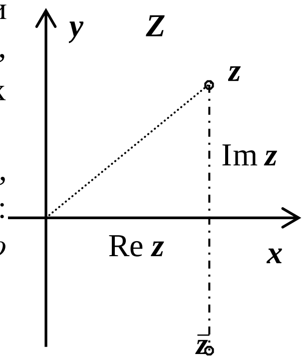
Розділ 1 Комплексні числа

1.1. Означення комплексного числа.



Означення. *Комплексним числом* $\boldsymbol{z}$ будемо називати впорядковану пару дійсних чисел x, y, записану у формі $z = x + iy$, де i – новий об'єкт («уявна одиниця»), для якого при обчисленнях покладемо $i^2 = -1$.

Перша компонента комплексного числа $\boldsymbol{z}$, дійсне число x, називається *дійсною частиною* числа $\boldsymbol{z}$, це позначається так: $x = \mathrm{Re}\, z$; друга компонента, дійсне число y, називається *уявною частиною* числа $\boldsymbol{z}$: $y = \mathrm{Im}\, z$.

Означення. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$ *рівні* тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні і уявні частини: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{(x_1 = x_2)\Lambda(y_1 = y_2)\}$.

Множина комплексних чисел невпорядкована, тобто для комплексних чисел не вводяться відношення «більше» або «менше.

Геометрично комплексне число $z = x + yi$ зображається як точка з координатами (x, y) на площині. Площина, на якій зображаються комплексні числа, називається *комплексною площиною* Z.

Означення. *Сумою* двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$ називається комплексне число z, яке визначається співвідношенням $z = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, тобто $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2$.

Це означає, що геометрично комплексні числа додаються як вектори на площині покоординатно.

Означення. *Добутком* двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$ називається комплексне число z, яке визначається співвідношенням $z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$, тобто $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 \mathrm{Re}\, z_2 - \mathrm{Im}\, z_1 \mathrm{Im}\, z_2$; $\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 \mathrm{Im}\, z_2 + \mathrm{Im}\, z_1 \mathrm{Re}\, z_2$.

Для двох комплексних чисел з нульовою уявною частиною $z_1 = x_1 + 0i$ і $z_2 = x_2 + 0i$ отримаємо: $z = (x_1 + x_2) + (0 + 0)i = (x_1 + x_2) + 0i$, $z = (x_1 x_2 - 0 \cdot 0) + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0)i = x_1 x_2 + 0i$, тобто для множини комплексних чисел з нульовоюуявною частиною операції додавання і множення не виводять за межі цієї множини. Ототожнимо кожне таке число здійсним числом x, яке рівне дійсні частині комплексного числа, тобто будемо вважати, що $z = x + 0i \equiv x$. Тепер дійсні числа – підмножина множини комплексних чисел Z. Далі, числа з нульовою дійсною частиною, тобто числа виду $z = 0 + yi = yi$, називаються *уявними* числами. Уявне число зодиничною уявною частиною будемо записувати як i: $0 + 1i = i$; квадрат цього числа, по означенню множення, рівний $i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$.

Легко переконатися, що операція додавання на множині комплексних чисел Z має властивості, аналогічні властивостям додавання дійсних чисел:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

3. Існує такий елемент $0 \in Z$, що $0 + z = z$ для $\forall z \in Z$. Цей елемент – число $0 = 0 + 0i$.

4. Для кожного елемента $z \in Z$ існує такий елемент $-z$, що $z + (-z) = 0$. Цей елемент – число $-x - yi$. Сума чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $-z_2 = -x_2 - y_2 i$ називається *різницею* чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$.

Перш, ніж визначити операцію ділення комплексних чисел, введемо поняття спряженого числа і модуля комплексного числа.

Означення. Число $\overline{z} = x - yi$ називається *числом, спряженим до числа* $z = x + yi$. Часто спряжене число позначається також символом z^*.

Означення. Дійсне число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ називається *модулем* комплексного числа $z = x + yi$.

