Державна служба України з надзвичайних ситуацій

Національний університет цивільного захисту України

Черкаський інститут пожежної безпеки
імені Героїв Чорнобиля

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ТА
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник

Черкаси, 2018 рік

Зміст

Вступ

Запропонований навчальний посібник є узагальненням досвіду викладання авторами дисципліни «Основи вищої математики та математичної статистики» студентам психологам. Його метою є розкриття в доступному вигляді основних понять і теорем, сприяння формуванню навичок щодо застосування методів математичної статистики, допомога студентам при самостійному вивченні матеріалу та розв'язуванні задач.

Посібник складається з трьох частин.

У першій частині подаються стислі систематизовані відомості з основ диференціального та інтегрального числень, які необхідні для подальшого успішного розгляду двох інших частин посібника.

Друга частина присвячена основам теорії ймовірностей.

Теорія ймовірностей – математична дисципліна, яка вивчає закономірності, що відбуваються у масових однорідних випадкових явищах і процесах.

З виникненням теорії ймовірностей наука отримала потужний апарат дослідження випадкових явищ і процесів; до цього досліджувалися лише детерміновані явища і досліди, у яких початкові умови однозначно дозволяли визначити їхній результат. Між тим, випадкові явища існують у багатьох областях науки (біології, генетиці, астрономії, психології, економіці тощо), коли наперед неможливо передбачити результат досліду. Метою сучасної теорії ймовірностей є встановлення загальних закономірностей і залежностей, а також опис фізичних явищ за допомогою абстрактних моделей.

Третя частина присвячена основам математичної статистики. Математична статистика – розділ математики, у якому вивчають математичні методи систематизації, обробки і використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Математична статистика використовує математичний апарат і висновки теорії ймовірностей. Зв’язуючим ланцюгом між теорією ймовірностей і математичною статистикою є закон великих чисел і так звані граничні теореми. Зокрема, закон великих чисел аргументує використання середньої арифметичної в якості оцінки математичного сподівання і відносної частоти настання події як оцінки ймовірності. Останнє є обґрунтуванням поняття статистичної стійкості.

В математичній статистиці передбачається, що результати дослідних даних і спостережень є реалізацією різних випадкових процесів, які мають ті чи інші закони розподілу (причому невідомі заздалегідь), а інколи і детерміновані складові (регресійний аналіз). Звідси випливають основні завдання математичної статистики:

1) організація спостережень;

2) знаходження за результатами вибіркових спостережень оцінок числових характеристик усієї сукупності і дослідження точності їхнього наближення (вибірковий метод);

3) розв'язування задачі узгодження результатів оцінювання з дослідними даними (перевірка статистичних гіпотез);

4) оцінка істотності впливу факторних ознак на результативну ознаку (дисперсійний аналіз);

5) визначення аналітичної залежності між спостереженнями факторних і результативних ознак (кореляційно-регресійний аналіз).

Фактично, математична статистика дає єдиний обґрунтований апарат для розв'язування задач управління і прогнозування при відсутності явних закономірностей у процесах, що вивчаються.

У посібнику стисло і доступно подано основний теоретичний матеріал, розв'язки типових задач, задачі для самостійного розв’язання з відповідями до них, запитання для самоконтролю.

Призначений для студентів денної та заочної форм навчання, які здобувають фах «Психологія діяльності у надзвичайних ситуаціях».

Розділ 1. Основи вищої математики

1.1. Границя функції.

Нехай x_0 – довільна точка на R. Множина $J_\varepsilon(x_0)=\{x \,|\, |x-x_0|<\varepsilon\}= =(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\subset R$ називається ε*-околом точки* x_0. Множини $J_\varepsilon(-\infty)=(-\infty,-\varepsilon)$, $J_\varepsilon(+\infty)=(\varepsilon,+\infty)$, $J_\varepsilon(\infty)=(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,+\infty)$ називаються відповідно ε*- околами* $-\infty,+\infty$ та просто ∞.

Нехай $X\subset R$ деяка множина, $x_0\in X$. ε*-околом* $O_\varepsilon(x_0)$ *точки* x_0 *в множині* X $(x_0\in\overline{R})$ називається перетин множин $O_\varepsilon(x_0)=J_\varepsilon(x_0)\cap X$.

__Приклад 1.__ Якщо розглянути множину $X=\left\{0,\frac{1}{n}\,|\, n\in N\right\}$, тоді при

$$\varepsilon=\frac{1}{10}, \text{ то } O_\varepsilon(0)=\left\{\frac{1}{11},\frac{1}{12},\frac{1}{13},...\right\}.$$

Нехай $X\subset R$, точка $x_0\in\overline{R}$ називається *граничною точкою* множини X, якщо $\forall\varepsilon>0$ $J_\varepsilon(x_0)\cap(X\setminus\{x_0\})\neq\varnothing$, іншими словами, гранична точка x_0 множини X є точкою дотикання множини $X\setminus\{x_0\}$. Точка множини X, яка не є граничною, називається *ізольованою*. Можна розписати це визначення з використанням принципу двоїстості, тобто запишемо заперечення визначення граничної точки: $\exists\varepsilon>0$: $J_\varepsilon(x_0)\cap(X\setminus\{x_0\})=\varnothing$, тобто в деякому околі точка x_0 є єдиною точкою множини, що повністю задовольняє уявленню про ізольовану точку.

__Лема 1.__ *(Окіл граничної точки).*

Якщо $x_0\in R$ – гранична точка множини $X\subset R$, то $\forall\varepsilon>0$ множина $O_\varepsilon(x_0)$ нескінченна.

Доведення. Від супротивного. Якщо множина $O_\varepsilon(x_0)=J_\varepsilon(x_0)\cap X=\{x_1,...,x_n\}$ – скінчена, то позначимо $\forall k=\overline{1,n}$

$r_k = |x_k - x_0| > 0$. Виберемо $0 < \varepsilon_0 < \min\limits_{1\le k\le n} r_k \quad \Rightarrow \quad J_{\varepsilon_0}(x_0) \cap (X \setminus \{x_0\}) = \varnothing$ – суперечність.

Лема доведена.

З цієї леми можна дати еквівалентне означення граничної точки та точки дотикання до деякої множини $X \subset R$.

Точка $x_0 \in R$ називається *точкою дотикання* (*граничною точкою*) множини X, якщо можна виділити послідовність (x_n) точок з множини X $(X \setminus \{x_0\})$, що збігається до x_0.

Нехай $f : R \to R$ і x_0 – гранична точка множини D_f. Число $\alpha \in \overline{R}$ називається *частковою границею функції* f *в точці* x_0, якщо $\exists (x_n) \subset D_f$: $(x_n \to x_0) \wedge (\forall n \in N\; x_n \ne x_0) \wedge (f(x_n) \to \alpha)$ при $n \to \infty$. Множину всіх часткових границь функції f у точці x_0 позначимо $E_f(x_0)$.

<u>Приклад 2.</u> Розглянемо функцію $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in R$, для неї $D_f = R \setminus \{0\}$, точка $\{0\}$ – є граничною для D_f. Тоді $E_f(0) = [-1{,}1]$, оскільки $(\forall \alpha \in [-1{,}1]) \quad \sin\frac{1}{x} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_n} = (-1)^n arcSin\,\alpha + n\pi \quad \Rightarrow$

$$x_n = \frac{1}{(-1)^n arcSin\alpha + n\pi} \to 0$$

при $n \to \infty$. Крім того, очевидно, що зовні проміжку $[-1{,}1]$ часткових границь функції нема.

Аналогічно послідовностям, визначимо *верхню* та *нижню границі функції* $f : R \to R$ *в точці* x_0 – граничній для D_f за формулами:

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \overset{def}{=} \sup E_f(x_0); \quad \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \overset{def}{=} \inf E_f(x_0).$$

Нехай $f: R \to R$ і x_0 – гранична точка множини D_f. Якщо множина $E_f(x_0)$ складається з одного числа $\alpha \in \overline{R}$, то воно називається *границею функції* f *в точці* x_0 і позначається $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (*границя за Гейне*).

Нехай $f: R \to R$, x_0 – гранична точка D_f, тоді число α називається *границею функції* f *в точці* x_0 (при $x \to x_0$), якщо $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in D_f$: $0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \alpha| < \varepsilon$ (*границя за Коші*).

<u>Теорема 1.</u> *(Зв'язок означень границі функції за Коші та Гейне).*

Означення границі функції в точці за Коші та Гейне еквівалентні.

Доведення. Коші $\Rightarrow$ *Гейне.* Нехай $\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ за Коші. Розглянемо довільну послідовність $(x_n) \subset D_f \setminus \{x_0\}$: $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \alpha| < \varepsilon$, тоді $\exists N(\delta)$: $\forall n \geq N(\delta)$ $|x_n - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_n) - \alpha| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$. Тобто $E_f(x_0) = \{\alpha\}$, за Гейне доведено.

Гейне $\Rightarrow$ *Коші.* Нехай $\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ за Гейне. Від супротивного, якщо $\alpha \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ за Коші, то $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in D_f$: $0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow$ $|f(x) - \alpha| \geq \varepsilon$. Виберемо $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, тоді $\forall n \;\; \exists x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$: $0 < |x - x_0| < \delta_n \;\wedge$ $|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; ((x_n) \subset D_f) \wedge (\forall n \;\; x_n \neq x_0) \wedge (x_n \to x_0) \wedge (f(x_n) \not\to \alpha) \Rightarrow$ суперечність.

Теорема доведена.

Теорема 2. *(Арифметичні дії з границями функцій).*

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta$ та $D_f = D_g$, то

$\lim\limits_{x\to x_0}(f \pm g)(x)=\alpha \pm \beta$, $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=\alpha\beta$,

і якщо $\beta \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Доведення спирається на аналогічну теорему для збіжних послідовностей та означення Гейне границі функції в точці.

Приклад 3. Остання умова $D_f = D_g$ необхідна, бо інакше, навіть за умови, що x_0 є гранична точка для D_f та для D_g, може бути невизначеною $f+g$: $f = x$, $x \in Q$; $g = x$, $x \in R \setminus Q$ $\Rightarrow$ 0 – гранична точка для обох множин, але функція в околі точки 0 $f+g$ – не визначена.

Наслідок 1. *(Про функції з нерівними границями).*

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \beta$, $D_f = D_g$ та $\alpha < \beta$.

Тоді $\exists J_\varepsilon(x_0)$: $\forall x \in J_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ $f(x) < g(x)$.

Наслідок 2. *(Про нерівні функції)*

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \beta$, $D_f = D_g$. Якщо

$\exists J_\varepsilon(x_0)$: $\forall x \in J_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ виконується одна з умов:

1) $f(x) > g(x)$; 2) $f(x) \geq g(x)$;

3) $f(x) > \beta$; 4) $f(x) \geq \beta$,

то $\alpha \geq \beta$

Наслідок 3. *(Теорема про двох поліцаїв для функцій).*

Нехай функції $f, g, h : R \to R$ мають спільну область визначення D_f, точка x_0 – гранична точка цієї множини. Якщо існує окіл $\exists J_\varepsilon(x_0)$ $\forall x \in J_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \alpha$, то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \alpha$.

Доведення наслідків проводимо за означенням Гейне границі функції в точці.

Теорема 3. *(Про границю композиції функції)*

Нехай ξ_0 – гранична точка множини $D_{f\circ\varphi}$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{\xi\to\xi_0}\varphi(\xi)=x_0$, та існує такий окіл $J_\varepsilon(\xi_0)$, що $\forall\xi\in\left(J_{\xi_0}\cap D_{f\circ\varphi}\right)\setminus\{\xi_0\}$ $\varphi(\xi)\neq x_0$, то $\lim\limits_{\xi\to\xi_0}(f\circ\varphi)(\xi)=\alpha$.

Доведення. Нехай (ξ_n) – довільна послідовність, така що $\forall n\in N$ $\xi_n\in D_{f\circ\varphi}\setminus\{\xi_0\}$ і $\xi_n\to\xi_0$. Тоді $x_n=\varphi(\xi_n)\to x_0$ і $x_n\in D_f\setminus\{x_0\}$. Тому $f(x_n)=(f\circ\varphi)(\xi_n)\to\alpha$, якщо $n\to\infty$. Згідно з означенням границі $\lim\limits_{\xi\to\xi_0}(f\circ\varphi)(\xi)=\alpha$.

Теорема доведена.

Нехай $f:R\to\overline{R}$ і x_0 – гранична точка множини $D_f\cap\{x\in R|\,x<x_0\}$ $\left(D_f\cap\{x\in R|\,x>x_0\}\right)$. Покладемо $f(x_0-0)\overset{def}{=}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ $\left(f(x_0+0)\overset{def}{=}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)\right)$, якщо ця границя існує. Числа $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ називаються відповідно *лівою* та *правою границями функції* f *в точці* x_0. Якщо $f(x_0-0)=\pm\infty$, $f(x_0+0)=\pm\infty$, то відповідні границі називаються *нескінченими*.

