Сергій КАСЯРУМ Костянтин ГРИГОРЕНКО Владислав ДЕНДАРЕНКО

ПРАКТИКУМ

РЯДИ

Черкаси 2023

Зміст

1. Основні означення.

Означення. Сума членів нескінченної числової послідовності $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ називається *числовим рядом*

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При цьому числа $u_1, u_2, ...$ будемо називати *членами ряду*, а u_n – *загальним членом* ряду.

Означення. Суми $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n=1,\ 2,\ ...$ називаються *частинними сумами* ряду.

Таким чином, можна розглядати послідовності частинних сум ряду S_1, S_2, ..., S_n, ...

Означення. Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *збіжним*, якщо збігається послідовність його частинних сум.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Означення. Якщо послідовність частинних сум ряду збігається, тобто не має границі, або має нескінченну границю, то ряд називається *розбіжним* і йому не ставиться у відповідність жодна сума.

2. Властивості рядів.

1) Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути або додати скінченну кількість членів ряду.

2) Розглянемо два ряди $\sum u_n$ та $\sum Cu_n$, де C – стале число.

Теорема. *Якщо ряд $\sum u_n$ збігається і його сума рівна S, то ряд $\sum Cu_n$ теж збігається і його сума рівна CS. ($C \neq 0$).*

3) Розглянемо два ряди $\sum u_n$ та $\sum v_n$.

Сумою або *різницею* цих рядів буде називатися ряд $\sum(u_n \pm v_n)$, де елементи отримані у результаті додавання (віднімання) початкових елементів з однаковими номерами.

Теорема. *Якщо ряди $\sum u_n$ та $\sum v_n$ збіжні і їх суми рівні відповідно S і σ, то ряд $\sum(u_n \pm v_n)$ теж збіжний і його сума рівна S + σ.*

$$\sum(u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma .$$

Різниця двох збіжних рядів також буде збіжним рядом.

Сума збіжного і розбіжного рядів є ряд розбіжний.

Про суму двох розбіжних рядів загального твердження зробити не можна.

При вивченні рядів розв'язують, в основному, дві задачі: дослідження на збіжність та знаходження суми ряду.

3. Критерій Коші (необхідні та достатні умови збіжності ряду).

Для того, щоб послідовність $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер N, що при n > N і будь-якому p > 0, де p – ціле число, виконувалася б рівність:

$$\left| a_{n+p} - a_n \right| < \varepsilon .$$

Доведення (необхідність).

Нехай $a_n \to a$, тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер *N*, що нерівність $\left| a - a_n \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ виконується при *n* > *N*. При *n* > *N* і будь-якому цілому *p* > 0 виконується також нерівність $\left| a - a_{n+p} \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Враховуючи обидві нерівності, отримаємо:

$$\left| a_{n+p} - a_n \right| = \left| (a_{n+p} - a) + (a - a_n) \right| \le \left| a_{n+p} - a \right| + \left| a - a_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Необхідність доведена.

Доведення достатності розглядати не будемо.

Сформулюємо *критерій Коші* для ряду.

Для того,щоб ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *був збіжним, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існував номер N такий, що при n > N і будь-якому p > 0 виконувалася б нерівність:*

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p} \right| < \varepsilon .$$

Однак, на практиці використовувати безпосередньо критерій Коші не дуже зручно. Тому, зазвичай, використовуються більш прості ознаки збіжності.

Якщо ряд $\sum u_n$ – збіжний, то необхідно, щоб загальний член u_n прямував до нуля. Однак, ця умова не є достатньою. Можна говорити лише про те, що, якщо загальний член не прямує до нуля, то ряд точно розбігається. Наприклад, так званий *гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ є розбіжним, хоча його загальний член і прямує до нуля.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + ... + \frac{n}{3n-1} + ...$

Знайдемо $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$ – необхідна ознака збіжності не виконується, отже, ряд розбіжний.

2) Якщо ряд збігається, то послідовність його частинних сум обмежена.

Однак, ця ознака також не є достатньою.

Наприклад, ряд 1–1+1–1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+$… розбіжний, так як розбіжна послідовність його частинних сум в силу того, що

$$S_n = \begin{cases} 0, & n - \textit{парні} \\ 1, & n - \textit{непарні} \end{cases}$$

Однак, при цьому послідовність частинних сум обмежена, так як $|S_n| < 2$ при будь-якому *n*.

4. Ряди з невід'ємними членами.

При вивченні знакосталих рядів обмежимося розгляданням рядів з невід'ємними членами, так як при простому множенні на –1 з цих рядів можна отримати ряди з від1ємними членами.

Теорема. *Для збіжності ряду* $\sum u_n$ *з невід'ємними членами необхідно і достатньо, щоб частинні суми ряду були обмежені.*

4.1. Ознака порівняння рядів з невід'ємними членами.

Нехай дано два ряди $\sum u_n$ та $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. *Якщо* $u_n \leq v_n$ *при будь-якому* n, *то із збіжності ряду* $\sum v_n$ *слідує збіжність ряду* $\sum u_n$, *а із збіжності ряду* $\sum u_n$ *слідує розбіжність ряду* $\sum v_n$.

Доведення. Позначимо через S_n та σ_n частинні суми рядів $\sum u_n$ і $\sum v_n$. Так як за умовою теореми ряд $\sum v_n$ збігається, то його частинні суми обмежені, тобто при усіх n $\sigma_n < M$, де M – деяке число. Але, так як $u_n \leq v_n$, то $S_n \leq \sigma_n$ і частинні суми ряду $\sum u_n$ теж обмежені, а цього достатньо для збіжності.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність: $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n} + ...$

Так як $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонічний ряд $\sum \frac{1}{n}$ – розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Так як $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ – збіжний (як спадна геометрична прогресія), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ теж збігається.

Також використовується наступна ознака збіжності:

Теорема. *Якщо* $u_n > 0,\ \ v_n > 0$ *іiснує границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = h$*, де* h *– число, відмінне від нуля, то ряди* $\sum u_n$ *і* $\sum v_n$ *ведуть себе однаково в сенсі збіжності.*

5. Ознака Даламбера.

(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французький математик)

Якщо для ряду $\sum u_n$ *з додатними членами існує таке число* $q < 1$*, що для усіх достатньо великих n виконується нерівність:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *– збіжний, а якщо для усіх достатньо великих n виконується умова*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *– розбіжний.*

5.1. Гранична ознака Даламбера.

Гранична ознака Даламбера є наслідком з наведеної вище ознаки Даламбера.

Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$*, то при* $\rho < 1$ *ряд збіжний, а при* $\rho > 1$ *– розбіжний. Якщо* $\rho = 1$*, то на питання про збіжність відповісти не можна.*

Приклад. Визначити збіжність ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n};\quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Висновок: ряд збіжний.

Приклад. Визначити збіжність ряду $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

$$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Висновок: ряд збіжіний.

5.2. Радикальна ознака Коші.