Знайдемо добуток спряжених чисел: $z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = \big(x \cdot x - y \cdot (-y)\big) + \big(x \cdot (-y) + y \cdot x\big)i = x^2 + y^2 = |z|^2$. Таким чином, $z \cdot \overline{z}$ – завжди невід'ємне дійсне число, причому $z \cdot \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Для знаходження частки комплексних чисел $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ домножимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i) \cdot (x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Для операціїмноження справедливі властивості:

1. $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

2. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

3. Добуток числа $1 = 1 + 0i \in Z$ на будь яке число $z \in Z$ рівне z;

4. Для кожного числа $z \in Z, z \neq 0$ існує таке число $z^{-1} \in Z$, що $z \cdot z^{-1} = 1$, $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{x - iy}{|z|^2}$;

Операції додавання і множення підкоряються закону дистрибутивності:

1. $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Операція спряження має такі властивості:

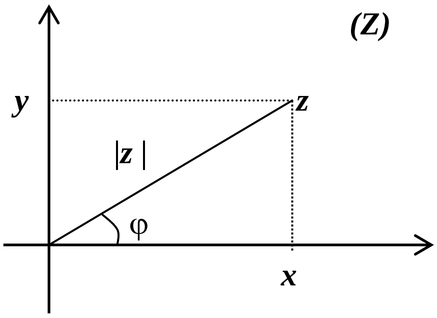
$$\left(\overline{\overline{z}}\right) = z; \; z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z; \quad z - \overline{z} = 2\operatorname{Im} z; \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2;$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

Приклад виконання арифметичних дій з комплексними числами: нехай $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Тоді $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (-3 + 5)i = 6 + 2i$; $z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (4 + 5i) = \big((2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 \cdot i^2\big) + \big((2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4\big)i = 23 - 2i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{4 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{(8 - 15) + (-12 - 10)i}{16 + 25} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41} i.$$

1.2. Тригонометрична форма комплексного числа.



Запис комплексного числа у вигляді $z = x + yi$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа. Зобразимо число z як точку на площині з декартовими координатами x, y. Якщо тепер перейти до полярних координат ρ, φ, то $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \ |z| = \rho$, тому $z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$. Кут φ називається *аргументом* комплексного числа z і позначається $\arg z$: $\varphi = \arg z$. Аргумент комплексного числа визначений неоднозначно (з точністю до доданків, кратних 2π): якщо, наприклад, $\varphi = \pi/6$, то значення φ, рівні $\pi/6 \pm 2\pi,\ \pi/6 \pm 4\pi$ і т.д. теж будуть відповідати числу z, тому значення аргумента, що задовольняє умовам $-\pi < \arg z \le \pi$, будемо називати *головним*; для позначення усіх значень аргумента комплексного числа z використовується символ $\operatorname{Arg} z$: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

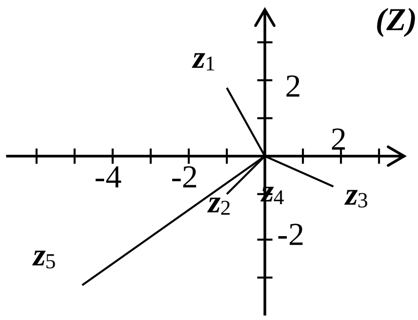
Запис комплексного числа у вигляді $z = |z|\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right) = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ називається *тригонометричною формою* числа.

Число $0 = 0 + 0i$ – єдине число, модуль якого рівний нулю; аргумент для цього числа не визначений.

Перехід від тригонометричної форми до алгебраїчної очевидний: $x = |z|\cos\varphi,\ \ y = |z|\sin\varphi$. Формули для переходувід алгебраїчної формидо тригонометричної такі:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2};\quad \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(y/x\right),\ x > 0; \\ \operatorname{arctg}\left(y/x\right) + \pi,\ x < 0, y > 0; \\ \operatorname{arctg}\left(y/x\right) - \pi,\ x < 0, y < 0; \\ \pi/2,\ x = 0, y > 0; \\ -\pi/2,\ x = 0, y < 0. \end{cases}$$

При розв’язуванні задач на перевід алгебраїчно заданого комплексного числа у тригонометричну форму слід зобразити це число на комплексній площині Z і, таким чином, контролювати отриманий результат.



Записатиу тригонометричній формі числа $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = \sqrt{3} - i$, $z_4 = -i$, $z_5 = -5 - 3i$.