Теорема 4. *(Критерій існування границі функції в точці)*

Функція $f:R\to R$ має границю в точці x_0, граничній для множин $D_f\cap\{x\in R|\,x<x_0\}$ $\left(D_f\cap\{x\in R|\,x>x_0\}\right)$ тоді і тільки тоді, коли одночасно існують і рівні між собою односторонні границі $f(x_0-0)$ і $f(x_0+0)$.

Доведення. Необхідність. Якщо $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, то $\forall(x_n)\subset D_f:\ x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0)$ $f(x_n)\to\alpha$. Тоді легко зрозуміти, що $\forall(x'_n)\to x_0:\ x'_n<x_0\ \Rightarrow$ $f(x'_n)\to\alpha$, тобто $f(x_0-0)=\alpha$. Аналогічно $f(x_0+0)=\alpha$.

Достатність. Нехай $f(x_0-0)=f(x_0+0)=\alpha$, розглянемо довільну послідовність точок $(x_n)\subset D_f\setminus\{x_0\}$, що збігається до x_0. Розіб'ємо її на дві частини: члени менші за x_0 та члени більші за x_0. Якщо обидві ці частини нескінчені, то ми маємо дві підпослідовності, які збігаються до x_0, а їхні значення збігаються до $f(x_0-0)=\alpha$ і $f(x_0+0)=\alpha$. Якщо одна з цих частин скінчена, то її можна відкинути, на збіжність це не впливає. Тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$.

Теорема доведена.

Зауважимо, що у випадках $x_0=\pm\infty$ мова йде лише про односторонні границі, які ми будемо позначати відповідно $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

<u>Приклад 4.</u> Розглянемо функцію $f(x)=\operatorname{sgn} x$ і границю в точці $x_0=0$.

$$f(0-0)=-1,\ f(0+0)=1 \Rightarrow \text{не існує } \lim_{x\to 0} f(x).$$

Нехай $f:R\to R$, x_0 – гранична точка множини D_f. Функція f *задовольняє в точці* x_0 *умову Коші*, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall(x_1,x_2\in D_f)$: $(0<|x_1-x_0|<\delta\wedge 0<|x_2-x_0|<\delta)\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

<u>Теорема 5.</u> *(Критерій існування границі функції в точці)*

Функція $f:R\to R$ має границю в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє в ній умову Коші.

Доведення. Необхідність. Якщо $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta$: $\forall\{x_1,x_2\}\subset D_f$: $(0<|x_1-x_0|<\delta\wedge 0<|x_2-x_0|<\delta) \Rightarrow |f(x_1)-\alpha|<\varepsilon\wedge |f(x_2)-\alpha|<\varepsilon \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon$.

Достатність. Виберемо довільне $\varepsilon>0$. Тоді $\exists\delta>0:\ \forall\{x_1,x_2\}\subset D_f$: $(0<|x_1-x_0|<\delta\wedge 0<|x_2-x_0|<\delta) \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Зафіксуємо $\delta>0$. Розглянемо довільну послідовність $(x_n)\subset D_f\setminus\{x_0\}$, що збігається до x_0.

$\exists N(\delta)$: $\forall n \geq N \ \ \forall p \in N \ \ |x_n - x_0| < \delta \wedge |x_{n+p} - x_0| < \delta \ \Rightarrow$ за виконанням умови Коші одержимо: $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon \ \Rightarrow \ (f(x_n))$ – фундаментальна послідовність, тобто вона збіжна. Нехай $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$, тобто $\alpha \in E_f(x_0)$. Залишилося показати, що $\{\alpha\} = E_f(x_0)$. Якщо $\beta \neq \alpha \wedge \beta \in E_f(x_0) \ \Rightarrow \ \exists (x_n') \subset D_f \setminus \{x_0\}$: $x_n' \to x_0 \ \wedge f(x_n') \to \beta$ при $n \to \infty$. Розглянемо послідовність $x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3' \ldots$. Ця послідовність також є фундаментальною, а тому збіжною $\Rightarrow$ її границя єдина, що суперечить тому, що $\alpha \neq \beta$ є її різними частковими границями.

Теорема доведена.

<u>Приклад 5.</u> *(Границя показникової, логарифмічної та степенево-показникової функцій)*

1. Довести, що $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \ (a > 0, x_0 \in R)$.

$x_n \to x_0$ – довільна послідовність, тоді $a^{x_n} \to a^{x_0}$ (за відповідною властивістю послідовностей).

Аналогічно попередньому, використовуючи аналогічну властивість для послідовностей, легко показати, що й:

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0 \ (x_0 > 0)$.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$ та $x_0 \in D_u = D_v$.

Для вивчення поведінки функції в околі деякої точки та порівняння різних функцій в околі точки, корисно запровадити *символи Ландау* O (*O-велике*) і o (*o-мале*) аналогічно, як вони були визначені для послідовностей.

Нехай функції $f : R \to R$, $g : R \to R$, x_0 – гранична точка множини $X = D_f = D_g$. Тоді:

1) якщо існує $M>0$ і окіл $O_\delta(x_0)$ точки x_0, такі що $\forall x \in O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ виконується нерівність: $|g(x)| \le M|f(x)|$, то записуємо $g=O(f)$ (<u>O -*велике*</u>);

2) якщо одночасно $g=O(f) \wedge f=O(g)$, то кажуть, що f і g – *функції одного порядку*;

3) якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує окіл $O_\delta(x_0)$ такий, що $\forall x \in O_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ $|g(x)| \le \varepsilon |f(x)|$, то записуємо $g=o(f)$ (o -*мале*);

4) якщо $f-g=o(g)$, то функції f і g називаються *еквівалентними*, при цьому записують $f \sim g$.

<u>Приклад 6.</u> Якщо згадати асимптотичний розподіл простих чисел $\pi(n)$ на дійсній осі, то тепер ми можемо записати його точне формулювання, яке свого часу першим одержав Чебишов:

$$\pi(n)=\frac{n}{\ln n}+o\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Теорема 6. *(Умова функцій одного порядку та критерій еквівалентності функцій).*

Функції $f : R \to R$, $g : R \to R$ в точці x_0 - граничній для множини $D_f = D_g$, тоді:

1) якщо $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x \in O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ $g(x) \neq 0$ і $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \in R \setminus \{0\}$, то функції f і g одного порядку в околі точки x_0;

2) якщо $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x \in O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ $g(x) > 0$, то $f \sim g$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Доведення. 1) Якщо $\dfrac{f}{g} \to c \neq 0$, то $\left|\dfrac{f}{g}\right| \to |c| = c_1 > 0 \;\Rightarrow\; \forall \varepsilon_1 > 0 \;\exists \delta > 0$:

$$\forall x \in D_f: \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{|f(x)|}{|g(x)|} - c_1 \right| < \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 < \varepsilon \\ \varepsilon_1 < c_1 \end{pmatrix}$$

$c_1 - \varepsilon_1 < \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} < c_1 + \varepsilon_1 \;\Rightarrow\; |f(x)| < |g(x)|(c_1 + \varepsilon_1) \;\Rightarrow\; f = O(g)$, аналогічно, враховуючи, що $\dfrac{g(x)}{f(x)} \to \dfrac{1}{c} \in R \setminus \{0\}$, то $g = O(f)$, тобто f і g – одного порядку.

2) $f \sim g \;\Rightarrow\; \forall \varepsilon_1 > 0 \;\exists\, O_\delta(x_0)$: $\forall x \in O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. $0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow$ $|f(x) - g(x)| < \;< \varepsilon_1 |g(x)| \;\Rightarrow\; g(x) - \varepsilon_1 g(x) < f(x) < g(x) + \varepsilon_1 g(x) \;\Rightarrow$ $1 - \varepsilon_1 < \dfrac{f(x)}{g(x)} < 1 + \varepsilon_1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Аналогічно в зворотному напрямі.

Теорема доведена.

Сформулюємо тепер властивості символів Ландау, вважаємо при цьому, що для всіх функцій є однаковими множини визначення, всі властивості розписуються в околі точки x_0 – граничній для спільної області визначення.

<u>Властивості.</u> *(Символів Ландау).*

1) $O(f)=O(O(f))$;

2) $O(f)\cdot O(g)=O(fg)$;

3) $\forall\lambda\in R\ \ O(\lambda f)=O(f)$;

4) $O(f)+O(f)=O(f)$;

5) $o(o(f))=o(f)$;

6) $o(f)\cdot o(g)=o(fg)$;

7) $o(f)+o(f)=o(f)$;

8) $O(f)+o(f)=O(f)$;

9) $o(O(f))=o(f)$.

Функція $f:R\to R$ називається *обмеженою* на множині $X\subset D_f$, якщо множина $f(X)$ обмежена.

<u>Наслідок 1.</u> *(Умова обмеженості функції в точці).*

Якщо $f=O(1)$, то $\exists\, O_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}$, де функція обмежена.

<u>Наслідок 2.</u> *(Умова нескінченної малості функції в точці).*

Якщо $f=o(1)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Якщо в деякому околі $O_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}$ $f(x)=ag(x)+o(g(x))$ $(a\neq 0)$, то $f\sim ag$, при цьому функція $x\mapsto ag(x)$ $x\in O_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\}$ називається *головною частиною функції* f *при* $x\to x_0$.

При обчисленні границь функцій часто дуже зручним виявляється замінювати їх на головні частини.

Спочатку згадаємо деякі відомі зі школи границі:

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Приклад 8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

1. Якщо $x\to +0$, то нехай (x_k) – довільна числова послідовність, що прямує до нуля, тоді існує послідовність натуральних чисел (n_k): $\forall k\in N$

$$\frac{1}{n_k+1}<x_k\le\frac{1}{n_k}\;\Rightarrow\;\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{nk}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Ліва і права частини нерівності прямують до e, тому середина теж прямує до e.

Якщо $x\to -0$, то покладемо $t=-x\;\Rightarrow\;t\to +0\;\Rightarrow$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1-t)^{-\frac{1}{t}}=\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{t}}}=\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1-t}{t}}\cdot\left(1+\frac{t}{1-t}\right)\to e\;\Rightarrow\;\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Тепер ці границі можемо використати для одержання так званих асимптотичних формул.

$$\frac{Sin\,x}{x}=1+o(1)\;\Rightarrow\;Sin\,x=x+o(x)=o(1)\qquad(1)$$

$$Cos\,x=1-2Sin^2\frac{x}{2}=1-2\left(\frac{x}{2}+o\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=1-2\cdot\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$Cos\,x=1+o(1)=1+o(x)=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\qquad(2)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\to\ln e=1\;\Rightarrow$$

$$\ln(1+x)=x+o(x)=o(1)\qquad(3)$$

$$\frac{e^x-1}{x}=\left|\begin{array}{l} e^x-1=t \\ x=\ln(1+t)\end{array}\right|=\frac{t}{\ln(1+t)}\to 1 \Rightarrow$$

$$e^x=1+x+o(x)=1+o(1) \qquad (4)$$

$$a^x=e^{x\ln a}=1+o(1)=1+x\ln a+o(x) \qquad (5)$$

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}}{\alpha\ln(1+x)}\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\to\alpha \Rightarrow$$

$$(1+x)^\alpha=1+o(1)=1+\alpha x+o(x) \qquad (6)$$

Дуже часто в околі точки x_0 головну частину функції надають у вигляді $a(x-x_0)^n$, $n\in R$. Тоді можна виписати деякі корисні практичні властивості символів Ландау саме для таких степеневих функцій. При цьому вважаємо, що $x_0=0$, а $m,n\in R^+$.

<u>Властивості.</u> *(о-малих функцій).*

1) $x^m=o\left(x^n\right),\ m>n$;

2) $o\left(cx^n\right)=c\,o\left(x^n\right)=o\left(x^n\right),\ c\neq 0$;

3) $o\left(x^n\right)+o\left(x^m\right)=o\left(x^n\right),\ m>n$;

4) $x^n\cdot o\left(x^m\right)=o\left(x^{n+m}\right)$;

5) $o\left(x^n\right)o\left(x^m\right)=o\left(x^{n+m}\right)$;

6) $O\left(x^n\right)\cdot o\left(x^m\right)=o\left(x^{n+m}\right)$.

Легко побачити, що формули (1)–(6) записані саме у вигляді виділення головної частини степеневого вигляду. Покажемо, як останні властивості та формули (1)–(6) використовувати для перетворень та знаходження границь.