(Огюстен-Луї Коші (1789 – 1857) – французький математик)

Якщо для ряду $\sum u_n$ *з невід'ємними членами існує таке число* $q<1$*, що для усіх достатніх великих n виконується нерівність*

$$\sqrt[n]{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *збігається, якщо ж для усіх достатньо великих n виконується нерівність*

$$\sqrt[n]{u_n}\ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *розбігається.*

Наслідок. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд збігається, а при $\rho>1$ ряд розбігається.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1.$$

Висновок: ряд збіжний.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Тобто ознака Коші не дає відповіді на питання про збіжність ряду. Перевіримо виконання необхідних умов збіжності. Як було сказано вище, якщо ряд збіжний, то загальний член ряду прямує до нуля.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

таким чином, необхідна умова збіжності не виконується, значить, ряд розбіжний.

5.3. Інтегральна ознака Коші.

Якщо $\varphi(x)$ *– неперервна додатна функція, що спадає на проміжку* $[1; +\infty)$, *то ряд* $\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ *і невласний інтеграл* $\int\limits_1^{\infty}\varphi(x)dx$ *однакові у сенсу збіжності.*

Приклад. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$, так як відповідний невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ називається *загальногармонічним рядом*.

Наслідок. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні функції на інтервалі $(a; b]$ і $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = h,\quad h \neq 0,$ то інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ ведуть себе однаково у сенсі збіжності.

6. Знакозмінні ряди.

6.1. Знакочерговані ряди.

Знакочергований ряд можна записати у вигляді:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$$

де $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,...$

6.1.1. Ознака Лейбніца.

(Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646 – 1716) – німецький математик)

Якщо у знакочергованого ряду $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ...$ *абсолютні величини* u_i *спадають* $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ *і загальний член прямує до нуля* $u_n \to 0$*, то ряд збігається.*

6.2. Абсолютна та умовна збіжності рядів.

Розглянемо деякий знакозмінний ряд (з членами довільних знаків):

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

і ряд, складений з абсолютних величин членів ряду (1):
и ряд, складений з абсолютних величин членів ряду (1):

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{2}$$

Теорема. *Із збіжності ряду (*2*) слідує збіжність ряду (*1*).*

Доведення. Ряд (2) є рядом з невід'ємними членами. Якщо ряд (2) збігається, то за критерієм Коші для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число N, таке, що при $n > N$ і будь-якому цілому $p > 0$ вірна нерівність:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

По властивості абсолютних величин:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon,$$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Тобто, за критерієм Коші із збіжності ряду (2) слідує збіжність ряду (1).

Означення. Ряд $\sum u_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збіжний ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, що для знакосталих рядів поняття збіжності і абсолютної збіжності співпадають.

Означення. Ряд $\sum u_n$ називається *умовно збіжним*, якщо він збігається, а ряд $\sum |u_n|$ розбігається.

6.3. Ознаки Даламбера та Коші для знакозмінних рядів.

Нехай ряд $\sum u_n$ – знакозмінний ряд.

Ознака Даламбера. *Якщо існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$*, то при* $\rho < 1$ *ряд* $\sum u_n$ *буде абсолютно збіжним, а при* $\rho > 1$ *ряд буде розбіжним. При* $\rho = 1$ *ознака не дає відповіді про збіжність ряду.*

Ознака Коші. *Якщо існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$*, то при* $\rho < 1$ *ряд* $\sum u_n$ *буде абсолютно збіжним, а при* $\rho > 1$ *ряд буде розбіжним. При* $\rho = 1$ *ознака не дає відповіді про збіжність ряду.*

6.4. Властивості абсолютно збіжних рядів.

1) ***Теорема.*** *Для абсолютної збіжності ряду* $\sum u_n$ *необхідно і достатньо, щоб його можна було представити у вигляді різниці двох збіжних рядів з невід'ємними членами.*

Наслідок. Умовно збіжний ряд є різницею двох розбіжних рядів з невід'ємними членами, що прямують до нуля.

2) У збіжному ряду будь-яке групування членів ряду, що не змінює їх порядок, зберігає збіжність і величину ряду.

3) Якщо ряд збігається абсолютно, то ряд, отриманий з нього будь-якою перестановкою членів, також абсолютно збігається і має ту ж суму.

Перестановкою членів умовно збіжного ряду можна отримати умовно збіжний ряд, який має будь-яку наперед задану суму, і, навіть, розбіжний ряд.

4) ***Теорема.*** *При будь-якому групуванні членів абсолютно збіжного ряду (при цьому кількість груп може бути як скінченною, так і нескінченною і кількість членів у групі може бути як скінченною, так і нескінченною) отримаємо збіжний ряд, сума якого рівна сумі початкового ряду*.

5) Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно збіжні та їх суми рівні відповідно S і σ, то ряд, складений з усіх добутків виду $u_i v_k, \quad i,k = 1,2,...$, узятих у довільному порядку, також збігається абсолютно і його сума рівна $S\cdot\sigma$ – добутку сум рядів, що множаться.

Якщо ж множити умовно збіжні ряди, ьл у результаті можна отримати розбіжний ряд.

7. Функціональні послідовності.

Означення. Якщо членами ряду будуть не числа, а функції від x, то ряд називається *функціональним*.

Дослідження на збіжність функціональних рядів складніше, ніж дослідження числових рядів. Один і той же функціональний ряд може при одних значеннях змінної x збігається, а при інших – розбігається. Тому питання збіжності функціональних рядів зводиться до визначення тих значень змінної x, при яких ряд збігається.

Сукупність таких значень називається *областю збіжності*.

Так як границею кожної функції, що входить в область збіжності ряду, є деяке число, що границею функціональної послідовності буде деяка функція:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Означення. Послідовність $\{f_n(x)\}$ *збігається* до функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ і будь-якої точки x з даного відрізка існує номер $N = N(\varepsilon; x)$, такий, що нерівність $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ виконується при $n > N$.

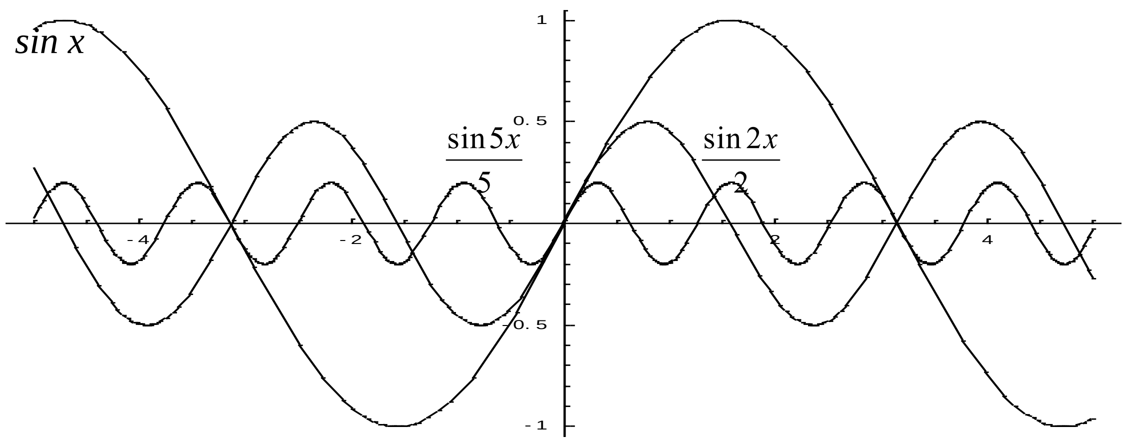
При обраному значенні $\varepsilon > 0$ кожній точці відрізка $[a;\ b]$ відповідає свій номер і, отже, номерів, що відповідають усім точкам відрізка $[a;\ b]$, буде нескінченна множина. Якщо вибрати з усіх цих номерів найбільший, то цей номер підійде для усіх точок відрізка $[a;\ b]$, тобто буде загальним для усіх точок.