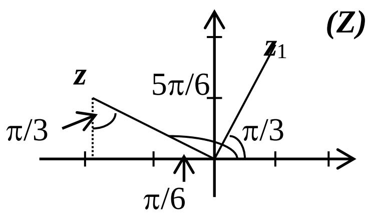
Розв’язування. $z_1 = 2(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))$,

$z_2 = \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4))$,

$z_3 = 2(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))$,

$z_4 = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)$,

$z_5 = \sqrt{34}\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\left(3/5\right) - \pi\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\left(3/5\right) - \pi\right)\right]$.



Привести до тригонометричної форми число $z = -\sin(\pi/3) + i\cos(\pi/3)$.

Зобразимо на комплексній площині Z разом з точкою z

точку $z_1 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$. З рисунка зрозуміло, що $\arg z = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$, тому $z = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$.

У тригонометричній формі легко інтерпретуються такі дії, як множення, ділення, піднесення до степеня. Нехай $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$. Тоді $z_1 \cdot z_2 = \left[|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\right] \cdot \left[|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right] =$

$$= \left[|z_1| \cdot |z_2|\right] \cdot \left[(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\right] = \left[|z_1| \cdot |z_2|\right] \times$$

$$\times \left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right] = \left[|z_1| \cdot |z_2|\right] \cdot \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Висновок: при множенні комплексних чисел їх модулі перемножуються, аргументидодаються. Очевидно, якщо $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то $\bar{z}_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = |z_2|(\cos(-\varphi_2) + i(-\sin\varphi_2))$, тобто операція спряження не змінює модуль числа, і змінює знак його аргумента, тому

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{|z_1| \cdot |\bar{z}_2|(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}{|z_2| \cdot |\bar{z}_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Висновок: при діленні комплексних чисел їх модулі діляться один на одного, аргумент частки рівний різниці аргументів діленого і дільника.

Введемопозначення: для будь якого дійсного числа φ суму $\cos\varphi + i\sin\varphi$ будемо записувати як $e^{i\varphi}$. Формула $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ називається ***формулою Ейлера***. Будь яке комплексне число z можна представити як $z = |z|e^{i \cdot \mathrm{Arg}\, z} = |z|e^{i \cdot \arg z} = |z|e^{i \cdot \varphi}$; ця форма запису називається *показниковою*. Введене позначення узгоджене з властивостями показникової функції:

$$z_1 \cdot z_2 = \left[|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}\right] \cdot \left[|z_2| \cdot e^{i\varphi_2}\right] = \left[|z_1| \cdot |z_2|\right] \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = \left[|z_1| \cdot |z_2|\right] \cdot \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot e^{i\varphi_1}}{|z_2| \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

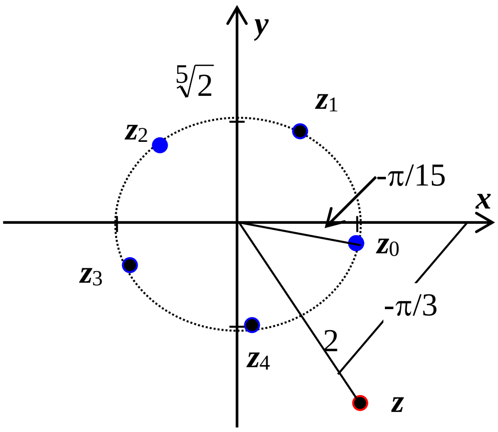
Індукцією по показнику степеня n легко доводиться ***формула Муавра***: якщо $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, або, в показниковій формі, $z^n = |z|^n \cdot e^{in\varphi}$. За допомогою цієї формули легко обчислювати високі степені комплексних чисел і виводити формули для синусів і косинусів кратних кутів:

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20} = \left(\frac{2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))}{\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))}\right)^{20} =$$

$$= \frac{2^{20}}{2^{10}}\frac{e^{i \cdot 20\pi/3}}{e^{i \cdot (-5\pi)}} = 2^{10}\frac{e^{i \cdot (6\pi + 2\pi/3)}}{e^{i \cdot \pi}} = 1024\frac{e^{i \cdot 2\pi/3}}{-1} = -1024\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512(1 - i\sqrt{3}).$$