Приклад 8. $\left(1+x+o\left(x^2\right)\right)\left(x+x^3+o\left(x^3\right)\right)=x+x^2+o\left(x^3\right)+x^3+x^4+o\left(x^5\right)+o\left(x^3\right.$
$+o\left(x^4\right)+o\left(x^5\right)=x+x^2+x^3+o\left(x^3\right).$

Приклад 9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos^{\alpha}x}{x^2}=\frac{1-Cos^{\alpha}x}{x^2}=\frac{1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\alpha}}{x^2}=$$

$$\frac{1-\left(1-\dfrac{\alpha x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{x^2}==\frac{\dfrac{\alpha x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2}\to\frac{\alpha}{2}.$$

Приклад 10.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)},$$

тепер знайдемо таку границю при $x\to 0$:

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x\ln a+1+x\ln b+1+x\ln c+o(x)}{3}\right)=$$

$$\frac{\ln\left(1+\dfrac{x\ln(abc)}{3}+o(x)\right)}{x}=\frac{\dfrac{x\ln(abc)}{3}+o(x)}{x}=\frac{\ln(abc)}{3}+o(1)\to$$

$$\ln(abc)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}\to e^{\ln(abc)^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{abc}.$$

Перелічимо всі типи невизначеностей, для всіх інших випадків достатньо підставити граничні значення з $\overline{R}$ і одержати відповідь:

1.	$\frac{0}{0}$;	2.	$\frac{\infty_1}{\infty_2}=\frac{\frac{1}{\infty_2}}{\frac{1}{\infty_1}}\to\frac{0}{0}$;	3.	$0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$

4.	$\infty_1-\infty_2=\infty_1\left(1-\frac{\infty_2}{\infty_1}\right)=\begin{cases}\infty_1\cdot 0, \text{якщо} \left(1-\frac{\infty_2}{\infty_1}\right)\to 0\\ \textit{нема невизначеності, якщо} \left(1-\frac{\infty_2}{\infty_1}\right)\not\to 0\end{cases};$				
5.	$1^{\infty}=e^{\infty\ln 1}$ $\to e^{\infty\cdot 0}$;	6.	$\infty^0=e^{0\ln\infty}\to e^{0\cdot\infty}$	7.	$0_1^{0_2}=e^{0_1\ln 0_2}\to e^{0_1\infty}$.

<u>Приклад 11.</u>

$$A=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}, \text{ де 1) } x_0=0;\ 2)\ x_0=1;\ 3)\ x_0=+\infty.$$

1) $$\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\to 1;\ \frac{1+x}{2+x}\to\frac{1}{2}\Rightarrow A=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2};$$

2) $$\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}t=x-1\\x=t+1\end{matrix}\right|=\frac{1-(1+t)^{1/2}}{-t}=\frac{-\frac{1}{2}t+o(t)}{-t}\to\frac{1}{2};$$

$$\frac{1+x}{2+x}\to\frac{2}{3}\Rightarrow A=\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}};$$

3) $$\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}-1}\to 0;\ \frac{1+x}{2+x}\to 1;\ A=1^0=1.$$

1.2. Похідна функції.

Похідною даної *функції* $y=f(x)$ *у точці* $x=x_0$ називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x)\big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для похідної вживають ще й такі позначення: y'_x, $\frac{dy}{dx}$.

Для обчислення похідних потрібно знати таблицю формул та основні правила диференціювання:

Таблиця похідних

1. $\left(u^{a}\right)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$
2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^{2}} \cdot u'$
4. $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$
5. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$
6. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
7. $\left(\log_{b} u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
8. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
9. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
10. $\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^{2} u} \cdot u'$
11. $\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} u} \cdot u'$
12. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$
13. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$
14. $\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^{2}} \cdot u'$
15. $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^{2}} \cdot u'$

Основні правила диференціювання

1. $c' = 0$
2. $x' = 1$
3. $\left(c \cdot u\right)' = c \cdot u'$
4. $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$
5. $\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^{2}}$
7. $\left(u^{v}\right)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^{v} \cdot \ln u \cdot v'$
8. *Якщо* $x = x(t)$, $y = y(t)$, *то*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

1.3. Неперервність функції.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці а,* якщо:

1) ця функція визначена в деякому околі точки a;

2) існує границя $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;

3) ця границя дорівнює значенню функції в точці a, тобто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Позначаючи $x - a = \Delta x$ (приріст аргументу) і $f(x) - f(a) = \Delta y$ (приріст функції), умову неперервності можна записати так: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, тобто *функція неперервна в точці тоді і тільки тоді, коли в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.*

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області (інтервалу, сегмента тощо), то вона називається *неперервною в* цій *області*.

Точка *а*, що належить області визначення функції або є граничною для цієї області, називається *точкою розриву*, якщо в цій точці порушується умова неперервності функції.

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ *і* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, причому не всі три числа $f(a),\ f(a-0),\ f(a+0)$ рівні між собою, то a називається *точкою розриву I роду*.

Точки розриву I роду поділяються, в свою чергу, на *точки усувного розриву* (коли $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$) і на *точки скачка* (коли $f(a-0) \neq f(a+0)$); в останньому випадку різниця $f(a+0) - f(a-0)$ називається *стрибком* функції в точці *а*.

Точки розриву, які не є точками розриву I роду, називаються *точками розриву II роду*. В точках розриву II роду не існує хоча б одна з односторонніх границь.

Сума і добуток скінченної кількості неперервних функцій є функція неперервна.

1.4. Загальний план дослідження функцій і побудова графіків.

1. Знайти область визначення функції.

2. Дослідити функцію на парність чи непарність.

3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

4. Дослідити функцію на неперервність; знайти точки розриву (якщо вони є) і встановити характер розриву; знайти асимптоти кривої.

5. Знайти інтервали зростання і спадання функції, її екстремуми.

6. Знайти інтервали опуклості і угнутості.

Приклади розв'язування задач.

Приклад 1. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+5x}{-4x^4+7}$.

Розв'язування. Підстановка граничного значення аргументу призводить до невизначеності $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник на старший степінь аргументу, тобто на x^4 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4+5x}{-4x^4+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12+\dfrac{5}{x^3}}{-4+\dfrac{7}{x^4}}=\left[\frac{5}{x^3}\to 0,\quad \frac{7}{x^4}\to 0\right]=\frac{12+0}{-4+0}=-3.$$

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\ln\left(1-x^2\right)}$.

Розв'язування. Тут невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Використовуємо метод заміни нескінченно малих еквівалентними.

Оскільки при $x\to 0$ $\quad 1-\cos 4x=2\sin^2 2x\cong 8x^2$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\ln\left(1-x^2\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{-x^2}=-8.$$

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{x\to -2}\left(5+2x\right)^{\frac{1}{x+2}}$.

Розв'язування. Підстановка $x=-2$ призводить до невизначеності 1^{∞}. Зробимо заміну змінних: $y=x+2,\quad \lim\limits_{x\to -2}y=0$, тоді

$$\lim_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}=\left[1^{\infty},\ \textit{використовуємо } 2-y \text{ "}\textit{чудову границю}\text{"}\right]=$$

$$=\lim_{y\to 0}(1+2y)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\left((1+2y)^{\frac{1}{2y}}\right)^{2}=e^{2}\ .$$

<u>*Приклад 4.*</u> Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

<u>*Розв'язування.*</u> Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=\frac{2-3}{2+2}=-\frac{1}{4}.$$

<u>*Приклад 5.*</u> Обчислити похідну функції $y=tg^5x.$

<u>*Розв'язування.*</u> Це степенева функція відносно tgx, тому використовуємо формули 1 і 10:

$$y'=5tg^4x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

<u>*Приклад 6.*</u> Обчислити похідну функції $y=3^{\sin 2x}.$

<u>*Розв'язування.*</u> Це показникова функція. Використовуємо формули 5 і 8:

$$y'=3^{\sin 2x}\cdot\ln 3\cdot\cos 2x\cdot 2=2\cdot 3^{\sin 2x}\cdot\ln 3\cdot\cos 2x.$$

<u>*Приклад 7.*</u> Обчислити похідну функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

<u>*Розв'язування.*</u> $y'_x=\dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{a\cos t}{-a\sin t}=-ctgt.$

<u>*Приклад 8.*</u> Показати, що при *x=5* функція $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ має розрив.

<u>*Розв'язування*</u>. В точці *x=5* функція не визначена, оскільки, виконавши підстановку, отримуємо невизначеність 0/0. В інших точках дріб можна

скоротити на *x–5*, оскільки *x–5* $\neq 0$. Значить, $y = x + 5$ *при* $x \neq 5$. Легко бачити, що $\lim\limits_{x \to 5-0} y = \lim\limits_{x \to 5+0} y = 10$.

Таким чином, при *x=5* функція має усувний розрив.

<u>*Приклад 9.*</u> Побудувати графік функції $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

<u>*Розв'язування.*</u>

1) Область визначення функції – вся вісь *Ox* за винятком точки *x=0*, тобто $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

2) Функція є ні парною, ні непарною, оскільки $f(x) \neq f(-x)$ *і* $f(-x) \neq -f(x)$.

3) Знаходимо точки перетину графіка з віссю *Ox*; маємо $\dfrac{x^3 + 4}{x^2}$; $x = -\sqrt[3]{4}$.

4) Точка розриву *x=0*, причому $\lim\limits_{x \to 0} y = \infty$. Отже, *x=0* (вісь *Oy*) є вертикальною асимптотою.

Знаходимо похилі асимптоти:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1;$$

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

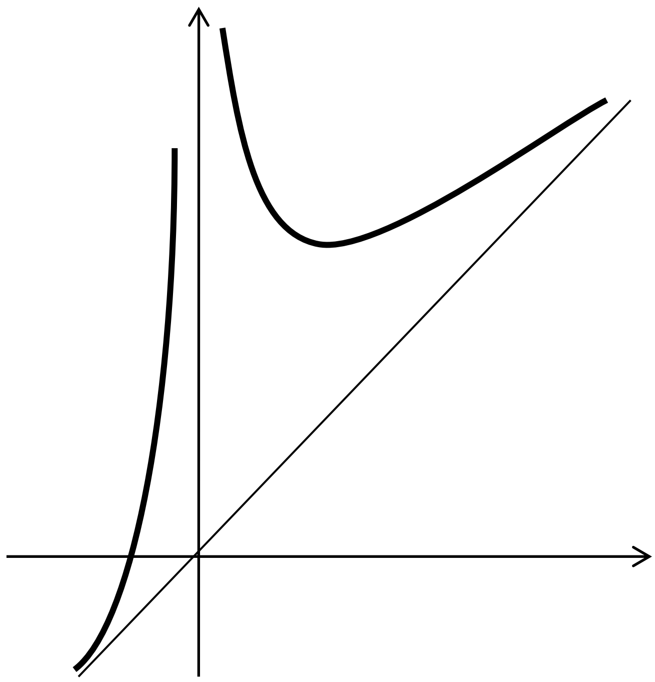
Похила асимптота має вигляд *y=x*.

5) Знаходимо екстремуми функції та інтервали зростання і спадання. Маємо: $y' = 1 - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{x^3 - 8}{x^3}$; $y' = 0$ *при* $x = 2$; $y' = \infty$ *при* $x = 0$ (точка розриву функції). Точки *x=0* і *x=2* розбивають числову вісь на проміжки $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$, причому $y' > 0$ (функція зростає) в проміжках $(-\infty;0)$ *і* $(2;+\infty)$, і $y' < 0$ (функція спадає) в проміжку $(0;2)$.

Далі, знаходимо $y'' = \dfrac{24}{x^4}$; $y''(2) > 0$, значить, x=*2* – точка мінімуму; $y_{\min} = 3$.

6) Знаходимо інтервали опуклості і угнутості кривої і точки перегину. Оскільки $y'' > 0$, то графік функції всюди угнутий. Точок перегину крива не має.

Використовуючи отримані дані, будуємо графік функції:



Завдання для самостійного розв'язування.

Обчислити границі функцій (без застосування правила Лопіталя).

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3+4x-3}{2+5x^2-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-x-1}{2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x+1}{x+x^3-2x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-x^4+x}{1-x^6}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{2-x}}{x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-8}{2-4x-5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-2x-1}{3x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+7}}{x^2+2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin 2x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2-7}{4-3x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{1+4x}}{x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 5x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^7-3x^5-5}{1+x-3x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+x-1}{2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{tg}2x}{1-\cos 3x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5+7x^3-5}{2-x-3x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^2-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-3x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{x\sin 5x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-6x^4-1}{1+2x-8x^6}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-7x=2}{3x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{\sqrt{6-x}-\sqrt{2x-6}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 4x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+x-3}{1+2x^2-3x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{4+x}}{5x-x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{tg}3x}{1-\cos 2x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4-3x^2+7}{5+x-5x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-3x-2}{2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{12+2x}}{x^2+5x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,2x}{\cos x-\cos^2 x}$.

Знайти похідні y' даних функцій.

1. а) $y=\sqrt[4]{x^3+5x}+\sqrt[5]{(5x-1)^4}$; б) $y=\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 3x}$;

в) $y=\mathrm{arctg}\,x\cdot\ln(5x+2)$; г) $y=\mathrm{tg}^2\,3x+\mathrm{ctg}^3\,2x$;

д) $y=a^{\sin 4x}+e^{-2x^3+1}+\sqrt{x}+8$.