Означення. Послідовність $\{f_n(x)\}$ *рівномірно збіжна* до функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$, якщо для любого числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$, такий, що нерівність $\left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$ виконується при $n > N$ для усіх точок відрізка $[a;\ b]$.

Приклад. Розглянемо послідовність $\dfrac{\sin x}{1}, \dfrac{\sin 2x}{2}, ..., \dfrac{\sin nx}{n}, ...$

Дана послідовність збігається на усій числовій осі до функції $f(x) = 0$, так як $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{\sin nx}{n} = 0, \quad -\infty < x < \infty$

Побудуємо графік цієї послідовності:



Як видно, при збільшенні числа n графік послідовності наближається до осі Оx.

8. Функціональні ряди.

Означення. *Частинними сумами* функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називаються функції $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,\dots$.

Означення. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *збіжним* у точці $x=x_0$, якщо у цій точці збіжна послідовність його частинних сум.

Границя послідовності $\{S_n(x_0)\}$ називається сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точці x_0.

/***Означення.*** Сукупність усіх значень x, для яких збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *областю збіжності* ряду.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *рівномірно збіжним* на відрізку $[a; b]$, якщо рівномірно збігається на цьому відрізку послідовність частинних сум цього ряду.

Теорема (*критерій Коші рівномірної збіжності ряду*).

Для рівномірної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа* $\varepsilon > 0$ *існував такий номер* $N(\varepsilon)$*, що при* $n > N$ *і будь-якому цілому* $p > 0$ *нерівність* $\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$ *буде виконуватись для усіх* x *на відрізку* $[a; b]$.

Теорема (*ознака рівномірної збіжності Вейєрштрасса*). (Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс (1815 – 1897) – німецький математик)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається рівномірно і абсолютно на відрізку* $[a; b]$*, якщо модулі його членів на тому ж відрізку не перевищують відповідних членів збіжного числового ряду з додатними членами*:

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n + \dots$$

тобто має місце нерівність:

$$|u_n(x)| \le M_n.$$

Ще кажуть, що у цьому випадку функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *мажорується* числовим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Так як $|\cos nx| \le 1$ завжди, то очевидно, що $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$.

При цьому відомо, що загальногармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при α = 3 > 1 збігається, то, за ознакою Вейєрштрасса, ряд, що досліджується, рівномірно збіжний на будь-якому інтервалі.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

На на відрізку [–1; 1] виконується нерівність $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$, тобто, за ознакою Вейєрштрасса на цьому відрізку ряд збіжний, а на інтервалах (-∞; –1) ∪ (1; +∞) розбіжний.

9. Властивості рівномірно збіжних рядів.

1) *Теорема про неперервність суми ряду.*

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – неперервні на відрізку [a; b] функції і ряд збіжний рівномірно, то і його сума S(x) є неперервна функція на відрізку [a; b].

2) *Теорема про почленне інтегрування ряду.*

Рівномірно збіжний на відрізку [a; b] ряд з неперервними членами можна почленно інтегрувати на цьому відрізку, тобто ряд, складений з інтегралів від *його членів по відрізку* $[a;\ b]$, *збігається до інтеграла від суми ряду по цьому відрізку:*

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}u_n(x)dx;\quad \alpha,\beta\in[a,b]$$

3) ***Теорема про почленне диференціювання ряду.***

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, *який збіжний на відрізку* $[a;\ b]$, *є неперервні функції, що мають неперервні похідні, і ряд, складений з цих похідних* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ *збігається на цьому відрізку рівномірно, то і заданий ряд збігається рівномірно і його диференціювати почленно:*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}$$

На основі того, що сума ряду є деяка функція від змінної *x*, можна виконувати операцію представлення будь-якої функції у вигляді ряду (розкладу функції в ряд), що має широке застосування при інтегруванні, диференціюванні та інших діях з функціями.

На практиці часто використовується розклад функції у степеневий ряд.

10. Степеневі ряди.

Означення. *Степеневим рядом* називається ряд виду

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ .$$

Для дослідження на збіжність степеневих рядів зручно використовувати ознаку Даламбера.

Приклад. Дослідити ряд на збіжність $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

Використовуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x|.$$

Отримаємо, що цей ряд збіжний при $|x| < 1$ і розбіжний при $|x| > 1$.

Тепер визначимо збіжність у граничних точках 1 и –1.

При $x = -1$: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$ ряд збіжний за ознакою Лейбніца (див. 6.1.1).

При $x = 1$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ ряд розбіжний (гармонічний ряд).

10.1. Теореми Абеля.

(Нільс Генрік Абель (1802 – 1829) – норвезьский математик)

Теорема. *Якщо степеневий ряд* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *збіжний при* $x = x_1$ *, то він збіжний і при цьому абсолютно для усіх* $|x| < |x_1|$.

Доведення. За умовою теореми, так як члени ряду обмежені, то

$$\left|a_nx_1^n\right| \le k,$$

де k – деяке стале число. Справедлива наступна нерівність:

$$\left|a_nx^n\right| = \left|a_nx_1^n\right|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le k\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

З цієї нерівності видно, що при $x < x_1$ чисельні величини членів нашого ряду будуть менші (але не більші) відповідних членів ряду правої частини записаної вище нерівності, які утворюють геометричну прогресію. Знаменник цієї прогресії $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ за умовою теореми менші за одиницю, отже, ця прогресія являє собою збіжний ряд.

Тому за ознакою порівняння робимо висновок, що ряд $\sum\left|a_nx^n\right|$ збігається, а значить ряд $\sum a_nx^n$ збігається абсолютно.

Таким чином, якщо степеневий ряд $\sum a_n x^n$ збіжний у точці x_1, то він абсолютно збіжний у будь-якій точці інтервалу довжини $2|x_1|$ з центром у точці $x = 0$.

Наслідок. Якщо при $x = x_1$ ряд розбіжний, то він розбіжний для усіх $|x| > |x_1|$.

Таким чином, для кожного степеневого ряду існує таке додатне число R, що при усіх x таких, що $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при усіх $|x| > R$ ряд розбіжний. При цьому число R називається *радіусом збіжності*. Інтервал $(-R; R)$ називається *інтервалом збіжності*.

Відмітимо, що цей інтервал може бути як замкненим з однієї або двох сторін, так і не замкненим.

Радіус збіжності може бути знайдений по формулі:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

Приклад. Знайти область збіжності ряду $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Знаходимо радіус збіжності $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n-1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|n| = |\infty|$.

Отже, даний ряд збіжний при будь-якому значення x. Загальний член цього ряду прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

Теорема. Якщо степеневий ряд $\sum a_n x^n$ збіжний для додатного значення $x = x_1$, то він збіжний рівномірно у будь-якому проміжку всередині $(-|x_1|; |x_1|)$.

10.2. Дії із степеневими рядами.