Тепер розглянемо операцію добування кореня n-го степеня з комплексного числа z. По означенню, будь яке число w, таке, що $w^n = z$, називається *коренем* n-го *степеня* з числа z. Нехай $z = |z|(\cos\mathrm{Arg}\, z + i\sin\mathrm{Arg}\, z)$, $\boldsymbol{w} = |\boldsymbol{w}|(\cos\arg\boldsymbol{w} + \boldsymbol{i}\sin\arg\boldsymbol{w})$. Тоді $w^n = |w|^n(\cos n\arg w + i\sin n\arg w) = |z|(\cos\mathrm{Arg}\, z + i\sin\mathrm{Arg}\, z)$. Числа рівні, якщо рівніїх модулі і аргументи, тому $|w|^n = |z|$, $n\arg w = \mathrm{Arg}\, z$, звідки $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, $\arg w = \frac{1}{n}\mathrm{Arg}\, z = \frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)$, при цьому n різних значень кореня n-го степеня з числа z отримуються при $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Знайти усі значення $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$.



Число $z=1-\sqrt{3}i$ у тригонометричній формі рівне $z=2(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3))$. Усі п’ять значень кореня даються формулою $z_k=\sqrt[5]{2}(\cos(-\pi/15+2\pi k/5)+i\sin(-\pi/15+2\pi k/5))$ при $k=0,1,2,3,4$. Вонирозташовані на колі радіуса $\sqrt[5]{2}$. Значення, що відповідає $k=0$, має аргумент $(-\pi/3):5=-\pi/15$, інші розташовані з інтервалом по φ, рівним $2\pi/5$, утворюючи правильний п’ятикутник.

1.2.1. Многочлени n-го степеня.

А. Многочлениз комплексними коефіцієнтами від комплексноїзмінної.

Означення. *Многочленом **n**-го степеня* називається функція $P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+...+a_1z+a_0$, де $a_0,\, a_1,\, a_2,\, ...,\, a_{n-1},\, a_n$ – сталі комплексні числа (коефіцієнти многочлена), $\boldsymbol{a_n}\neq 0$, $z\in Z$ – комплексна змінна. Число z_0, у якому многочлен приймає нульове значення ($P_n(z_0)=0$), називається *коренем* многочлена.

Справедлива **теорема**, яка називається **основною теоремою алгебри**: будь який многочлен степеня $n\geq 1$ має комплексний корінь.

Нехай z_0 – довільна точка комплексної площини. Представимо $P_n(z)$ у вигляді многочлена по степеням $z-z_0$:

$$P_n(z)=a_n\left[(z-z_0)+z_0\right]^n+a_{n-1}\left[(z-z_0)+z_0\right]^{n-1}+...+a_2\left[(z-z_0)+z_0\right]^2+a_1\left[(z-z_0)+z_0\right]+a_0=$$
$$=a_n(z-z_0)^n+a'_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+...+a'_2(z-z_0)^2+a'_1(z-z_0)+a'_0.$$

Тут $a'_0,\, a'_1,\, a'_2,\, ...,\, a'_{n-1}$ – нові значення коефіцієнтів, що отримуються після розкриття степенів і зведення подібних членів. Очевидно, $P_n(z_0)=a'_0$, звідси слідує твердження: для того, щоб число z_0 було коренем многочлена P_n, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнт при нульовому степені у розкладі P_n по степеням $z-z_0$ був рівний нулю: $a'_0=0$. Але тоді

$$P_n(z)=a_n(z-z_0)^n+a'_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+...+a'_2(z-z_0)^2+a'_1(z-z_0)=$$
$$=(z-z_0)\Big[a_n(z-z_0)^{n-1}+a'_{n-1}(z-z_0)^{n-2}+...+a'_2(z-z_0)+a'_1\Big]=(z-z_0)P_{n-1}(z).$$

Таким чином, доведена

Теорема Безу: для того, щоб многочлен ***n***-го степеня $P_n(z)$ мав комплексний корінь z_0, необхідно і достатньо, щоб він без остачі ділився на $z-z_0$, тобто щоб $P_n(z)$ представлявся у вигляді: $P_n(z)=(z-z_0)P_{n-1}(z)$, де $P_{n-1}(z)$ – многочлен (***n***–1)-го степеня.

Нехай z_0 – корінь многочлена $P_n(z)$, тоді, по теоремі Безу, $P_n(z)=(z-z_0)P_{n-1}(z)$. Можливі два варіанти:

1. Число z_0 не є коренем многочлена $P_{n-1}(z)$, в цьому випадку z_0 називається *простим коренем* многочлена $P_n(z)$.