2. а) $y=\sqrt[3]{x^4+4x^3}-\sqrt[4]{(3x-1)^5}$; б) $y=\dfrac{1-\mathrm{ctg}\,3x}{\mathrm{tg}\,5x}$;

в) $y=\mathrm{arctg}\,x^2\cdot\ln\left(x^3-3\right)$; г) $y=\dfrac{1}{3}\cos^3 2x-\dfrac{1}{4}\sin^4 x$;

д) $y=4^{2+\sin 3x}+e^{-\cos 4x}+\sqrt[5]{x^6}+7$.

3. а) $y=\sqrt[3]{x^4+4x}-\sqrt[4]{(3x+2)^5}$; б) $y=\dfrac{1-\cos 4x}{1+\sin 2x}$;

в) $y=\mathrm{arctg}\,3x\cdot\ln\left(5x^2-1\right)$; г) $y=\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,4x+\dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}^2\,x$;

д) $y=2^{4-\cos 3x}+e^{-\sin\frac{x}{4}}+\sqrt[6]{x^5}+9$.

4. а) $y=\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^4+4x}}+\sqrt[4]{\left(x^3+5\right)^7}$; б) $y=\dfrac{3\cos 4x}{2+\sin 3x}$;

в) $y=\arcsin(2x-1)\cdot\ln\left(3x^2+4\right)$; г) $y=\mathrm{tg}^3\,\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\mathrm{ctg}^4\,3x$;

д) $y=3^{\sqrt[5]{x^2}}+e^{-1+\mathrm{tg}\,x}+\dfrac{1}{x}+6$.

5. а) $y=3\sqrt[3]{\left(x^4-8x\right)^2}-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x+9}}$; б) $y=\dfrac{2\,\mathrm{ctg}\,3x}{1-\mathrm{ctg}\,4x}$;

в) $y=\arccos(3x+2)\cdot\ln\left(4x^3+1\right)$; г) $y=\sin^6 2x-\cos\dfrac{x}{3}$;

д) $y = 5^{\operatorname{tg} 3x} + e^{-\ln^2 x + 1} - \sqrt[7]{x^2} + 5$.

6. а) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{(4x-1)^2}} - \sqrt[5]{x^4 - 2x}$; б) $y = \dfrac{3 + \operatorname{tg} 2x}{3 - \operatorname{ctg} 4x}$;

в) $y = \operatorname{arctg}\left(x^2 + 3\right) \cdot \ln\left(4 - 5x^2\right)$; г) $y = \dfrac{1}{3}\sin^3 \dfrac{x}{2} - 2\cos 4x$;

д) $y = 3^{\arccos 2x} + e^{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + 4$.

7. а) $y = \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x + 4x^2}}$; б) $y = \dfrac{2 - \sin 4x}{2 + \cos 5x}$;

в) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + 3} \cdot \ln(5x - 6)$; г) $y = \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 2x - \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$;

д) $y = 2^{\sin 2x - 1} + e^{\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{x^3} + 3$.

8. а) $y = \sqrt[5]{x^4 + \sqrt[3]{x^2 + 2}}$; б) $y = \dfrac{2\operatorname{ctg} 4x}{1 - \operatorname{tg} 7x}$;

в) $y = \arcsin\sqrt{x + 2} \cdot \ln(3x - 1)$; г) $y = \dfrac{1}{7}\sin^7 2x - \dfrac{1}{5}\cos^5 x$;

д) $y = 3^{\cos 3x + 2} + e^{-\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{x^5} + 2$.

9. а) $y = 6\sqrt[6]{x^5 + \sqrt{x^3 - 1}}$; б) $y = \dfrac{5\sin 3x}{4 - \cos 2x}$;

в) $y = \arccos\left(x^2 + 1\right) \cdot \ln(5x + 3)$; г) $y = \dfrac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 3x + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$;

д) $y = 4^{2 + x^3} + e^{-\sin x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^5}} - 10$.

10. а) $y = \sqrt{8x + \sqrt[5]{x^4 - x = 1}}$; б) $y = \dfrac{5\operatorname{tg} 6x}{4 - \operatorname{ctg} 3x}$;

в) $y = \arcsin\left(x^5 + 1\right) \cdot \ln(3x + 4)$; г) $y = \dfrac{1}{2}\sin^2 5x - \cos 8x$;

д) $y = 6^{x^2+4} + e^{-\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^7}} - 9$.

Дослідити функції та побудувати їх графік.

1. а) $y = x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$; б) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

2. а) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3$; б) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

3. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2$; б) $y = \dfrac{x^2}{x+2}$.

4. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2$; б) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

5. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x - \dfrac{2}{3}$; б) $y = \dfrac{x^2}{x+3}$.

6. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \dfrac{4}{3}$; б) $y = \dfrac{x^2}{x-3}$.

7. а) $y = x^4 - \dfrac{1}{3}x^2 + 2$; б) $y = \dfrac{x^2}{x-4}$.

8. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^4 + 1$; б) $y = \dfrac{x^2}{x+4}$.

9. а) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - 1$; б) $y = \dfrac{x^2}{x-5}$.

10. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2$; б) $y = \dfrac{x^2}{x+5}$.

Розділ 2. Невизначений інтеграл

2.1. Первісна. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною від функції* $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо для всіх точок цього відрізка виконується рівність $F'(x)=f(x)$.

Означення. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$.

За означенням маємо: $\int f(x)dx. = F(x)+C,$

де $f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;

x – змінна інтегрування;

C – стала інтегрування.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$
4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
5. $\int df(x) = f(x)+C$
6. *Якщо* $\int f(x)dx = F(x)+C$, *то* $\int f(u)du = F(u)+C$, *де* $u=u(x)$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C,\ m \neq -1$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin ax dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$

6. $\int \cos ax dx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$

7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 ax} = \dfrac{1}{a} tgax + C$

8. $\int \dfrac{1}{\sin^2 ax} = -\dfrac{1}{a} ctgax + C$

9. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

2.2. Інтегрування по частинах.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

При цьому за ***u*** береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за ***dv*** – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої можна легко обчислити.

Слід пам’ятати:

1) $\int P(x)e^{ax}dx$	$u = P(x)$	$e^{ax}dx = dv,$
2) $\int P(x)\sin axdx$	$u = P(x)$	$\sin axdx = dv,$
3) $\int P(x)\cos axdx$	$u = P(x)$	$\cos axdx = dv,$
4) $\int P(x)\ln xdx$	$u = \ln x$	$P(x)dx = dv,$
5) $\int P(x)\arcsin xdx$	$u = \arcsin x$	$P(x)dx = dv,$
6) $\int P(x)\arccos xdx$	$u = \arccos x$	$P(x)dx = dv.$

2.3. Інтегрування тригонометричних функцій.

1. Інтеграли виду $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$, де R – раціональна функція, обчислюються за допомогою універсальної підстановки $tg\frac{x}{2}=t$. Тоді

$$\frac{x}{2}=arctgt, \qquad x=2arctgt, \qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

В деяких випадках можна спростити обчислення інтегралів. Наприклад:

а) якщо функція $R(\sin x,\cos x)$ – непарна відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то береться підстановка $\cos x=t$.

б) якщо $R(\sin x,\cos x)$ – непарна відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то береться підстановка $\sin x=t$.

в) якщо $R(\sin x,\cos x)$ – парна відносно $\cos x$ і $\sin x$, тобто $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то береться підстановка $tgx=t$.

2. Інтеграли виду $\int \sin^m x\cdot\cos^n xdx$.

– якщо m – непарне додатнє число, то береться підстановка $\cos x=t$;

– якщо n – непарне додатнє число, то – $\sin x=t$;

– якщо m і n – парні додатні числа, то для перетворення підінтегральної функції використовуються формули:

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

3. Інтеграли виду $\int tg^m xdx$ *і* $\int ctg^m xdx$, де m – додатнє число.

Для знаходження таких інтегралів використовують формули:

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

$$ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

2.4. Інтегрування раціональних дробів.

<u>*Означення.*</u> *Раціональним дробом* називається дріб виду $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь многочлена $P(x)$ менший степеня многочлена $Q(x)$.

Прості дроби – це правильні дроби виду:

- $\frac{A}{x-a}$;
- $\frac{A}{(x-a)^m}, \quad m \in Z, \quad m > 1$;
- $\frac{Ax+B}{x^2+px+g}, \quad \frac{p^2}{4} - g < 0 \Rightarrow x_{1,2} \notin R$;
- $\frac{Ax+B}{(x^2+px+g)^m}, \quad m \in Z, \quad m > 1, \quad \frac{p^2}{4} - g < 0 \Rightarrow x_{1,2} \notin R$.

Приклади розв'язування задач.

<u>*Приклад 1.*</u>

$$\int (5x^4 - 7\sin 2x + 4e^{3x} + 2)dx = 5\int x^4 dx - 7\int \sin 2x dx + 4\int e^{3x} dx + 2\int dx =$$

$$= 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 2x + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + 2x + C = x^5 - \frac{7}{2}\cos 2x + \frac{4}{3}e^{3x} + 2x + C.$$

<u>*Приклад 2.*</u>

$$\int x\cdot 7^{x^2}dx=\begin{bmatrix} x^2=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{2}{2}dt \end{bmatrix}=\int 7^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int 7^t dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{7^t}{\ln 7}+C=\frac{7^{x^2}}{2\ln 7}+C.$$

Приклад 3.

$$\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx=\begin{bmatrix} \arcsin x=t \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dt \end{bmatrix}=\int\sqrt{t}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C.$$

Приклад 4.

$$\int x^2\cdot\ln x dx=\begin{bmatrix} uv-\int vdu & \\ u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^2dx & v=\frac{x^3}{3} \end{bmatrix}=\ln x\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot x^3\cdot\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{1}{3}\cdot x^3\cdot\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{1}{3}\cdot x^3\cdot\ln x-\frac{1}{9}\cdot x^3+C.$$

Приклад 5.

$$\int\cos^5 xdx=\int\cos^4 x\cdot\cos xdx=\int\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos xdx=$$

$$=\int\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)\cos xdx=\begin{bmatrix} \sin x=t \\ \cos xdx=dt \end{bmatrix}=\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=$$

$$=\int dt-2\int t^2dt+\int t^4dt=t-2\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

Приклад 6.

$$\int\frac{3x^2-7x+10}{\left(x^2+4\right)(x-2)}dx=\otimes$$

Підінтегральний раціональний дріб є правильним і розкладається на елементарні дроби виду:

$$\frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x-2}$$

$$3x^2-7x+10=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+4)$$

$$3x^2-7x+10=Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2+4C$$

$$3x^2-7x+10=Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2+4C$$

$$3x^2-7x+10=x^2(A+C)+x(B-2A)+(4C-2B)$$

$$x^2:\quad 3=A+C$$

$$x^1:\ -7=B-2A$$

$$x^0:\ 10=4C-2B$$

$$C=1$$

$$A=2$$

$$B=-3$$

$$\otimes=\int\left(\frac{2x-3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}\right)dx=2\int\frac{x}{x^2-4}dx-3\int\frac{dx}{x^2-4}+\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=\ln(x^2+4)-\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}+\ln|x-2|+C.$$

Завдання для самостійного розв'язування.

Знайти невизначені інтеграли.

1. а) $\int\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$; б) $\int\frac{dx}{x^2+4x-3}$; в) $\int\frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;

   г) $\int(x+2)e^{3x}dx$; д) $\int\left(\sin 5x+e^{-5x}+\operatorname{tg}3x-5\right)dx$.

2. а) $\int\frac{x^2-2}{x^2+2}dx$; б) $\int\frac{dx}{x^2+2x+11}$; в) $\int\frac{xdx}{1+\sqrt{x-1}}$;

   г) $\int(x+3)e^{-2x}dx$; д) $\int\left(\cos 4x+e^{4x}-\operatorname{ctg}2x-9\right)dx$.

3. а) $\int\frac{x^2-1}{x^2+2}dx$; б) $\int\frac{dx}{x^2-2x+9}$; в) $\int(x+3)e^{2x}dx$;

   г) $\int\frac{x\,dx}{2+\sqrt{x+1}}$; д) $\int\left(\cos 6x-\operatorname{tg}3x+2^{4x}-7\right)dx$.

4. а) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$; в) $\int \frac{x\,dx}{3+\sqrt{x+1}}$;

г) $\int (x+3)\sin 2x dx$; д) $\int \left(\operatorname{tg} 3x - e^{4x} + \cos 3x - 3\right)dx$.

5. а) $\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2+5}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+6x+11}$; в) $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x+4}}$;

г) $\int (x-3)\cos 2x dx$; д) $\int \left(\operatorname{ctg} 2x - e^{-2x} + \sin 5x + 3\right)dx$.