1) ***Інтегрування степеневих рядів.***

Якщо деяка функція $f(x)$ визначається степеневим рядом $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, то інтеграл цієї функції можна записати у вигляді ряду:

$$\int f(x)dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int a_n x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C\,.$$

2) ***Диференціювання степеневих рядів.***

Похідна функції, що визначається степеневим рядом, знаходиться по формулі:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}\,.$$

3) ***Додавання, віднімання, множення та ділення степеневих рядів.***

Додавання та віднімання степеневих рядів зводиться до відповідних операцій з їх членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \pm\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n\,.$$

Добуток двох степеневих рядів виражається формулою:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\,.$$

Коефіцієнти c_i знаходяться по формулі:

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0.$$

Ділення двох степеневих рядів виражається формулою:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n}=\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n.$$

Ля визначення коефіцієнтів q_n розглядаємо добуток $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, отриманий із записаної вище рівності і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \dots + q_n b_0 \end{cases}$$

10.3. Зображення функцій степеневими рядами. Ряди Тейлора і Маклорена.

(Брук Тейлор (1685 – 1731) – англійський математик,
Колін Маклорен (1698 – 1746) – шотландський математик)

Формули, що подають функцію $f(x)$ у вигляді степеневих рядів, мають вигляд:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \tag{3}$$

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!} + \dots \tag{4}$$

Кажуть, що ряд Маклорена (3) дає розвинення функції в ряд поблизу точки $x = 0$, а ряд Тейлора (4) – поблизу точки $x=c$. Справді, як далі буде показано, чим ближче x до точки розвинення функції $f(x)$ у ряд, тим меншою кількістю членів ряду буде досягнуто більшої точності при обчисленні $f(x)$.

Теорема *(достатня умова розвинення функції в ряд Маклорена). Якщо на проміжку $[-R;\ R]$ похідні будь-якого порядку для функції f(x) обмежені одним і тим самим числом $\left| f^{(n)}(x) \right| \le M$, то на інтервалі $(-R;\ R)$ функція f(x) може бути розвинена в ряд Маклорена). Іншими словами, ряд Маклорена для f(x) у кожній точці із $x \in (-R;\ R)$ збігається абсолютно.*

Приклад. Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x) = 2^x$.

Знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$$f(x) = 2^x, \qquad f(0) = 2^0 = 1,$$
$$f'(x) = 2^x \ln 2, \qquad f'(0) = \ln 2,$$
$$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2, \qquad f''(0) = (\ln 2)^2,$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$f^n(x) = 2^x (\ln 2)^n, \qquad f^n(0) = \ln^n 2,$$
$$\dots \qquad \dots$$

Оскільки $0 < \ln 2 < 1$, то для будь-якого фіксованого x маємо $\left| f^{(n)}(x) \right| = 2^x \ln^n 2 < 2^x$, тобто достатня умова розвинення функції $f(x) = 2^x$ у ряд Маклорена виконується і ряд Маклорена для неї $2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \dots + \frac{x^n \ln^n 2}{n!} + \dots$ буде абсолютно збіжним для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Зауваження. Залишок ряду Маклорена $r_n(x)$ можна замінити одним залишковим членом $\bar{r}_n(x)$, який у формі Лагранжа такий:

$$\bar{r}_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), -R < \xi < R.$$

Тоді ряд Маклорена (3) набирає вигляду формули Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \bar{r}_n(x).$$

Теорема. *Для того щоб функцію f(x) можна було розвинути в ряд Маклорена на інтервалі $x \in (-R;\ R)$, необхідно і достатньо, щоб на цьому інтервалі* $\lim_{x \to n} \bar{r}_n(x) = 0$.

10.4. Ряд Маклорена для деяких елементарних функцій.

$$\left[\begin{array}{l} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\ \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{(-1)^n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\ \cos = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Область збіжності: $(-\infty;+\infty)$.

$$\left[\,(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\right.$$

Інтервал збіжності: (–1; 1).

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Область збіжності (–1; 1).

$$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

Область збіжності [–1; 1].

Використовуючи ці формули, можна у ряді випадків записати розвинення функції в ряд Маклорена без обчислення коефіцієнтів цього ряду (без обчислення похідних функцій).

Приклад. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x)=\sin^2 x$ і знайти область збіжності ряду.

Перетворимо функцію так: $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Скористаємось формулою розвинення в ряд Маклорена функції $\cos x$, тоді дістанемо:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}+\ldots=\frac{2}{2!}x-\frac{2^3}{4!}x^4+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Область збіжності новоутвореного ряду для $f(x)=\sin^2 x$ буде така ж, як і для $\cos x$, тобто $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

10.5. Розклад функцій у степеневі ряди.

Розклад функцій у степеневий ряд має велике значення для розв’язування задач дослідження функцій, диференціювання, інтегрування, розв’язування диференціальних рівнянь, обчислення границь, обчислення наближених значень функції.

Можливі різні способи розкладу функції у степеневий ряд. Такі способи як розклад за допомогою рядів Тейлора в Маклорена були розглянуті вище.

Існує також спосіб розкладання у степеневий ряд ***за допомогою алгебраїчного ділення.*** Це – самий простий спосіб розкладання, однак, використовується лише для розкладання в ряд алгебраїчних дробів.

Приклад. Розкласти у ряд функцію $\dfrac{1}{1-x}$.

Метод алгебраїчного ділення полягає у застосуванні загального правили ділення многочленів:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-x \\ \cline{2-2}
-\underline{1-x} & 1+x+x^2+x^3+\ldots \\
\quad -\ x & \\
\qquad \underline{x-x^2} & \\
\qquad\quad -\ x^2 & \\
\qquad\qquad \underline{x^2-x^3} & \\
\qquad\qquad\quad x^3 &
\end{array}
$$

Якщо застосувати до цієї функції формулу Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

то отримаємо: $\quad f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}; \quad f'(0)=1;$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0)=2;$$

$$f'''(x)=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}; \quad f'''(0)=3!;$$

……………………………………

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}; \quad f^{(n)}(0)=n!;$$

Отже, маємо: $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$

Розглянемо спосіб розкладу функції в ряд ***за допомогою інтегрування.***

За допомогою інтегрування можна розкладати у ряд таку функцію, для якої відомий або може бути легко знайдений розклад у ряд її похідної.

Знаходимо диференціал функції $df(x) = f'(x)dx$ та інтегруємо його в межах від 0 до x:

$$\int_0^x df(x) = \int_0^x f'(x)dx; \qquad f(x)\Big|_0^x = \int_0^x f'(x)dx;$$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx.$$

Приклад. Розкласти у ряд функцію $f(x) = \ln(1+x)$.

Розклад у ряд цієї функції по формулі Маклорена було розглянуте вище. Тепер розв'яжемо цю задачу за допомогою інтегрування.

При $f(0) = 0, \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ отримаємо за наведеною вище формулою:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx.$$

Розклад у ряд функції $\dfrac{1}{1+x}$ може бути легко знайдений способом алгебраїчного ділення аналогічно розглянутому вище прикладу:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... + (-1)^n x^n + ...$$

Тоді отримаємо:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

В результаті маємо:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...$$

Приклад. Розкласти у степеневий ряд функцію $arctgx$.