2. Число z_0 є коренем многочлена $P_{n-1}(z)$, тоді, використовуючи теорему Безу уже до $P_{n-1}(z)$, отримаємо $P_{n-1}(z)=(z-z_0)P_{n-2}(z)$, $P_n(z)=(z-z_0)^2P_{n-2}(z)$. Використовуючи до $P_{n-2}(z)$ ті ж роздуми, прийдемо до висновку: якщо z_0 – корінь многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ єдиним чином представляється у вигляді $P_n(z)=(z-z_0)^kP_{n-k}(z)$, де $P_{n-k}(z_0)\neq 0$. Число k в цьому випадку називається *кратністю кореня* z_0.

Згідно основної теореми алгебри, будь який многочлен $P_n(z)$ при $n\geq 1$ має хоча б один корінь z_1; якщо кратність цього кореня рівна k_1, то, згідно викладеного, $P_n(z)$ представляється у вигляді $P_n(z)=(z-z_1)^{k_1}P_{n-k_1}(z)$, де $P_{n-k}(z_1)\neq 0$. Якщо $n-k_1\geq 1$, то многочлен P_{n-k_1} має корінь $z_2\neq z_1$, і представляється у вигляді $P_{n-k_1}(z)=(z-z_2)^{k_2}P_{n-k_1-k_2}(z)$. Якщо $n-k_1-k_2\geq 1$, ці викладки можна продовжити; кінцевий висновок формулюється так: будь який многочлен $P_n(z)$ степеня $n\geq 1$ при старшому коефіцієнті $a_n\neq 0$ єдиним (з точністю до порядків співмножників) чином може бути представлений у вигляді $P_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}(z-z_3)^{k_3}...(z-z_s)^{k_s}$, де $z_1, z_2, z_3, ..., z_s$ – (попарно різні) корені многочлена, $k_1,k_2,k_3,...,k_s$ їх кратності, s – кількість різних коренів. Загальна кількість коренів многочлена з урахуванням їх кратностей рівна $\boldsymbol{n}$: $k_1+k_2+k_3+...+k_s=n$.

Б. Многочлени з дійсними коефіцієнтами. Розглянемо многочлен $P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+...+a_1z+a_0$ від комплексної змінної z, якщо його коефіцієнти $a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n$ – дійсні числа. Сформулюємо ряд властивостей такого многочлена.

1. Якщо $\bar{z}$ – число, спряжене до числа z, то $P_n(\bar{z})=\overline{P_n(z)}$.

$$P_n(\bar{z})=a_n\bar{z}^n+a_{n-1}\bar{z}^{n-1}+a_{n-2}\bar{z}^{n-2}+...+a_1\bar{z}+a_0=\bar{a}_n\bar{z}^n+\bar{a}_{n-1}\bar{z}^{n-1}+\bar{a}_{n-2}\bar{z}^{n-2}+...+\bar{a}_1\bar{z}+\bar{a}_0=$$

$$=\overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\overline{a_{n-2}z^{n-2}}+...+\overline{a_1z}+\bar{a}_0=\overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+...+a_1z+a_0}=\overline{P_n(z)}$$

2. Якщо $z_1=\alpha_1+i\beta_1$ – корінь многочлена $P_n(z)$, то $z_2=\bar{z}_1=\alpha_1-i\beta_1$ – також корінь цього многочлена.

3. Якщо $z_1=\alpha_1+i\beta_1$ – корінь многочлена з дійсними коефіцієнтами $P_n(z)$, то $P_n(z)$ без остачі ділиться на квадратний тричлен z^2+pz+q, де $p=-2\alpha_1$, $q=\alpha_1^2+\beta_1^2$.

4. Якщо $z_1=\alpha_1+i\beta_1$ – корінь многочлена $P_n(z)$ кратності k, то $z_2=\bar{z}_1=\alpha_1-i\beta_1$ – корінь цього ж многочлена тієї ж кратності.