6. а) $\int \frac{1+2x}{\sqrt{x^2-5}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$; в) $\int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x+3}}$;

г) $\int x\ln(x+5)dx$; д) $\int \left(\sin 3x - \cos 4x + e^{-4x} + \operatorname{tg} 2x - 1\right)dx$.

7. а) $\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2-6}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+8x+17}$; в) $\int \frac{x\,dx}{3+\sqrt{x+2}}$;

г) $\int \ln\left(x^2+2\right)dx$; д) $\int \left(\operatorname{tg} 3x - \cos 3x + e^{3x} - 3\right)dx$.

8. а) $\int \frac{4-x}{\sqrt{x^2+6}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-8x+18}$; в) $\int \frac{x\,dx}{4+\sqrt{x+1}}$;

г) $\int x\sin 5x dx$; д) $\int \left(\operatorname{ctg} 4x - \cos 4x + e^{-4x} + 4\right)dx$.

9. а) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2-2}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$; в) $\int \frac{x\,dx}{4-\sqrt{x+2}}$;

г) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$; д) $\int \left(\sin 5x - \operatorname{tg} 5x - e^{-5x} + 5\right)dx$.

10. а) $\int \frac{x^2+7}{x^2+6}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2-10x+27}$; в) $\int \frac{xdx}{4+\sqrt{x-2}}$;

г) $\int \operatorname{arcctg} 3x\,dx$; д) $\int \left(\cos 6x + \operatorname{ctg} 6x - e^{6x} - 6\right)dx$.

Розділ 3. Визначений інтеграл

3.1. Формула Ньютона-Лейбніца.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

ПРИМІТКА. Всі способи, формули для обчислення визначеного інтеграла залишаються такі ж, як і для невизначеного інтеграла.

3.2. Застосування визначеного інтеграла.

1. *Площа простої фігури.*

Площа криволінійної трапеції, обмежена неперервною кривою $y = f(x)$, двома паралельними прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі Ox $(a \le x \le b)$ дорівнює:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо площа $\boldsymbol{S}$ обмежена двома неперервними кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $f_1(x) \le f_2(x)$, то $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$

2. *Об'єм тіла обертання.*

Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженою кривою $y = f(x)$, віссю Ox, прямими $x = a$, $x = b$ навколо осей Ox і Oy обчислюється за формулами:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx,$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy dx.$$

Приклади розв'язування задач.

Приклад 1.

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x}=t & t_н = \sqrt{4}=2 \\ x=t^2 & t_в=\sqrt{9}=3 \\ dx=2tdt & \end{bmatrix} = \int_2^3 \frac{t-1}{t+1}\cdot 2tdt = \left(t^2-4t+4\ln|t|\right)\Big|_2^3 =$$

$$= \left(9-12+4\ln 4\right)-\left(4-8+4\ln 3\right)=2{,}15.$$

Приклад 2. Обчислити площу плоскої фігури, обмежену лініями:

$$y=\sin x+2,\quad y=1,\quad x=0,\quad x=\pi.$$

Розв'язування.

$$S=\int_0^\pi (\sin x+2+1)dx = \int_0^\pi \sin x dx + 3\int_0^\pi dx = -\cos x\Big|_0^\pi + 3x\Big|_0^\pi = -(-1-1)+3\pi = 2+3\pi.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кривої $y=\sqrt{4x-x^2}$, $y=0$, $x=2$ $(0\le x\le 2)$.:

Розв'язування.

$$V=\pi\int_0^2 y^2dx = \pi\int_0^2 \left(4x-x^2\right)dx = \pi\left(4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{3}\pi.$$

Завдання для самостійного розв'язування.

Обчислити визначені інтеграли.

1. а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{3+x}$.

2. а) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$; б) $\displaystyle\int_4^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}+2}dx$.

3. а) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{2x-7}$; б) $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{4+\sqrt{x+3}}$.

4. а) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^2+3}$; б) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{2+\sqrt{x+5}}$.

5. а) $\int_0^{\pi} \cos 3x\, dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{4+\sqrt{x}}$.

6. а) $\int_0^{\pi} \sin 4x\, dx$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+2}$.

7. а) $\int_0^1 e^{3x} dx$; б) $\int_{-7}^1 \frac{dx}{3+\sqrt{2-x}}$.

8. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} 2x\, dx$; б) $\int_0^9 \frac{dx}{12+\sqrt{x}}$.

9. а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{9+\sqrt{x}}$.

10. а) $\int_0^2 2^x dx$; б) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}\, dx}{x+8}$.

Розділ 4. Елементи теорії ймовірностей

4.1. Елементи теорії ймовірностей.

До вихідних понять теорії ймовірностей належать поняття *стохастичного експерименту, випадкової події і ймовірності випадкової події.*

Означення. Стохастичними (*випадковими*) експериментами називаються експерименти, результати яких не можна передбачити наперед. Припускається, що з розглядуваним експериментом можна пов'язати поняття сукупності всіх можливих його результатів. Кожний із цих можливих результатів будемо називати *елементарною* (*нерозкладною*) подією, або *елементарним* результатом, а сукупність (множину) усіх таких можливих результатів – *простором елементарних подій* (*результатів*). Отже, унаслідок аналізованого випадкового експерименту обов'язково відбувається одна з елементарних подій, до того ж одночасно з нею не може відбутися жодна з інших елементарних подій (події, які мають таку властивість, називають *несумісними*).

Домовимося позначати простір елементарних подій літерою Ω, а елементарну подію – літерою ω і записувати $\omega \in \Omega$ (це означає, що ω належить Ω).

Приклад 1. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій даного експерименту.

Розв'язання. Наслідками цього випробування можуть бути такі елементарні випадкові події:

$\omega_1 = ГГ$ (двічі випаде герб);

$\omega_2 = ГЦ$ (за першого кидання випаде герб, а за другого – цифра);

$\omega_3 = ЦГ$ (за першого кидання випаде цифра, а за другого – герб);

$\omega_4 = ЦЦ$ (двічі випаде цифра).

Простором елементарних подій цього експерименту є множина:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \text{ або } \Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}.$$

Приклад 2. У квадрат на площині зі стороною $2a$ і з центром у початку координат, сторони якого паралельні до осей координат, навмання «кидають» точку. Описати простір елементарних подій.

Розв'язання. У цьому випадку можливими наслідками експерименту є попадання в будь-яку точку описаного квадрата. Якщо x, y вважати координатами точки на площині, то простір елементарних подій

$$\Omega = \{(x, y): -a \le x \le a,\ -a \le y \le a\}$$

є множиною нескінченною і незліченною (елементів цієї множини не можна ні полічити, ні занумерувати).

Випадкові події як підмножини у просторі елементарних подій

У реальному досліді, крім взаємно виключних елементарних результатів, може бути багато інших, так званих *складених* (або *подільних*) випадкових подій. У *прикладі 1* перелічено елементарні результати експерименту: $\omega_1 = ГГ$; $\omega_2 = ГЦ$; $\omega_3 = ЦГ$; $\omega_4 = ЦЦ$, які пов'язані з дворазовим киданням монети. У цьому досліді можна також розглядати складену випадкову подію, яка полягає в тому, що герб випаде хоча б один раз. Дана подія відбудеться тоді, і тільки тоді, коли відбудеться одна з трьох елементарних подій: ω_1 або ω_2, або ω_3.

Складені випадкові події позначають великими латинськими літерами A, B, C, … . Кожну реальну випадкову подію A в математичній моделі ототожнюють з деякою підмножиною A' множини Ω, включаючи до A' тільки ті елементарні події ω, за яких настає подія A. Елементи ω множини A' називають елементарними подіями, які є *сприятливими* для появи події A.

Отже, надалі подія A – це деяка підмножина простору Ω, що складається з усіх елементарних подій ω, які є сприятливими для події A. Якщо результат експерименту описується точкою ω і $\omega \in A$, то в даному експерименті подія A відбулася. Якщо точка $\omega \notin A$, то подія A в цьому експерименті не відбулася. Сама множина Ω також є подією. Цю подію називають *вірогідною* (*достовірною*), оскільки вона обов'язково настає під час будь-якого результату експерименту. *Неможливою* є подія, яка в процесі виконання даного експерименту не може відбутися. Очевидно, неможливій події відповідає порожня множина елементарних подій. Тому неможливу подію позначають, як і порожню множину, через $\varnothing$.

4.2. Теореми теорії ймовірностей.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.

Якщо події A і B несумісні ($A \cap B = \varnothing$)*, причому відомі їх ймовірності* $P(A)$ *і* $P(B)$*, то ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

Дійсно, нехай n – число всіх елементарних подій в деякому досліді, m_1 – число елементарних подій, сприятливих події A, m_2 – число елементарних подій, сприятливих події B. Тоді появі події $A \cup B$ сприяють $m_1 + m_2$ елементарних подій. Отже , за класичним означенням ймовірності

$$P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

Наслідок 1. Ймовірність протилежної події обчислюється за формулою

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{2}$$

Дійсно, оскільки $A \cup \overline{A} = \Omega$, то $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$. З іншого боку, $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Отже, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, звідки $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Наслідок 2.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{3}$$

де A_i ($i = \overline{1,n}$) – попарно несумісні події.

Наслідок 3. Якщо події A_i ($i = \overline{1,n}$) утворюють повну групу попарно несумісних подій, то

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \qquad (4)$$

Дійсно, за означенням повної групи попарно несумісних подій маємо $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, але $P(\Omega) = 1$. Отже, за наслідком 2 маємо формулу (4).

Вище ми говорили, що в основі означення ймовірності випадкової події лежить сукупність деяких певних умов. Якщо ж ніяких інших обмежень, крім цих умов, при обчисленні ймовірності $P(A)$ не накладається, то така ймовірність називається *безумовною*. Якщо ж поява деякої події A відбувається за умови, що відбулась інша подія B, причому $P(B) > 0$, то ймовірність появи події A називають *умовною* і обчислюють за формулою

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (P(B) > 0). \qquad (5)$$

Теорема множення ймовірностей залежних подій.

Розглянемо дві залежні події A і B, причому відомі ймовірності $P(A)$ і $P(B/A)$. Ймовірність суміщення цих подій обчислюється за теоремою:

Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчисленої за умови, що перша відбулася

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

4.3. Повна імовірність. Формула Байєса. Незалежні випробування.

Теорема 1. (формула повної ймовірності). Ймовірність події A, що може відбутись разом з однією з гіпотез $H_1, H_2, \ldots H_n$, дорівнює сумі добутків ймовірності кожної з гіпотез на відповідну умовну ймовірність події A:

$$P(A) = P(H_1)P_{H1}(A) + \ldots P(H_n)P_{Hn}(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{Hi}(A)$$

Теорема 2 (Теорема Байєса). Ймовірність гіпотези після випробовування дорівнює добутку ймовірності гіпотези до випробовування на відповідну їй умовну ймовірність події, яка відбулася в результаті випробовування, поділеній на повну ймовірність цієї події:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)}, \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \qquad (6)$$

Завдання для самостійного розв'язування.

1. У збиральний цех надходять 20 деталей з першого автомата, 40 деталей з другого, 10 деталей з третього, 30 деталей з четвертого. Імовірність браку з першого автомата дорівнює 0,1, з другого – 0,6, з третього – 0,2, з четвертого – 0,3. Визначити ймовірність того, що: 1) взята навмання деталь буде бракованою; 2) бракована деталь виготовлена на I автоматі.

2. У ящику 12 деталей, виготовлених на заводі №1, 20 деталей – на заводі № 2 і 18 деталей – на заводі № 3. Імовірність того, що деталь виготовлена на заводі № 1 відмінної якості дорівнює 0,9; для деталей виготовлених на заводах №2 і №3, ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,6 та 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться відмінної якості.

3. Виробник комп'ютерів отримує комплектуючі деталі від трьох постачальників, частки яких становлять 20, 45, 35%. Деталі першого постачальника мають 2% браку, другого 1,5, третього – 1,7. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрана деталь буде з браком; б) браковану деталь отримано від другого постачальника?

4. У контейнер, який містить 3 вироби невідомої якості, додано один нестандартний виріб. Потім один виріб вийнято випадковим способом для контролю. 1) Знайти ймовірність того, що вийнято стандартний виріб, якщо однаково можливі всі припущення про початковий якісний склад виробів; 2) Вийнятий виріб виявився стандартним. Яким був найімовірніший початковий склад виробів?

5. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що з 200 новонароджених буде 95 дівчаток.

6. В першій урні 3 білих і 3 чорних кульки, в другій урні 4 білих і 2 чорних кульки, в третій урні 2 білих і 4 чорних кульки. Навмання вибрали урну і з неї взяли кульку. Яка ймовірність, що вона біла?