Застосуємо розклад у ряд за допомогою інтегрування:

$$f(x) = arctgx; \quad f(0) = 0; \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$$

Підінтегральна функція може бути розкладена у ряд методом алгебраїчного ділення:

$$\begin{array}{l|l}
-\;1 & 1+x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{1+x^2} & 1-x^2+x^4-\dots \\
\quad -\;-x^2 & \\
\quad \underline{-x^2-x^4} & \\
\qquad\quad -\;x^4 & \\
\qquad\quad \underline{x^4+x^6} & \\
\qquad\quad \dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

Тоді $arctgx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

У результаті маємо: $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$

10.6. Розв’язування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

За допомогою степеневих рядів можна інтегрувати диференціальні рівняння.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння виду:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)y = f(x).$$

Якщо усі коефіцієнти і права частина цього рівняння розкладаються у збіжні в деякому інтервалі степеневі ряди, то існує розв’язок цього рівняння у деякому малому околі нульової точки, що задовольняє початковим умовам.

Цей розв’язок можна представити степеневим рядом:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ...$$

Для розв’язку потрібно визначити невідомі сталі c_i.

Ця задача розв’язується ***методом порівняння невизначених коефіцієнтів.*** Записаний вираз для шуканої функції підставляємо у початкове диференціальне рівняння, виконуючи при цьому усі необхідні дії зі степеневими рядами (диференціювання, додавання, віднімання, множення та ін.).

Потім прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частини рівняння. З урахуванням початкових умов отримаємо систему рівнянь, з якої послідовно визначаємо коефіцієнти c_i.

Зауважимо, що цей метод використовується і до нелінійних диференціальних рівнянь

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' - xy = 0$ з початковими умовами $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Розв'язування рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \dots$$

Підставляємо отримані вирази у початкове рівняння:

$$(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \dots) - (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \dots) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + \dots = 0$$

Маємо: $2c_2 = 0$.

$$6c_3 - c_0 = 0$$

$$12c_4 - c_1 = 0$$

$$20c_5 - c_2 = 0$$

$$30c_6 - c_3 = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Підставивши початкові умови у вирази для шуканої функції та її першої похідної, маємо:

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0$$

Отже, маємо: $c_0 = 1; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = \frac{1}{6}; \quad c_4 = 0; \quad c_5 = 0; \; c_6 = \frac{1}{180}; \quad \dots$

Таким чином: $y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \dots$

Існує і інший метод розв’язування диференціальних рівнянь за допомогою рядів – ***метод послідовного диференціювання.***

Розглянемо той же приклад. Розв’язування диференціального рівняння будемо шукати у вигляді розкладу невідомої функції у ряд Маклорена:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Якщо задані початкові умови $y(0)=1$, $y'(0)=0$ підставити у початкове диференціальне рівняння, отримаємо, що $y''(0)=0$.

Запишемо диференціальне рівняння у вигляді $y''=xy$ і будемо послідовно диференціювати його по x:

$$y''' = y + xy'; \qquad y'''(0) = y(0) = 1;$$

$$y^{IV} = y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 0;$$

$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''; \quad y^{V}(0) = 0;$$

$$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 4;$$

……………………………………………….

Після підстановки отриманих значень отримаємо:

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots$$

11. Ряди Фур’є.

(Жан Батіст Жозеф Фур’є (1768 – 1830) – французький математик)

11.1. Тригонометричні ряди.

Означення. *Тригонометричним рядом* називається ряд виду:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \ldots$$

або, коротше, $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$.

Дійсні числа a_i, і b_i називаються *коефіцієнтами тригонометричного ряду.*

Якщо такий ряд збіжний, то його сума є періодична функція з періодом 2π, так як функції $\sin nx$ і $\cos nx$ також періодичні з періодом 2π.

Нехай тригонометричний ряд рівномірно збігається на відрізку $[-\pi;\ \pi]$, значить, і на будь-якому відрізку в силу періодичності, і його сума рівна $f(x)$.

Визначимо коефіцієнти цього ряду.

Для розв'язування цієї задачі скористуємось рівностями:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0,1,2,.. \\ \pi, & m = n, \quad m,n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m,n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx = 0, \quad m = 0,1,2,..., \quad n = 1,2,...$$

Справедливість цих рівностей витікає з використання до підінтегрального виразу тригонометричних формул

Так як функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-\pi;\ \pi]$, то існує інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)dx = \pi a_0$$

Такий результат отримуємо в результаті того, що $\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)dx = 0$.

Отримаємо: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Далі множимо вираз розкладу функції в ряд на $\cos nx$ і інтегруємо в межах від $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos^2 nx + b_n\cos nx\sin nx)dx = \pi a_n.$$

Отримуємо: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 1,2,...$

Аналогічно множимо вираз розкладу функції у ряд на $\sin nx$ і інтегруємо в межах від $-\pi$ до π.

Маємо: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,...$

Вираз для коефіцієнта a_0 є частинним випадком для виразу коефіцієнтів a_n.

Таким чином, якщо функція $f(x)$ – будь-яка періодична функція періоду 2π, неперервна на відрізку $[-\pi; \pi]$ або має на цьому відрізку скінченну кількість точок розриву першого роду, то коефіцієнти

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,...$$

Існують і називаються *коефіцієнтами Фур'є* для функції $f(x)$.

Означення. *Рядом Фур'є* для функції $f(x)$ називається тригонометричний ряд, коефіцієнти якого є коефіцієнтами Фур'є. Якщо ряд Фур'є функції $f(x)$ збіжний до неї в усіх її точках неперервності, то кажуть, що функція $f(x)$ розкладається у ряд Фур'є.

11.2. Достатні ознаки розкладання у ряд Фур'є.

Теорема (*Теорема Діріхле*). *Якщо функція f(x) має період 2π і на відрізку $[-\pi; \pi]$ неперервна або має скінченну кількість точок розриву першого роду і відрізок $[-\pi; \pi]$ можна розбити на скінченну кількість відрізків так, що всередині кожного з них функція f(x) монотонна, то ряд Фур'є для функції f(x) збіжний при усіх значеннях x, причому в точках неперервності функції f(x) його сума рівна f(x), а у точках розриву його сума рівна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, *тобто середньому арифметичному граничних значень зліва і справа. При цьому ряд Фур'є функції f(x) збіжний рівномірно на будь-якому відрізку, який належить інтервалу неперервності функції f(x).*

Функція $f(x)$, для якої виконуються умови теореми Діріхле, називається кусочно-монотонною на відрізку $[-\pi; \pi]$.

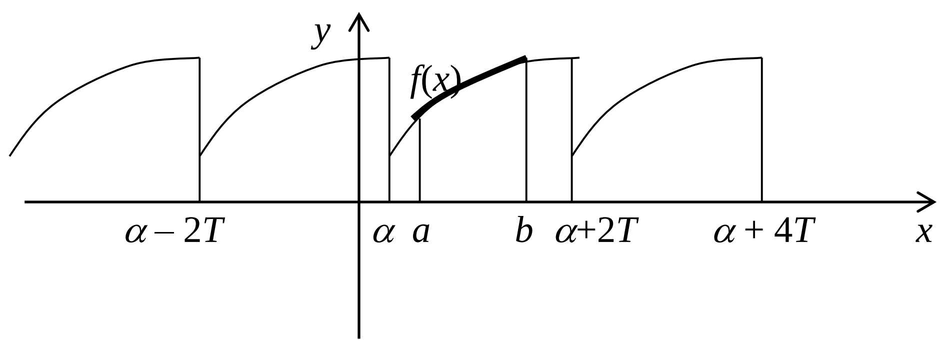
Теорема. *Якщо функція $f(x)$ має період 2π, крім того, $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ – неперервні функції на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ або мають скінченну кількість точок розриву першого роду на цьому відрізку, то ряд Фур'є функції $f(x)$ збіжний при усіх значеннях x, причому у точках неперервності його сума рівна $f(x)$, а у точках розриву вона рівна $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. При цьому ряд Фур'є функції $f(x)$ збіжний рівномірно на будь-якому відрізку, який належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.*

Функція, що задовольняє умовам цієї теореми, називається кусочно-гладкою на відрізку $[-\pi;\ \pi]$.