5. Будь який многочлен n-го степеня $P_n(z)$ може бути представлений, і притомуєдиним (з точністю до порядку співмножників)чином, увигляді

$$P_n(z)=a_n(z-x_1)^{k_1}(z-x_2)^{k_2}...(z-x_s)^{k_s}(z^2+p_1z+q_1)^{l_1}(z^2+p_2z+q_2)^{l_2}...(z^2+p_rz+q_r)^{l_r},$$

де $x_1,x_2,...,x_s$ – попарно різні дійсні корені цього многочлена, $k_1,k_2,...,k_s$ – їх кратності, квадратні тричлени (відповідають попарно різним парам спряжених коренів $\alpha_j\pm i\beta_j$ кратностей $l_1,l_2,...,l_r$) $z^2+p_jz+q_j$, $j=1,2,...,r$ з дійсними коефіцієнтами не мають дійсних коренів (тобто $p_j^{\,2}-4q_j<0$), $\boldsymbol{k_1+k_2+...+k_s+2(l_1+l_2+...+l_r)=n}$.

1.2.2. Раціональні функції та їх розклад у суму простих дробів.

А. Означення раціональних функцій і простих дробів.

Означення. *Раціональною функцією* називається відношення двох многочленів

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^n+b_{m-1}x^{n-1}+b_{m-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0}.$$

Змінна x – дійсна, коефіцієнти обох многочленів – дійсні числа, $a_n\neq 0, b_m\neq 0$, $n\geq 0, m\geq 1$.

Означення. Раціональна функція (дріб) називається *правильною,* якщо $m>n$; якщо $m\leq n$ – раціональний дріб називається неправильним. Будь який неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлена степеня $n-m$ і правильного дробу: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=L_{n-m}(x)+\frac{R_{n1}(x)}{Q_m(x)}$, $n_1<m$; знаходження цілої частини $L_{n-m}(x)$ і остачі $R_{n1}(x)$ може бути виконано, наприклад, за допомогою процедури ділення «кутом». У подальшому прийматимемо, що $f(x)$ – правильний дріб.

Означення. *Простими дробами* називаються раціональні функціїнаступних чотирьох типів:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k\geq 2$;

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

IV. $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $k\geq 2$.

Б. Теорема про розклад правильної раціональної функції у суму простих дробів.

Нехай знаменник правльного раціонального дробу представлений у вигляді: $Q_m(x)=b_m(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$, $k_1+k_2+\ldots+k_s+2(l_1+l_2+\ldots+l_r)=m$. Тоді дріб $f(x)$ єдиним чином може бути представленийяк суми простих дробівтакої структури:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_{1,1}}{x-x_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2}+\frac{A_{1,3}}{(x-x_1)^3}+\ldots+\frac{A_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_{2,1}}{x-x_2}+\frac{A_{2,2}}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2,k_2}}{(x-x_1)^{k_2}}+\ldots+$$

$$+\frac{A_{s,1}}{x-x_s}+\frac{A_{s,2}}{(x-x_s)^2}+\ldots+\frac{A_{s,k_s}}{(x-x_s)^{k_s}}+\frac{M_{1,1}x+N_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_{1,2}x+N_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{M_{1,l_1}x+N_{1,l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+$$

$$+\frac{M_{2,1}x+N_{2,1}}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{M_{2,2}x+N_{2,2}}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\ldots+\frac{M_{2,l_2}x+N_{2,l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}}+\ldots+\frac{M_{r,1}x+N_{r,1}}{x^2+p_rx+q_r}+\frac{M_{r,2}x+N_{r,2}}{(x^2+p_rx+q_r)^2}+\ldots+$$

$$+\frac{M_{r,l_r}x+N_{r,l_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}}.$$

Дано функцію

$$f(x)=\frac{2x^7+9x^6-58x^4+81x^3+655x^2+436x-1140}{(x-2)^2(x^2+5x+8)^2}.$$

Тут

$$P_7(x)=2x^7+9x^6-58x^4+81x^3+655x^2+436x-1140,$$

$$Q_6(x)=(x-2)^2(x^2+5x+8)^2=x^6+6x^5+5x^4-44x^3-92x^2+64x+256.$$

Після ділення «кутом» отримаємо $f(x)=2x-3+\frac{8x^5+45x^4+133x^3+251x^2+116x-372}{(x-2)^2(x^2+5x+8)^2}$.