7. У трьох ящиках міститься по 10 деталей. Серед деталей першого ящика є 3 нестандартних деталі, серед другого – 5, а серед деталей третього – їх 7. Навмання взяту деталь у першому ящику перекладають у другий ящик, потім навмання взяту деталь у другому ящику перекладають у третій ящик. Знайти ймовірність того, що навмання взята у третьому ящику деталь виявиться стандартною.

8. Три студенти складають іспит. Ймовірність того, що перший студент складе дорівнює 0,9; другий – 0,7; третій – 0,6. Знайти ймовірність того, що: а) два студенти складуть іспит; б) всі три студенти складуть іспит; в) хоча б один студент складе іспит.

9. В армію призвано 120 чоловік з першого району та 240 з другого. У першому районі чоловіки-призовники зростом вище 170 см становлять 95% загальної кількості, а в другому – лише 72%. Взятий навмання зі списку призовник виявився зростом вище 170 см. Яка ймовірність того, що він з першого району?

10. В коробці лежить куля невідомого кольору – з рівною ймовірністю біла чи чорна. В коробку кладуть одну білу кулю і після ретельного перемішування навмання дістають одну кулю. Вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що куля, що залишилась в урні, також біла?

Розділ 5. Випадкові величини.

5.1. Випадкові величини. Закон розподілу випадкової величини.

5.1.1. Дискретні і неперервні випадкові величини.

В теорії ймовірностей поряд з поняттям випадкової події і ймовірності одним з основних є поняття випадкової величини. Наприклад, час безвідмовної роботи деякого приладу, число появ герба при трьох підкиданнях монети тощо.

Назвемо *випадковою* величину, пов'язану з даним дослідом, яка при кожному здійсненні досліду може набувати того чи іншого числового значення, залежно від випадку.

Між випадковими подіями і випадковими величинами існує тісний зв'язок.

Випадкова подія є якісною характеристикою випадкового результату досліду, а випадкова величина – його кількісною характеристикою. Випадкові величини за своїм характером поділяються на *дискретні* і *неперервні*.

Дискретна випадкова величина – це така величина, яка може набувати лише розрізнених (дискретних, перервних) значення. Іншими словами, вона має таку властивість, що кожне з її можливих значень має окіл, який вже не містить жодного з інших значень цієї ж величини. Всі можливі значення дискретної випадкової величини можуть бути перенумеровані

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \ .$$

Випадкова величина X називається *неперервною*, якщо сукупність її можливих значень цілком заповнює деякий проміжок числової осі, який може бути скінченним або нескінченним. Наприклад, випадкова величина X – час безвідмовної роботи приладу, – неперервна, оскільки її можливе значення $t > 0$.

5.1.2. Закон розподілу випадкової величини.

Важливою характеристикою випадкової величини є *розподіл ймовірностей* цієї величини. Справа в тому, що випадкова величина може набувати тих чи інших числових значення, взагалі кажучи, із різними ймовірностями.

<u>Приклад 1.</u> При трьох підкиданнях монети випадкова величина X – число появ герба – може набувати значень $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3$ із відповідними ймовірностями, які обчислимо за формулою Бернуллі

$$p_1 = P_3(0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},\ \ p_2 = P_3(1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$p_3 = P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}, \qquad p_4 = P_3(3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}.$$

Співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і ймовірностями, з якими приймаються ці значення, називається законом розподілу ймовірностей випадкової величини.

Для дискретної випадкової величини X закон розподілу може бути заданий таблично або графічно. В першому випадку закон розподілу називається *рядом розподілу ймовірностей* випадкової величини X .

X	x_1	x_2	. . .	x_n
P	p_1	p_2	. . .	p_n

В першому рядку таблиці записують всі можливі значення випадкової величини в порядку зростання, а в другому – відповідні їм ймовірності.

Оскільки події $\{X = x_1\},\ \{X = x_2\},\ \ldots,\ \{X = x_n\}$ становлять повну групу несумісних подій, то за теоремою додавання ймовірностей маємо

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1; \tag{1}$$

тобто сума ймовірностей всіх можливих значень випадкової величини дорівнює одиниці.

Графічне зображення закону розподілу називається *многокутником розподілу*: по осі абсцис відкладаємо можливі значення x_k випадкової величини X , а по осі ординат – ймовірності p_k цих значень.

Для розглянутого вище прикладу 1 ряд і многокутник розподілу мають вигляд відповідно:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Закон розподілу неперервної випадкової величини може бути заданий графічно або аналітично $p_k = f(x_k)$ (за допомогою формули). Табличне задання неможливе, оскільки ймовірність отримати будь-яке певне значення неперервної величини дорівнює нулеві, що пов'язане не з неможливістю самої події (попадання в певну точку на числовій осі), а з безмежно великим числом можливих випадків.

Тому для неперервних випадкових величин (як, зрештою, і для дискретних) визначають ймовірність попадання в деякий інтервал числової осі.

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[a, b]$ визначають як ймовірність події $\{a \le X < b\}$ і позначають

$$P\{a \le X < b\}, \qquad (2)$$

(ліву межу інтервалу включають, а праву не включають).

5.1.3. Функція розподілу.

Для кількісної оцінки закону розподілу випадкової величини (дискретної або неперервної) задають *функцію розподілу ймовірностей випадкової величини, яку визначають як ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, менше деякого фіксованого числа x, і позначають*

$$F(x) = P\{X < x\}, \qquad (3)$$

або $F(x) = P\{-\infty < X < x\}$.

Функцію розподілу $F(x)$ інколи називають *інтегральною функцією* розподілу ймовірностей випадкової величини.

Знаючи функцію розподілу $F(x)$, можна обчислити ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал $[a, b)$:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

Дійсно, випадкова подія $\{X < b\}$ є об'єднанням двох несумісних подій $\{X < a\}$ і $\{a \le X < b\}$.

Отже, за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій маємо $P\{X < b\} = P\{X < a\} + P\{a \le X < b\}$, звідки $P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\}$, або, враховуючи позначення (3), $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$.

Встановимо деякі *властивості функції розподілу*.

1^0. $F(x)$ є неспадною функцією, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_1 < x_2$.

2^0. Значення функції розподілу належать відрізку $[0;1]$, тобто $0 \le F(x) \le 1$.

Інакше: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

3^0. Функція розподілу неперервна зліва: $F(x) = F(x-0), \qquad \forall x$.

Для прикладу 1 побудуємо функцію розподілу випадкової величини X, заданої рядом розподілу:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

При $x < 0 \qquad F(x) = P\{X < 0\} = 0;$

при $0 \le x < 1 \qquad F(x) = P\{X < 1\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{8};$

при $1 \le x < 2 \qquad F(x) = P\{X < 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2};$

при

$2 \le x < 3 \qquad F(x) = P\{X < 3\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};$

при $x \ge 3 \qquad F(x) = P\{X \ge 3\} = 1.$

<u>**Приклад 2.**</u> Нехай функція розподілу деякої неперервної випадкової величини X задана у вигляді

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ a(1-\cos x), & 0<x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}.$$

Визначити значення коефіцієнта a і побудувати графік функції.

Оскільки функція неперервна зліва, то при $x=\pi$ маємо $a(1-\cos\pi)=1$, звідки $a=\frac{1}{2}$.

5.1.4. Щільність розподілу.

Закон розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин може бути заданий також і *щільністю розподілу*.

Нехай неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$, неперервною і диференційовною. Ймовірність попадання цієї випадкової величини в деякий інтервал $(x,\ x+\Delta x)$ знайдемо на підставі співвідношення (4): $P\{x<X<x+\Delta x\}=F(x+\Delta x)-F(x),$ тобто як приріст функції розподілу на цьому інтервалі.

Відношення $\dfrac{P\{x<X<x+\Delta x\}}{\Delta x}$ виражає середню ймовірність, яка приходиться на одиницю довжини інтервалу.

Перейшовши до границі при $\Delta x\to 0$, отримаємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)$.

Функція

$$f(x)=F'(x) \qquad (5)$$

називається *щільністю розподілу* неперервної випадкової величини X, а її графік – *кривою розподілу*. Іноді вживають термін – *диференціальна функція розподілу* .

З означення (5) випливає, що

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad (6)$$

Використавши формули (4) і (6), виразимо ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал через щільність розподілу

$$P\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)dx \tag{7}$$

Дійсно, $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Встановимо деякі *властивості щільності розподілу*:

1^0. $f(x)$ є невід'ємною функцією, тобто $f(x) \ge 0$.

Дійсно, оскільки $F(x)$ неспадна функція, то $F'(x) = f(x) \ge 0$.

2^0. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Це випливає із формули (6) і властивості 2^0 для функції розподілу $F(x)$.

Геометричне тлумачення щільності розподілу випливає із формули (7): ймовірність попадання випадкової величини X обчислюється як площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком кривої $f(x)$, знизу – відрізком $[a, b]$ осі абсцис, зліва і справа – відрізками прямих $x = a$, $x = b$.

Властивість 2^0 геометрично означає, що вся площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, дорівнює одиниці.

5.2. Числові характеристики випадкових величин.

Найбільш повна характеристика випадкової величини дається її функцією розподілу (або також і щільністю розподілу для неперервної випадкової величини). Проте досить часто доцільно обмежитися простішою, хоч і неповною інформацією про випадкову величину. Наприклад, досить вказати окремі числові величини, які певним чином визначають істотні риси розподілу випадкової величини: деяке середнє значення випадкової величини; деяке число, що характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини навколо її середнього значення, тощо. Користуючись такими характеристиками, ми в стислій формі можемо отримати інформацію про істотні особливості законів розподілу випадкової величини.

Характеристики, що виражають в стислій формі найістотніші особливості закону розподілу випадкової величини, називаються числовими характеристиками випадкової величини.

До них в першу чергу відносяться математичне сподівання і дисперсія.

5.2.1. Математичне сподівання.

Випадкова величина може приймати різні числові значення, тому практично важливим є середнє значення випадкової величини. Для оцінки середнього (у ймовірнісному сенсі) значення випадкової величини вводиться *поняття математичного сподівання, яке є дійсним середнім значенням випадкової величини і визначається з врахуванням різних ймовірностей її окремих значень.*

Математичне сподівання випадкової величини X позначаємо $M[X]$. Для дискретної випадкової величини X, заданої рядом розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n	$\dots$

де $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, математичне сподівання обчислюється за формулою:

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_i p_i + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,, \qquad (8)$$

якщо ряд справа збігається.

Нехай X – неперервна випадкова величина, значення якої $a \le x \le b$, і $f(x)$ – її щільність розподілу. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n частин, довжини яких Δx_1, $\Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Візьмемо в кожному частинному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ точку ξ_i. Добуток $f(\xi_i)\Delta x_i$ приблизно дорівнює ймовірності попадання неперервної випадкової величини в інтервал Δx_i, а сума $\sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i$ наближено дорівнює математичному сподіванню неперервної випадкової величини. Якщо існує границя $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\Delta x_i$, то вона називається математичним сподіванням неперервної випадкової величини і позначається

$$M[X]=\int_a^b xf(x)dx. \qquad (9)$$

У випадку, якщо $-\infty < x < +\infty$, то $M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, причому інтеграл повинен збігатися абсолютно. Відзначимо *найпростіші властивості математичного сподівання*:

1^0. $M[C]=C$; де C – стала величина,

2^0. $M[CX]=C\cdot M[X]$;

3^0. $M[X+C]=M[X]+C$;

Математичне сподівання називають *центром розподілу ймовірностей випадкової величини* X, випадкова величина $\overset{o}{X}=X-M[X]$ називається *центрованою*.

5.2.2. Дисперсія.

Для характеристики розсіювання значень випадкової величини відносно її центра розподілу (математичного сподівання) вводять числову характеристику – дисперсію випадкової величини. Позначається $D[X]$. За означенням, дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$D[X]=M[X-M[X]]^2. \qquad (10)$$

Дисперсія обчислюється за формулами

$$D[X]=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-m_x)^2 p_i \qquad (11)$$

для дискретних випадкових величин, і

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx \qquad (12)$$

для неперервних випадкових величин. Тут для простоти позначено $m_x=M[X]$.

Найпростіші властивості:

1^0. $D[C]=0$; де C – стала величина,

2^0. $D[CX]=C^2\cdot D[X]$;

3^0. $D[X+C]=D[X]$.

Практично дисперсію обчислюють за робочою формулою

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2, \qquad (13)$$

де $M[X^2]=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2 p_i$ для дискретних випадкових величин і

$M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx$ для неперервних випадкових величин.

Дисперсія є кількісною оцінкою відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Проте, оскільки дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, то для оцінки міри розсіювання використовують характеристику $\sigma_x=\sqrt{D[X]}$, яка називається середнім квадратичним або стандартним відхиленням випадкової величини. Оскільки $D[X]\geq 0$, то і $\sigma_x=\sqrt{D[X]}\geq 0$. Розмірність середнього квадратичного відхилення співпадає з розмірністю випадкової величини.