11.3. Розклад у ряд Фур'є неперіодичної функції.

Задача розкладу неперіодичної функції у ряд Фур'є не відрізняється від розкладу періодичної функції.

Припустимо, функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;\ b]$ і є на цьому відрізку кусочно-монотонною. Розглянемо довільну періодичну кусочно-монотонну функцію $f_1(x)$ з періодом $2T \geq |b - a|$, що співпадає з функцією $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$.



Таким чином, функція $f(x)$ була доповнена. Тепер функція $f_1(x)$ розкладається у ряд Фур'є. Сума цього ряду в усіх точках відрізка $[a;\ b]$ співпадає з функцією $f(x)$, тобто можна вважати, що функція $f(x)$ розкладена у ряд Фур'є на відрізку $[a;\ b]$.

Отже, якщо функція $f(x)$ задана на відрізку, що рівний 2π нічим не відрізняється від розкладу у ряд періодичної функції. Якщо ж відрізок, на якому задана функція, менший за 2π, то функція продовжується на інтервал (b; $a + 2\pi$) так, що умови розкладу у ряд Фур'є зберігались.

У цьому випадку продовження заданої функції на відрізок (інтервал) довжиною 2π може бути виконане нескінченною кількістю способів, тому суми отриманих рядів будуть різні, але вони будуть співпадати із заданою функцією $f(x)$ на відрізку [a; b].

11.4. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій.

Відмітимо наступні властивості парних і непарних функцій:

1) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x) - \textit{непарна}; \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \textit{парна}. \end{cases}$$

2) Добуток двох парних і непарних функцій є парною функцією;

3) Добуток парної і непарної функції – непарна функція;

Справедливість цих властивостей може бути легко доведена виходячи з означення парності та непарності функцій.

Якщо $f(x)$ – парна періодична функція з періодом 2π, що задовольняє умовам розкладу у ряд Фур'є, то можна записати:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0; \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

Таким чином, для парної функції ряд Фур'є записується:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Аналогічно отримуємо розклад у ряд Фур'є для непарної функції:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx; \qquad (n=1,2,...)$$

Приклад. Розкласти у ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)=x^3$ з періодом $T=2\pi$ на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Задана функція є непарною, отже, коефіцієнти Фур'є шукаємо у вигляді:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx; \qquad (n=1,2,...)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3\sin nxdx=\left\{\begin{array}{l} u=x^3;\quad dv=\sin nxdx; \\ du=3x^2dx;\quad v=-\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2\cos nxdx\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} u=x^2;\quad dv=\cos nxdx; \\ du=2xdx;\quad v=\dfrac{\sin nx}{n}; \end{array}\right\}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}+\frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx\right]\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}-\frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x\sin nxdx\right)=\left\{\begin{array}{l} u=x;\quad dv=\sin nxdx; \\ du=dx;\quad v=-\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\}=$$

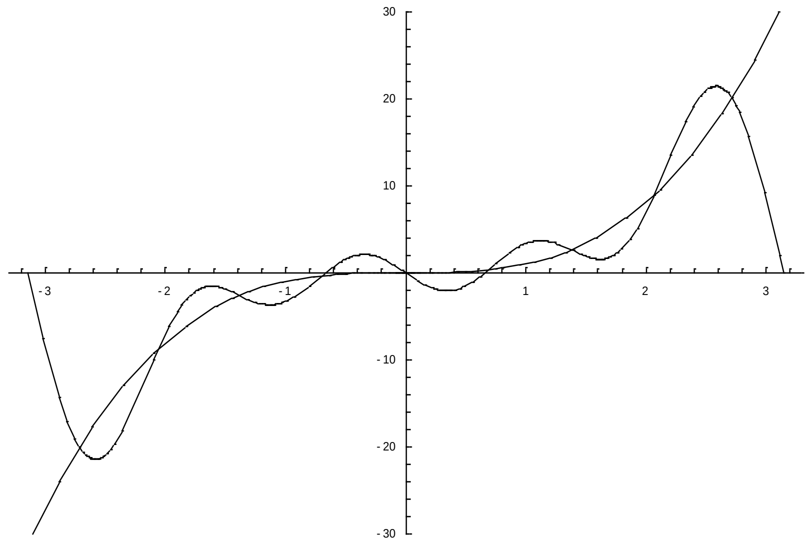
$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}-\frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}+\frac{6\pi\cos\pi}{n^3}-\frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)\right)=-\frac{2\pi^2\cos\pi n}{n}+\frac{12\cos\pi n}{n^3}=(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right).$$

Отримаємо:

$$x^3=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx.$$

Побудуємо графіки заданої функції та її розклад у ряд Фур'є, обмежившись першими чотирма членами ряду:



11.5. Ряди Фур'є для функцій будь-якого періоду.

Ряд Фур'є для функції $f(x)$ періоду $T = 2l$, неперервної або такої, що має скінченне число точок розриву першого роду на відрізку $[-l; l]$, має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right);$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для непарної функції довільного періоду розклад у ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для непарної функції:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x;$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx; \quad n=1,2,\ldots$$

11.6. Ряд Фур'є по ортогональній системі функцій.

Означення. Функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$, визначені на відрізку $[a; b]$, називаються *ортогональними* на цьому відрізку, якщо

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=0.$$

Означення. Послідовність функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, неперервних на відрізку $[a; b]$, називається *ортогональною системою функцій* на цьому відрізку, якщо усі функції попарно ортогональні:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=0; \qquad i\neq j.$$

Відмітимо, що ортогональність функцій не має на увазі перпендикулярність графіків цих функцій.

Означення. Система функцій називається *ортогональною та нормованою* (*ортонормованою*), якщо

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}.$$

Означення. Рядом Фур'є *по ортогональній системі функцій* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ називається ряд виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x),$$

коефіцієнти якого визначаються за формулою:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx},$$

де $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ – сума рівномірно збіжного на відрізку $[a;\ b]$ ряду по ортогональній системі функцій. Тут $f(x)$ – будь-яка функція, неперервна або така, що має скінченну кількість точок розриву першого роду на відрізку $[a;\ b]$.

У випадку ортонормованої системи функцій коефіцієнти визначаються:

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx..$$

11.7. Інтеграл Фур'є.

Нехай функція $f(x)$ на кожному відрізку $[-l;\ l]$, де l – будь-яке число, кусочно-гладка або кусочно-монотонна, крім того, $f(x)$ – абсолютно інтегрована функція, тобто збіжний невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$.