Згідно теореми, отриманий правильний дріб повинен представитись у вигляді:

$$\frac{8x^5+45x^4+133x^3+251x^2+116x-372}{(x-2)^2(x^2+5x+8)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+5x+8}+\frac{Ex+F}{(x^2+5x+8)^2},\ (*)$$

де A, B, C, D, E, F – невідомі поки що коефіцієнти («невизначені коефіцієнти»). Приводимо суму в правій частині рівності (*) до спільного знаменника:

$$\frac{8x^5+45x^4+133x^3+251x^2+116x-372}{(x-2)^2(x^2+5x+8)^2}=\overset{(x-2)(x^2+5x+8)^2}{\frac{A}{x-2}}+\overbrace{\frac{B}{(x-2)^2}}^{(x^2+5x+8)^2}+\overbrace{\frac{Cx+D}{x^2+5x+8}}^{(x-2)^2(x^2+5x+8)}+\overbrace{\frac{Ex+F}{(x^2+5x+8)^2}}^{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x^2+5x+8)^2+B(x^2+5x+8)^2+(Cx+D)(x-2)^2(x^2+5x+8)+(Ex+F)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+5x+8)^2}.$$

Дроби в правій і лівій частинахцієї рівності рівні, так як їх знаменники співпадають, повинні бути рівні і чисельники:

$$8x^5+45x^4+133x^3+251x^2+116x-372=$$

$$=A(x-2)(x^2+5x+8)^2+B(x^2+5x+8)^2+(Cx+D)(x-2)^2(x^2+5x+8)+(Ex+F)(x-2)^2$$

Невизначені коефіцієнти знаходяться з цієї рівності. Так, підставивши в неї значення $x=2$, отримаємо:

$$8\cdot 2^5+45\cdot 2^4+133\cdot 2^3+251\cdot 2^2+116\cdot 2-372=B(2^2+5\cdot 2+8)^2\Rightarrow 484B=2904\Rightarrow B=6.$$

Якщо підставити в цю рівність корені тричлена x^2+5x+8, будуть визначені E і F. Такий прийом знаходження невизначених коефіцієнтів називають *способом часткових значень*. Другий метод полягає в тому, що розкриваються дужки у правій частині рівності і прирівнюються коефіцієнти при однакових степенях x:

$$8x^5+45x^4+133x^3+251x^2+116x-372=$$

$$=A(x-2)(x^2+5x+8)^2+B(x^2+5x+8)^2+(Cx+D)(x-2)^2(x^2+5x+8)+(Ex+F)(x-2)^2=$$

$$=A(x^5+8x^4+21x^3-2x^2-96x-128)+B(x^4+10x^3+41x^2+80x+64)+$$

$$+(Cx+D)(x^4+x^3-8x^2-12x+32)+(Ex+F)(x^2-4x+4)=$$

$$=(A+C)x^5+(8A+B+C+D)x^4+(21A+10B-8C+D+E)x^3+$$

$$+(-2A+41B-12C-8D-4E+F)x^2+(-96A+80B+32C-12D+4E-4F)x+$$

$$+(-128A+64B+32D+4F).$$

Коефіцієнти при степенях x справа і зліва від знаку рівності:

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & A+C=8; \\
x^4 & 8A+B+C+D=45; \\
x^3 & 21A+10B-8C+D+E=133; \\
x^2 & -2A+41B-2C-8D-4E+F=251; \\
x^1 & -96A+80B+32C-12D+4E-4F=116\Rightarrow 24A-20B-8C+3D-E+F=-29; \\
x^0 & -128A+64B+32D+4F=-372\Rightarrow 32A-16B-8D-F=93.
\end{array}$$

Цю систему можнарозв'язувати будь яким з відомих способів. Скористуємось правилом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&1&0&0&0\\8&0&1&1&0&0\\21&10&-8&1&1&1\\-2&41&-12&-8&-4&1\\24&-20&-8&3&-1&1\\32&-16&0&-8&0&-1\end{vmatrix}=14640;\ \Delta_A=\begin{vmatrix}8&0&1&0&0&0\\45&0&1&1&0&0\\133&10&-8&1&1&1\\251&41&-12&-8&-4&1\\-29&-20&-8&3&-1&1\\93&-16&0&-8&0&-1\end{vmatrix}=73200;$$