Приклад 1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,35	0,20	0,15

Знайти $M[X]$ і σ_x.

Розв'язання. За формулою (8):

$$M[X]=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}35+3\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}15=2{,}1.$$

$$M[X^2]=1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}35+9\cdot 0{,}2+16\cdot 0{,}15=5{,}8.$$

За формулою (13) $D[X]=5{,}8-(2{,}1)^2=1{,}39$. Звідки $\sigma_x=\sqrt{1{,}39}\approx 1{,}17$.

Приклад 2. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\leq x\leq 2\\ 0, & x<0,\ x>2.\end{cases}$.

Знайти $M\left[X\right]$ і σ_x.

Розв'язання. За формулою (9) $M\left[X\right]=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\frac{4}{3}.$

$M[X^2]=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx=2.$

Отже, $D\left[X\right]=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$ $\sigma_x=\sqrt{\frac{2}{9}}\approx 0{,}471.$

5.2.3. Моменти.

Більш загальною формою числових характеристик випадкових величин є моменти k–го порядку. Моментом k–го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k–го степеня відхилення випадкової величини від деякої сталої величини a:

$$M[(X-a)^k]. \qquad (14)$$

Якщо a=0, то момент називається *початковим:*

$$\nu_k=M[X^k]. \qquad (15)$$

Очевидно, що $\nu_1=M\left[X\right]$, $\nu_2=M[X^2]$.

Якщо $a=M\left[X\right]$, то момент називається *центральним:*

$$\mu_k=M[(X-M[X])^k]. \qquad (16)$$

Очевидно, що $\mu_0=1$, $\mu_1=0$, $\mu_2=M\left[\left(X-M\left[X\right]\right)^2\right]=D\left[X\right].$

Між центральними і початковими моментами існує простий зв'язок, зокрема $\mu_2=\nu_2-\nu_1^2$, $\mu_3=\nu_3-3\nu_1\nu_2+2\nu_1^3$, $\mu_4=\nu_4-4\nu_1\nu_3+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4$.

Величина $M\left[\left|X-a\right|^k\right]$ називається *абсолютним моментом* k–го порядку.

В теорії ймовірностей та її застосуваннях часто використовують інші числові характеристики.

Модою випадкової величини X (позначається Mo) називається найімовірніше значення випадкової величини.

Медіана (Me) випадкової величини – таке значення випадкової величини, відносно якого рівноймовірно одержання більшого або меншого значення випадкової величини, тобто $P(X < Me) = P(X \geq Me)$.

Медіана – це абсциса точки, в якій площа під кривою розподілу ділиться навпіл. Медіана визначається як корінь рівняння $F(x) = 0{,}5$.

Коефіцієнт асиметрії (зкошеності) $S_k = \dfrac{\mu_3}{\sigma_x^3}$ характеризує асиметрію графіка функції розподілу.

Коефіцієнт ексцесу $E_k = \dfrac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$ характеризує гостровершинність кривої розподілу.

На практиці використовується відносна характеристика розсіювання, яка називається *коефіцієнтом варіації* і представляє собою середнє квадратичне відхилення у відсотках до математичного сподівання $V = \dfrac{\sigma_x}{M[X]} \cdot 100$ %.

Коефіцієнт варіації показує, наскільки велике розсіювання порівняно із середнім значенням випадкової величини.

5.3. Основні закони розподілу та їх числові характеристики.

а) *дискретних випадкових величин*:

1. *Біномний розподіл.*

Випадкова величина X – число появ деякої події A в n незалежних спробах, причому $P(A) = p$. Випадкова величина X називається розподіленою за біномним законом, якщо вона приймає значення $x = 0, 1, 2, ..., n$ із ймовірностями $P_n(x) = C_n^x \, p^x \, q^{n-x}$.

Функція розподілу $F(x) = \sum_{x=0}^{n-1} C_n^x \, p^x \, q^{n-x}$. Очевидно, що $F(x)$=0 при $x \leq 0$ і $F(x)$=1 при $x > n$.

Нехай X_i – число появ події A в i-й спробі $(i=\overline{1,n})$. Кожна з дискретних випадкових величин X_i приймає тільки два можливі значення: 0 і 1. Отже, ряд розподілу

X_i	0	1
P	q	p

Звідки $M[X_i]=p$, $M[X_i^2]=p$, $D[X_i]=p-p^2=pq$.

Випадкова величина $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$. Оскільки випадкові величини X_i незалежні в сукупності, то $M[X]=\sum_{i=1}^{n}M[X_i]=np$,

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}D[X_i]=npq. \qquad (17)$$

2. *Розподіл Пуассона.*

Випадкова величина X називається розподіленою за законом Пуассона з параметром $\lambda>0$ ($\lambda=np$), якщо вона приймає значення $x=0,1,2,\ldots,n,\ldots$ із ймовірностями $P_n(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, причому p дуже мале, а n дуже велике число.

Функція розподілу $F(x)=\sum_{x=0}^{n-1}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$.

$M[X]=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$. Отже,

$$M[X]=\lambda \qquad (18)$$

$$M[X^2]=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}[(x-1)+1]\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}+$$

$$+\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda\, e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^2+\lambda.$$

Отже,

$$D[X] = (\lambda^2 + \lambda) - (\lambda)^2 = \lambda. \tag{19}$$

3. *Геометричний розподіл.*

Нехай проводиться серія незалежних дослідів, в кожному з яких подія *A* може з'явитися з деякою ймовірністю *p*. Досліди продовжуються до першої появи події *A*, після чого дослід припиняється.

Нехай випадкова величина *X* – кількість проведених дослідів до першої появи події *A*.

Можливі значення величини *X*: $x = 1, 2, 3, \ldots$. Подія $X = n (n \in / N)$ означає, що в перших $n-1$ дослідах подія A не наступила, а в n-му досліді наступила. Ймовірність $P(X = n)$ дорівнює

$$P(X = n) = \underbrace{(1-p)(1-p)\ldots(1-p)}_{n-1 \text{ разів}} \cdot p = q^{n-1} \cdot p \qquad (p+q=1).$$

Отже, закон розподілу величини X є таким:

X	1	2	3	$\ldots$	n	$\ldots$
P	p	qp	$q^2 p$	$\ldots$	$q^{n-1}p$	$\ldots$

Цей розподіл називається *геометричним* .

Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = p + qp + q^2 p + \ldots + q^{n-1} p + \ldots = \dfrac{p}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1,$ як сума нескінченно спадної геометричної прогресії.

Функція розподілу $F(x) = \sum\limits_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p$. $F(x) = 0$ при $x < 1$.

Обчислимо математичне сподівання

$$M[X] = p + 2pq + 3pq^2 + \ldots + npq^{n-1} + \ldots = p\left(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots\right). \tag{20}$$

Для знаходження суми ряду в правій частині (20) використаємо геометричний ряд $q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$, $q < 1$, сума якого

$$S = \frac{q}{1-q}. \tag{21}$$

Диференціюємо (21) по q: $\dfrac{dS}{dq} = \left(\dfrac{q}{1-q}\right)' = 1 + 2q + 3q^2 + ... + nq^{n-1} + ...$

Оскільки $\dfrac{dS}{dq} = \dfrac{1-q+q}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \dfrac{1}{p^2}$, то

$$M[X] = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}. \tag{22}$$

Знайдемо

$$M[X^2] = p + 4pq + 9pq^2 + ... + pn^2q^{n-1} + ... = p\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1}. \tag{23}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \dfrac{1}{p^2}$ домножимо на q: $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n} = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{q}{(1-q)^2}$ і диференціюємо по q: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1} = \dfrac{d}{dq}\left(\dfrac{q}{(1-q)^2}\right) = \dfrac{1+q}{(1-q)^3}$. Отриманий ряд домножимо на $p = 1-q$: звідки $M[X^2] = \dfrac{1+q}{(1-q)^2}$.

Отже,

$$D[X] = \frac{1+q}{(1-q)^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \tag{24}$$

б) *неперервних випадкових величин*.

4. *Рівномірний розподіл.*

Випадкова величина X називається *розподіленою рівномірно на інтервалі* $[a,b]$, якщо її щільність розподілу стала на цьому інтервалі
$$f(x) = \begin{cases} C, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Використовуючи властивість щільності розподілу, знайдемо C:

$$\int_a^b C dx = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{b-a}.$$

Легко бачити, що $F(x)=\int_a^x \frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}$ для $x\in[a,b]$. $F(x)=0$ для $x<a$, $F(x)=1$ для $x>b$

Оскільки $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b] \\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases},$ то

$$M[X]=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}. \qquad (25)$$

$$M[X^2]=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Отже,

$$D[X]=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (26)$$

5. *Показниковий розподіл.*

Випадкова величина X називається *розподіленою за показниковим (експоненційним) законом з параметром* $\lambda>0$, якщо її щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0.\end{cases} \qquad \lambda>0\ -\mathrm{const}$$

Використовуючи формулу (13) $F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx$, отримаємо вираз

для функції розподілу $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0\end{cases}.$

Оскільки $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0.\end{cases}$ $(\lambda>0)$. , то

$$M[X]=\int_0^\infty x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}. \qquad (27)$$

$$M[X^2]=\int_0^\infty x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Отже, $D[X]=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$. (28)

6. *Нормальний закон.*

Випадкова величина X називається *розподіленою за нормальним законом з параметрами* a і σ, якщо її щільність розподілу

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Функція розподілу має вигляд $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$

Якщо зробити заміну $\frac{x-a}{\sigma}=t, \quad dx=\sigma\, dt,$

то $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$

де $\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ – функція Лапласа.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi} \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{2};$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R d\rho\cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}}\cdot\rho=-2\pi\cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}}\Bigg|_0^R=2\pi\left(1-e^{-R/2}\right);$$

якщо $R\to\infty$, то $\iint\to 2\pi$, але $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cdot e^{-y^2/2}\,dx\,dy=2\pi \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi}$.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення з інтервалу $[\alpha,\beta]$, обчислюється за формулою $P(\alpha\le x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

Обчислимо математичне сподівання $M[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \text{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-\frac{(\text{x-a})^2}{2\sigma^2}}dx.$

Зробивши заміну $t=\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$, $x=a+\sigma t\sqrt{2}$, $dx=\sigma\sqrt{2}dt$; отримаємо

$$M[X]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(a+t\sigma\sqrt{2})\,e^{-t^2}dt=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt+0\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t\,e^{-t^2}dt.$$

Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ (це інтеграл Пуассона), інтеграл $\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t\,e^{-t^2}dt=0$, як інтеграл від непарної функції. Отже,

$$M[X]=a. \qquad (29)$$

Обчислимо дисперсію $D[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\int(\text{x - a}))^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-\frac{(\text{x-a})^2}{2\sigma^2}}dx.$ Заміна $t=\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$ зводить інтеграл до такого $\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}2t^2\,e^{-t^2}dt$, який інтегруємо частинами $\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(-t\,e^{-t^2}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=\sigma^2.$

Таким чином,

$$D[X]=\sigma^2. \qquad (30)$$

Отже, ми з’ясували ймовірнісний зміст параметрів нормального розподілу a – це математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини, а σ – її середнє квадратичне відхилення.

5.4. Ймовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання. Правило трьох сигм.

Нехай X – нормально розподілена випадкова величина з параметрами a і σ. Ймовірність того, що її значення відхиляться від математичного сподівання a не більше, ніж на деяке число $\delta>0$, обчислюється за формулою

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (31)$$

Дійсно, переписавши нерівність $|X-a|<\delta$ у вигляді $a-\delta<X<a+\delta$ і врахувавши формулу для ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини в деякий інтервал $[\alpha,\beta]$

$P(\alpha\le x<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, отримаємо

$$P(a-\delta<X<a+\delta)=\Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Покладемо у формулі (31) $\delta=3\sigma$, тоді

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973. \qquad (32)$$

Формула (32) виражає так зване правило трьох сигм, зміст якого такий: у 99,73% випадків значення нормально розподіленої випадкової величини буде відрізнятися від свого середнього (математичного сподівання) не більше, ніж на потроєне значення свого середнього квадратичного.

Завдання для самостійного розв'язування.

1. Маша посварилась з Вовою і не хоче їхати з ним одним автобусом. Від гуртожитку до інституту з 7 до 8 години ранку відходить 5 автобусів. Хто не встигає на останній, той запізнюється на лекцію. Скількома способами Маша та Вова можуть доїхати до інституту в різних автобусах і не спізнитись на лекцію?

2. В магазин надійшли 100 телевізорів "Sony", з яких 10 – японської зборки, 20 – корейської, 70 – китайської. Знайти імовірність того, що куплений телевізор буде не китайської зборки.

3. (Формула Байєса). У ящику 12 білих, 8 чорних і 10 червоних куль. Яка імовірність того, що навмання вибрана куля буде червоною, якщо відомо, що вона не чорна?