Тоді функція $f(x)$ розкладається у ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right);$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t dt, \quad n = 0,1,2,...,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t dt, \quad n = 1,2,... .$$

Якщо підставити коефіцієнти у формулу для $f(x)$, отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t dt \cos\frac{\pi n}{l}x + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t dt \sin\frac{\pi n}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t - x)dt .$$

Переходячи до границі при $l\to\infty$, можна довести, що $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt=0$ і

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt.$$

Позначимо $u_n=\frac{\pi n}{l}$; $\quad \Delta u_n=u_{n+1}-u_n=\frac{\pi}{l}$; $\qquad \frac{1}{l}=\frac{\Delta u_n}{\pi}$.

При $l\to\infty$ $\Delta u_n\to 0$.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta u_n\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos u_n(t-x)dt.$$

Можна довести, що границя суми, що знаходиться у правій частині рівності, рівний інтегралу:

$$\int\limits_{0}^{\infty}du\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)dt.$$

Тоді $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}du\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)dt$ – *подвійний інтеграл Фур'є.*

Отримаємо:

$$f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}\left[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux\right]du;$$

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut dt;$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut dt.$$

– представлення функції $f(x)$ *інтегралом Фур'є*.

Подвійний інтеграл Фур'є для функції $f(x)$ можна представити у комплексній формі:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}du\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iu(x-t)}dt.$$

11.8. Перетворення Фур'є.

Означення. Якщо $f(x)$ – будь-яка абсолютно інтегрована на усій числовій осі функція, неперервна або така, що має скінченну кількість точок розриву першого роду на кожному відрізку, то функція

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$$

називається *перетворенням Фур'є функції* $f(x)$.

Функція $F(u)$ називається також *спектральною характеристикою функції* $f(x)$.

Якщо $f(x)$ – функція, що представлена інтегралом Фур'є, то можна записати:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}du.$$

Ця рівність називається *оберненим перетворенням Фур'є.*

Інтеграли $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos uxdx$ та $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin uxdx$ називаються відповідно *косинус-перетворення Фур'є* і *синус-перетворення Фур'є.*

Косинус-перетворення Фур'є буде перетворенням Фур'є для парних функцій, синус-перетворення – для непарних.

Перетворення Фур'є використовується у функціональному аналізі, гармонічному аналізі, операційному численні, теорії лінійних систем та ін.

12. Застосування рядів для наближених обчислень.

Розвинення функцій у степеневі ряди використовується для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, наближеного розв'язування рівнянь і т. ін. При цьому в ряді Маклорена чи Тейлора для даної функції залишають кілька перших членів (як правило, не більше трьох), а решту відкидають. Похибка при наближених обчисленнях являє собою суму відкинутих членів ряду – залишок ряду. Для оцінки похибки, якщо ряд знакосталий, залишок ряду порівнюють із рядом нескінченно спадної геометричної прогресії. Якщо ряд знакочерговий, то за наслідком теореми Лейбніца похибка за абсолютною величиною не перевищує першого із відкинутих членів ряду.

Приклад. Обчислити з точністю до 0,001: $\sqrt[3]{9}$.

Зробимо такі перетворення: $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$. Скористаємось рядом Маклорена для функції $(1+x)^m$, узявши $x=\frac{1}{8}$, $m=\frac{1}{3}$. Тоді дістанемо:

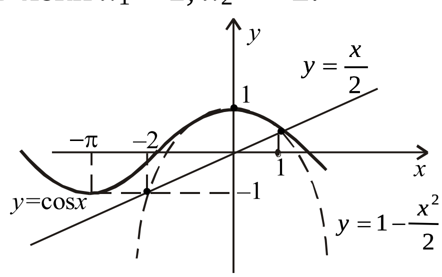
$$\sqrt[3]{9}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=2(1+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3+\ldots)=2+\frac{1}{12}-\frac{2}{3^2\cdot 64}+\frac{10}{3^4\cdot 512}-\ldots$$

За винятком першого члена дістали знакочерговий ряд, він буде збіжним, бо $\frac{1}{8}\in(-1;1)$. Похибка r_n за абсолютною величиною буде меншою від першого із відкинутих членів. Послідовно обчислюємо: $|r_1|<\frac{1}{12}$; $|r_2|<\frac{1}{288}$; $|r_3|=\frac{2\cdot 5}{81\cdot 512}<0{,}001$. Отже, щоб обчислити $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 0,001, достатньо залишити три перші члени: $\sqrt[3]{9}\approx 2+\frac{1}{12}-\frac{2}{9\cdot 64}=2\frac{23}{288}\approx 2{,}0798\approx 2{,}080$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\cos x=\frac{x}{2}$, обмежуючись двома членами ряду Маклорена для $\cos x$.

Візьмемо $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$, тоді дістанемо квадратне рівняння $1-\frac{x^2}{2}=\frac{x}{2}\Leftrightarrow$ $x^2+x-2=0$, яке має розв'язки $x_1=1$, $x_2=-2$.



Із рисунка видно, що $x_2=-2$ не буде розв'язком початкового рівняння.

Отже, рівняння має єдиний розв'язок, наближене значення якого $x=1$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|.$

Замінимо e^x і $\sin x$ відповідними рядами Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-x+\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\ldots}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{x^3}{3!}+2\cdot\dfrac{x^4}{4!}+\ldots}{\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{3!}+2\cdot\dfrac{2x}{4!}+\ldots}{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{x^2}{5!}+\ldots}=2.$$

Приклад. Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,001.

Оцінимо похибку наближеної рівності: $e^x\approx 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$ при $x>0$.

Ця похибка визначиться залишком ряду

$$r_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots=\frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+\frac{x^3}{(n+1)^3}+\ldots\right).$$

Якщо $\left|\dfrac{x}{n+1}\right|<1,$ то $\dfrac{x}{n+1}+\left(\dfrac{x}{n+1}\right)^2+\ldots=\dfrac{\dfrac{x}{n+1}}{1-\dfrac{x}{n+1}}=\dfrac{x}{n+1-x}$ за формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $u_1=\dfrac{x}{n+1}$ і знаменником $q=\dfrac{x}{n+1}$. Отже, маємо таку оцінку залишку ряду: $r_n(x)<\dfrac{x^n}{n!}\cdot\dfrac{x}{n+1-x}$.

Отже: $$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}+\frac{\frac{1}{4}}{2!}+\ldots+\frac{\frac{1}{2^n}}{n!}\quad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

Розрахункова робота.

Варіант 1.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$ 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}.$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}.$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}.$

Знайти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}.$

Розкласти функцію у ряд Тейлора по степеням x.

7. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}.$

Варіант 2.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n(n+1)(n+2)}.$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}.$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}.$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}.$ 5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$

Знайти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}.$

Розкласти функцію у ряд Тейлора по степеням x.

7. $\ln(1-x-6x^2).$

Варіант 3.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$.

Знайти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n 9^n}$.

Розкласти функцію у ряд Тейлора по степенях x.

7. $\frac{7}{12 + x - x^2}$.

Варіант 4.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$. 5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

Знайти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

Розкласти функцію у ряд Тейлора по степенях x.

7. $\ln(1 + x - 6x^2)$.

Варіант 5.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2 n}{n^3+5}$.   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+2)!}{3m+5}\dfrac{1}{2^n}$.   3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$.   5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(n+1)\ln n}$.

Знайти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$.

Розкласти функцію у ряд Тейлора по степенях *x*.