$$\Delta_B=\begin{vmatrix}1&8&1&0&0&0\\8&45&1&1&0&0\\21&133&-8&1&1&1\\-2&251&-12&-8&-4&1\\24&29&-8&3&-1&1\\32&-93&0&-8&0&-1\end{vmatrix}=87840;\ \Delta_C=\begin{vmatrix}1&0&8&0&0&0\\8&0&45&1&0&0\\21&10&133&1&1&1\\-2&41&251&-8&-4&1\\24&-20&29&3&-1&1\\32&-16&93&-8&0&-1\end{vmatrix}=43920;$$

$$\Delta_D=\begin{vmatrix}1&0&1&8&0&0\\8&0&1&45&0&0\\21&10&-8&133&1&1\\-2&41&-12&251&-4&1\\24&-20&-8&29&-1&1\\32&-16&0&-93&0&-1\end{vmatrix}=-58560;\ \Delta_E=\begin{vmatrix}1&0&1&0&8&0\\8&0&1&1&45&0\\21&10&-8&1&133&1\\-2&41&-12&-8&251&1\\24&-20&-8&3&29&1\\32&-16&0&-8&-93&-1\end{vmatrix}=-58560;$$

$$\Delta_F=\begin{vmatrix}1&0&1&0&0&8\\8&0&1&1&0&45\\21&10&-8&1&1&133\\-2&41&-12&-8&-4&251\\24&-20&-8&3&-1&29\\32&-16&0&-8&0&-93\end{vmatrix}=43920;$$

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=5;\quad B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=6;\quad ;\ ;\ C=F=\frac{\Delta_C}{\Delta}=3;\quad D=E=\frac{\Delta_D}{\Delta}=-4\,.$$

Отже, функція $f(x)=\dfrac{2x^7+9x^6-58x^4+81x^3+655x^2+436x-1140}{(x-2)^2(x^2+5x+8)^2}$ представляється у вигляді: $f(x)=2x-3+\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{6}{(x-2)^2}+\dfrac{3x-4}{x^2+5x+8}+\dfrac{4x-3}{(x^2+5x+8)^2}$.

Наостанок відмітимо, що при розв'язуванні задач потрібно комбінувати методи часткових значень і порівняння коефіцієнтів при степенях x, тобто виключати коефіцієнти, знайдені по частковим значенням, з системи рівнянь.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Спростити наведені вирази:

а) $1+i+2+i+3-i$; б) $(2-8i)(76-3,5i)$; в) $\dfrac{1-i}{1+i}$; г) $\left(2+4i\right)^3$.

2. Із рівності комплексних чисел знайти x і y:

а) $2 + 5ix - 3iy = 14i + 3x - 5y$; б) $aix + biy - a = i - ax - by$.

3. Подати у тригонометричній формі комплексні числа:

а) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

4. Виконати перетворення:

а) $5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $4\left(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ\right) : 2\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)$.

5. Обчислити:

а) $\sqrt[6]{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$; б) $\sqrt[3]{-2+2i}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt{3-i}}$.

6. Знайти формулу для обчислення $\sin n\varphi$; $\cos n\varphi$.

7. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i,\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i.\end{cases}$ б) $\begin{cases}(2+i)x+(92-i)y=6,\\(3+2i)x+(3-2i)y=8.\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+yi-2z=10,\\x-y+2iz=20,\\ix+3iy-(1+i)z=30.\end{cases}$

8. Обчислити:

а) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; б) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

9. Нехай $\varpi=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Обчислити:

а) $\left(a+b\varpi+c\omega^2\right)\left(a+b\omega^2+c\varpi\right)$; б) $(a+b)(a+b\omega)\left(a+b\omega^2\right)$;

в) $\left(a+b\omega+c\varpi^2\right)^3+\left(a+b\omega^2+c\varpi\right)^3$; г) $\left(a\varpi^2+b\varpi\right)\left(b\varpi^2+a\varpi\right)$.

10. Розв'язати рівняння:

а) $x^4-3x^2+4=0$; б) $x^4-30x^2+289=0$.

в) $|x|-x=1+2i$; г) $|x|+x=2+i$.

11. 1)Довести тотожність $|x+y|^2+|x-y|^2=2\left(|x|^2+|y|^2\right)$. Який її геометричний зміст?

2)Довести, що будь-яке комплексне число z, відмінне від -1, модуль якого 1, можна подати у вигляді $z=\frac{1+ti}{1-ti}$, де t– дійсне число.