt =
$$

$$
= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.
$$

або

$$
I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 .
$$

Зауваження. По інтегралу I зводяться також інтеграли $\int_0^{\pi/2} \mathrm{ctg} x dx$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg} x}{x} dx$.

II. Інтеграл Ейлера-Пуассона.

$$
P = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.. \tag{7.8}
$$

Функція $f(t) = (1+t)e^{-t}$ досягає свого найбільшого значення 1 при $t = 0$. Отже,

$$
(1 + t)e^{-t} < 1 \text{ при } t > 0 \text{ і } t < 0.
$$

Покладаючи $t = \pm x^2$ отримаємо:

$$
(1-x^2)e^{x^2} < 1 \text{ і } (1+x^2)e^{-x^2} < 1.
$$

Звідси:

$$
1-x^2 < e^{-x^2}, \quad x \in (0;1). \tag{7.9}
$$

$$
e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}, \quad x > 0. \tag{7.10}
$$

Підносячи вирази (7.9) і (7.10) до степеня з будь-яким натуральним показником n, матимемо:

$$
(1-x^2)^n < e^{-nx^2}. \tag{7.11}
$$

$$
(0 < x < 1) \quad e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad (x > 0). \tag{7.12}
$$

Інтегруючи нерівність (7.11) в проміжку від 0 до 1, а (7.12)– від 0 до $+\infty$, отримаємо:

$$
\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.
$$

Але

1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{n}x \\ \dfrac{u^2}{\sqrt{n}}=x \\ dx=\dfrac{1}{\sqrt{b}}du \end{matrix} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-n\cdot\frac{u^2}{n}}du = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \dfrac{1}{\sqrt{n}}P.$

2. $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx = \left| \begin{matrix} x=\cos t \\ dx=-\sin t \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} + dt = \dfrac{2n!!}{(2n+1)!!}$

3. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1+x^2)^n} = \left| \begin{matrix} x=ctgt \\ dx=-\dfrac{1}{\sin^2 t}dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} tdt = \dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

Отже,

$$\sqrt{n}\,\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (7.13)$$

Підносячи до квадрата, і перетворюючи вираз (9.13), матимемо:

$$\sqrt{n}\,\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (7.14)$$

Отже,

$$K^2 = \frac{\pi}{4} \ \text{ і } \ K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Таким чином:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

III. Інтеграли Фруллані.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx, \ (a,b>0),$$

де: 1) $f(x)$ визначена і неперервна при $x \ge 0$;

2) існує кінцева границя $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Можемо довести, що:

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.. \qquad (7.15)$$

Обчислити інтеграл:

$$\Phi=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax-\operatorname{arctg}cx}{x}dx.$$

Розв'язування. В цьому випадку $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $f(0)=0$, $f(+\infty)=\frac{\pi}{2}$. Отже,

$$\Phi=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

Вправи для самостійного розв'язування

У задачах 1–18 обчислити невласні інтеграли (або встановити їх розбіжність).

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$. *Відповідь.* Розбіжний.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$. *Відповідь.* π.

3. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{4}$.

4. $\int_0^{+\infty}x\sin xdx$. *Відповідь.* Розбіжний.

5. $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$.

6. $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

7. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$. *Відповідь.* $\frac{\pi}{2}$.

8. $\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$. *Відповідь.* Розбіжний.

9. $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$. *Відповідь.* $\frac{8}{3}$.

10. $\int\limits_0^1 x\ln x dx.$ *Відповідь.* $-\dfrac{1}{4}.$

11. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}.$ *Відповідь.* $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}.$

12. $\int\limits_1^e \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ *Відповідь.* 2.

13. $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}.$ *Відповідь.* $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}.$

14. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{xdx}{x^3+1}.$ *Відповідь.* Збіжний.

15. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^4}dx.$ *Відповідь.* Розбіжний.

16. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx.$ *Відповідь.* Розбіжний.

17. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}.$ *Відповідь.* Розбіжний.

18. $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$ *Відповідь.* Збіжний.