7. $\dfrac{6}{8+2x-x^2}$.

Варіант 6.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^3+n+1}$.   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{arctg\,\frac{5}{n}}{n!}$.   3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\ln^2(n+1}$.   5. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n-1)}$.

Знайти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\dfrac{1}{3^n}(x+5)^n$.

Розкласти функцію у ряд Тейлора по степенях *x*.

7. $\ln(1-x-12x^2)$.

Варіант 7.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}tg\frac{1}{5^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(2n)}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$.

Найти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

Розкласти функцію в ряд Тейлора по степеням x.

7. $\frac{7}{12-x-x^2}$.

Варіант 8.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{3}}{3^n+2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi n}{2n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\sqrt{\ln(n-2)}}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{1}{n}$.

Знайти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

Розкласти функцію у ряд Тейлора по степенях x.

7. $\ln(1+2x-8x^2)$.

Варіант 9.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)^n}$.

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)\ln n}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

Знайти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n+4}$.

Розкласти функцію у ряд Тейлора по степенях x.

7. $\frac{5}{6+x-x^2}$.

Варіант 10.

Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$. 3. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$.

Знайти область збіжності степеневого ряду.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

Розкласти функцію у ряд Тейлора по степенях x.

7. $\ln(1-x-20x^2)$.

Приклад розв'язування розрахункової роботи.

1. Дослідити ряд на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$.

Розв'язування: Цей ряд можна дослідити на збіжність за допомогою ознаки порівняння з додатними членами.

1) Якщо член ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, починається з деякого, не більшого відповідних членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, тобто $u_n \le v_n\,(n=N,\ N+1,\ N+2,\ ....)$, і більший ряд збігається, тоді збігається і менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

2) Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, починаючи з деякого, не меншого відповідних членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, тобто $u_n \ge v_n\,(n=N,\ N+1,\ N+2,\ ....)$, і менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ розбіжний, тоді розбіжний і більший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Порівняємо досліджуваний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Починаючи з $n = 3$ члени ряду більші відповідних членів гармонічного ряду

$\frac{n\ln n}{n^2-3} > \frac{n\ln n}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, так як. при $n > 3$, $ln\ n > 1$.

Гармонічний ряд розбіжний, отже, розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$..

2. Дослідити ряд на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$.

Розв'язування: Використаємо ознаку Даламбера.

Якщо в ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ відношення $(n + 1)$-го члена до n-го при $n \to \infty$ маємо скінченну границю l, тобто $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, тоді:

1) ряд збіжний у випадку $l < 1$;

2) ряд розбіжний у випадку $l > 1$.

У випадку $l = 1$ відповіді на питання збіжності або розбіжності ряду ознака не дає.

У нашій задачі $u_n = \dfrac{n^2}{(n+2)!}$, $\qquad u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{((n+1)+2)!} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+3)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{(n+3)!}}{\dfrac{n^2}{(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n+2)!}{n^2(n+3)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3} = 1\cdot 0 = 0 < 1$$

Отже, досліджуваний ряд збіжний.

3. Дослідити ряд на збіжність: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$.

Розв'язування: Тут зручно використати ознаку Коші.

Якщо для ряду з додатними членами $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, величина $\sqrt[n]{u_n}$ має скінченну границю l при $n \to \infty$, тобто $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$, тоді:

1) у випадку $l < 1$ – ряд збіжний;
2) у випадку $l > 1$ – ряд розбіжний.

У випадку $l = 1$ ознака Коші не дає відповіді про збіжність чи розбіжність ряду.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1.$$

Отже, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$ – розбіжний.

4. Дослідити ряд на збіжність: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

Розв'язування: Скористаємось тим, що якщо існує скінченна і відмінна від нуля границя $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, тоді обидва ряди з додатними членами $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ одночасно збіжні або одночасно розбіжні.

Замість ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$ можна дослідити на збіжність більш простий ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)\ln n}$, так як $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{(n^2+1)\ln n}}{\frac{1}{n\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1}=1.$

Застосуємо інтегральну ознаку збіжності ряду.

Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ додатні і не зростають, тобто $u_1\geq u_2\geq u_3\geq\ldots,$ і, нехай $f(x)$ – така неперервна незростаюча функція, що $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, … . Тоді ряд збіжний або розбіжний в залежності від того, збігається чи розбігається невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$.

Обчислимо невласний інтеграл від функції $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, що задовольняє умовам інтегральної ознаки.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln(\ln x)\right)=\lim_{b\to+\infty}(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2))=+\infty.$$

Інтеграл розбіжний, значить буде розбіжним і ряд.

5. Дослідити ряд на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Розв'язування: Цей ряд знакочерговий, причому він не збігається абсолютно, тобто не збігається ряд, складений з абсолютних величин членів початкового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Покажемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ і гармонічний ряд ведуть себе однаково.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n}{n(n+1)}=2.$$

Застосуємо ознаку Лейбніца.

Якщо у знакочерговому ряду члени такі, що $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, тоді ряд збіжний.

Перевіримо виконання першої умови:

$$u_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}; u_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)((n+1)+1)} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} > \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow (2n+1)(n+2) > (2n+3)n \Leftrightarrow 2n^2 + 5n + 2 > 2n^2 + 3n \Leftrightarrow 2n+2 > 0.$$

Остання рівність очевидна.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 0.$$

Значить, виконана і друга ознака Лейбніца.

Отже, даний ряд збігається умовно.

6. Знайти область збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{(n^4+1)^2}$.

Розв'язування: Інтервал збіжності можна знайти, використовуючи ознаку Даламбера або Коші до ряду, складеному з абсолютних величин членів початкового ряду.

Тут $u_n = \frac{n^2 |x-3|^n}{(n^4+1)^2}$, $\quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 |x-3|^{n+1}}{((n+1)^4+1)^2}$.

Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2 |x-3|^{n+1}}{((n+1)^4+1)^2}}{\dfrac{n^2 |x-3|^n}{(n^4+1)^2}} = |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 (n^4+1)^2}{n^2 ((n+1)^4+1)^2} = |x-3|.$$

За ознакою Даламбера для збіжності ряду границя має бути менша за 1.

$$|x-3| < 1$$

$$-1 < x-3 < 1$$

$$2 < x < 4$$

Дослідимо збіжність ряду на кінцях проміжка.

Якщо $x = 4$, то отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+1)^2}$. Він збіжний, і притому абсолютно, так як цей ряд веде себе як ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Якщо $x = 2$, то отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(n^4+1)^2}$. Він збіжний, і притому абсолютно, так як збіжний ряд з абсолютних величин його членів.

У результаті отримаємо, що область збіжності досліджуваного ряду є відрізок [2;4].

7. Розкласти функцію у ряд Тейлора по степенях x.

$$f(x) = \frac{9}{(20 - x - x^2)}.$$

Розв'язування: Розкладемо $f(x)$ на елементарні дроби

$$\frac{9}{20 - x - x^2} = \frac{9}{(x+5)(4-x)} = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{4-x}.$$

Використаємо готову формулу: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$.

$$\frac{1}{5+x} = \frac{1}{5\left(1+\frac{x}{5}\right)} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^n.$$

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} x^n.$$

Склавши ці два вирази, отримаємо

$$\frac{9}{20 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{5^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) x^n.$$