4. (Рівняння Бернуллі). Ви граєте у шахи з однаковим по силі партнером. Де буде більше імовірність: 3 перемоги з 4 партій чи 5 перемог з 8 партій?

5. Імовірність того, що стрілок попаде в ціль рівна 0,6. Найімовірніша кількість влучень – 15. Скільки було зроблено пострілів?

6. З Черкас до Києва веде 5 доріг, а з Києва до Житомира – 3 дороги. Скількома способами можна проїхати з Черкас до Житомира?

7. В ящику 20 білих і 6 чорних куль. Навмання виймають одну кулю, потім повертають її у ящик, перемішують і знову дістають одну кулю. Знайти імовірність того, що обидва рази були вийняті білі кулі.

8. (Формула Байєса). У ящику 12 білих, 8 чорних і 10 червоних куль. Яка імовірність того, що навмання вибрана куля буде чорною, якщо відомо, що вона не біла?

9. (Рівняння Бернуллі). Монету підкидають 5 разів. Знайти імовірність того, що герб з'явиться від 2 до 4 разів.

10. Імовірність того, що стрілок попаде в ціль рівна 0,4. Зроблено 12 пострілів. Яка найімовірніша кількість влучень?

11. Кожний курсант факультету вивчає англійську або німецьку мову. Англійську вивчає 250 курсантів, німецьку – 270, обидві мови – 180 курсантів. Скільки курсантів на факультеті?

12. Для інформування про пожежу встановлено 3 незалежні між собою сповіщувачі. Імовірність того, що під час пожежі спрацює перший сповіщувач рівна 0,95, другий – 0,9, третій – 0,86. Знайти імовірність того, що під час аварії будуть пошкоджені усі сповіщувачі.

13. (Формула Байєса). Двадцять курсантів здають екзамен з математики. Шестеро підготувалися на "5", восьмеро – на "4", четверо – на "3", двоє – взагалі не підготувались. У білетах 50 запитань. Підготовлені на "5" можуть відповісти на усі 50 запитань, на "4" – на 40, на "3" – на 30 і на "2" – на 10 запитань. Запрошений курсант відповідає правильно на усі три питання білета. Знайти імовірність того, що цей курсант підготувався до екзамену на "5".

14. (Рівняння Бернуллі). У 3 вагони метро заходять 9 пасажирів. Кожен пасажир вибирає вагон навмання. Яка імовірність того, що у перший вагон зайде 3 пасажири?

15. Іванов за зміну може виготовити 120 виробів, Петров – 140, причому імовірності того, що ці вироби вищого ґатунку відповідно 0,94 і 0,8. Визначити найімовірнішу кількість виробів вищого ґатунку, виготовлених кожним робочим.

Розділ 6. Елементи теорії кореляції

6.1. Поняття системи двох випадкових величин.

При вивченні випадкових явищ в залежності від їх складності доводиться використовувати дві, три або більше випадкових величин. Наприклад, при різних вимірах ми маємо справу з двома або трьома випадковими величинами: товщиною, довжиною деталі і т.п.

Сумісний розгляд двох або більше випадкових величин приводить до системи випадкових величин. Будемо позначати систему випадкових величин $(X,Y,Z\ \ldots)$. При вивченні системи випадкових величин не досить вивчити зокрема ті величини, які складають систему, необхідно ще і врахувати зв'язки або залежності між цими величинами. Тому тут виникають нові, відмінні від одновимірних випадкових величин, задачі.

При розгляді систем випадкових величин зручно користуватися геометричною інтерпретацією системи. Наприклад, систему двох випадкових величин (X,Y) можна розглядати як випадкову точку на площині $0xy$ з координатами (x,y) або як випадковий вектор на площині із випадковими компонентами X,Y. Систему трьох випадкових величин (X,Y,Z) можна розглядати як випадкову точку в тривимірному просторі або як випадковий вектор в просторі. За аналогією, систему n випадкових величин можна розглядати як випадкову точку в n-вимірному просторі або як n-вимірний випадковий вектор.

В залежності від типу випадкових величин, які утворюють систему, можуть бути системи дискретних або неперервних випадкових величин.

При вивченні системи випадкових величин ми обмежимося випадком системи двох випадкових величин, оскільки всі положення, що стосуються системи двох випадкових величин, можна легко розповсюдити на системи трьох, чотирьох і більше випадкових величин.

6.2. Закон розподілу системи.

Законом розподілу системи випадкових величин називається співвідношення, яке встановлює зв'язок між областями можливих значень системи і ймовірностями появи системи в цих областях.

Як і для однієї випадкової величини, закон розподілу системи може бути заданий в різних формах.

Нехай *X* і *Y* – дискретні випадкові величини, можливі значення яких (x_i, y_j), $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$. Тоді розподіл системи може бути охарактеризований вказанням ймовірностей $p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)$ того, що випадкова величина *X* прийме значення x_i і одночасно випадкова величина *Y* прийме значення y_j. Ці дані зводяться у таблицю

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{im}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nj}	$\cdots$	p_{nm}

яка називається *таблицею розподілу системи* двох дискретних випадкових величин із скінченною кількістю можливих значень.

Всі можливі події $(X=x_i, Y=y_j)$, для $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$ утворюють повну групу несумісних подій, тому $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(X=x_i; Y=y_j) = 1.$

При цьому закони розподілу кожної із складових системи легко знайти. Так, для складової X (її можливі значення x_i, $i=\overline{1,n}$) додавши ймовірності по рядках

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i), \qquad (1)$$

отримаємо закон розподілу

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\dots$	$p(x_n)$

Для складової Y (її можливі значення y_j, $j = \overline{1,m}$), додавши ймовірності по стовпцях

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i; Y = y_j) = P(Y = y_j), \qquad (2)$$

отримаємо аналогічний закон розподілу

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_m
P	$p(y_1)$	$p(y_2)$	$\dots$	$p(y_m)$

6.3. Функція розподілу системи

Функцією розподілу системи двох випадкових величин називається функція двох аргументів F(x,y), яка дорівнює ймовірності сумісного виконання двох нерівностей X<x і Y<y, тобто

$$F(x,y)=P(X<x,\ Y<y). \qquad (3)$$

Геометрично функція розподілу системи двох випадкових величин представляє собою ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) у лівий нижній нескінченний квадрант площини з вершиною в точці (x, y).

Вказана геометрична інтерпретація дозволяє наглядно ілюструвати *властивості функції розподілу системи* двох випадкових величин.

1^0. Якщо один з аргументів прямує до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу однієї випадкової величини, відповідної іншому аргументу, тобто

$$\lim_{y\to+\infty} F(x,y) = F_1(x) \text{ або } \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(y). \qquad (4)$$

2^0. Якщо обидва аргументи одночасно прямують до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до одиниці:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1. \tag{5}$$

В цьому випадку квадрант з вершиною (x,y) перетворюється у всю координатну площину, а попадання випадкової точки на площину $0xy$ є вірогідною подією.

3^0. Коли один або обидва аргументи прямують до $-\infty$, то функція розподілу системи прямує до нуля:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y)=\lim_{y\to-\infty} F(x,y)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0. \tag{6}$$

4^0. Функція розподілу є неспадною функцією по кожному з аргументів:

$$F(x_2,y)\geq F(x_1,y),\text{ якщо } x_2>x_1;$$

$$F(x,y_2)\geq F(x,y_1),\text{ якщо } y_2>y_1.$$

Доведемо цю властивість, використовуючи геометричну інтерпретацію функції розподілу системи.

Розглянемо такі три події:

$$A=(X<x_1,Y<y),\ B=(x_1\leq X<x_2,Y<y),\ C=(X<x_2,Y<y)$$

Очевидно, що $C=A+B$ але A і B – несумісні події. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій маємо $P(C)=P(A)+P(B)$, але $P(C)=F(x_2,y)$, $P(A)=F(x_1,y)$, тому $F(x_2,y)=F(x_1,y)+P(x_1\leq X<x_2,Y<y)$, звідки $F(x_2,y)-F(x_1,y)=P(x_1\leq X<x_2,Y<y)$.

Оскільки ймовірність – величина невід'ємна, то $F(x_2,y)-F(x_1,y)\geq 0$.

Отже, $F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$ для $x_2>x_1$.

Аналогічно можна довести другу нерівність

$$F(x,y_2)\geq F(x,y_2)\text{ для } y_2>y_1.$$

5^0. Ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат, обчислюється за формулою

$$P(a \le X < b, c \le Y < d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c). \qquad (7)$$

Виведемо цю формулу, користуючись геометричною інтерпретацією системи. Нехай прямокутник має вершини (a,c), (a,d), (b,d), (b,c).

Розглянемо такі події $A = (a \le X < b, c \le Y < d)$, $B = (a \le X < b, Y < c)$, $C = (X < a, c \le Y < d)$, $D = (X < a, Y < c)$, $E = (X < b, Y < d)$.

Очевидно, що $E=A+B+C+D$, але A,B,C,D – несумісні події, тому

$$P(E)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D).$$

Оскільки $P(E)=F(b,d)$, $P(B)=F(b,c)-F(a,c)$, $P(C)=F(a,d)-F(a,c)$, $P(D)=F(a,c)$, то отримаємо

$$P(A)= F(b,d)- F(b,c)+ F(a,c)- F(a,d)+ F(a,c).$$

Скоротивши останні два доданки, отримаємо шукану формулу (7).

6.4. Щільність розподілу системи.

Основне практичне значення мають системи неперервних випадкових величин, розподіл яких характеризується не тільки функцією, але й щільністю розподілу.

Щільність розподілу системи є вичерпною характеристикою системи неперервних випадкових величин, з допомогою якої розрахунок ймовірності попадання в певні області виконується простіше, а опис розподілу системи є більш наочним.

Щільність розподілу системи двох випадкових величин визначимо аналогічно тому, як ми визначали щільність для однієї випадкової величини. Розглянемо ймовірність попадання випадкової точки (X,Y) в елементарний прямокутник із сторонами Δx і Δy, паралельними координатним осям, який примикає до точки (x, y).

Застосувавши формулу (7), одержимо

$$P(x \le X < x + \Delta x, \quad y \le Y < y + \Delta y) = F(x + \Delta x, \ y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y).$$

Поділимо цю ймовірність на площу прямокутника $\Delta x \cdot \Delta y$ і перейдемо до границі, спрямувавши Δx і Δy до нуля:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X < x + \Delta x,\ y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)}{\Delta x \cdot \Delta y}. \qquad (8)$$

Припустимо, що функція $F(x, y)$ є не тільки неперервною, але і двічі диференційовною, тоді права частина є мішаною частинною похідною другого порядку функції $F(x, y)$: $\dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$.

Функцію $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$, яка визначається формулою (8), називають *щільністю розподілу ймовірностей системи неперервних випадкових величин* (X, Y).

Отже, за означенням, *щільність розподілу системи двох випадкових величин – це границя відношення ймовірності попадання випадкової точки* (X, Y) *в елементарний прямокутник до площі цього прямокутника, коли останній стягується в точку.*

Геометрично щільність розподілу $f(x, y)$ можна зобразити деякою *поверхнею розподілу*.

Знаючи $f(x, y)$, можна визначити ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в довільну область D. Ця ймовірність може бути одержана з допомогою підсумовування елементів ймовірності по всій області D і граничного переходу, коли найбільший прямокутник, на який розбивається область D, стягується в точку:

$$P\big((X, Y) \subset D\big) = \iint_D f(x, y)\, dxdy. \qquad (9)$$

Використовуючи формулу (9), виразимо функцію розподілу системи $F(x,y)$ через щільність розподілу $f(x,y)$. $F(x,y)$ є ймовірність попадання точки в квадрант з вершиною в точці (x,y), тому

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx\,dy. \tag{10}$$

Властивості щільності.

1^0. Щільність розподілу $f(x,y)$ є невід'ємною функцією $f(x,y)\geq 0$.

Дійсно, $f(x,y)$ є границя відношення додатних величин: ймовірності попадання випадкової точки в прямокутник до площі прямокутника.

$$2^0.\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1. \tag{11}$$

Геометрично це означає, що об'єм тіла, обмеженого поверхнею розподілу $f(x,y)$ і площиною $0xy$, дорівнює одиниці. Дійсно, оскільки $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx\,dy$, а $F(+\infty,+\infty)=1$, то і $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$.

Одним з простих розподілів системи (X,Y) є рівномірний розподіл, щільність якого

$$f(x,y)=\begin{cases} C, & (X,Y)\in D \\ 0, & (X,Y)\notin D \end{cases}. \tag{12}$$

Внаслідок властивості 2^0 щільності розподілу маємо $C=\dfrac{1}{S_D}$, де S_D – площа області D.

Основна властивість рівномірного розподілу полягає в тому, що для нього застосовується геометричний спосіб визначення ймовірності. Так, якщо область g міститься в D $(g\subseteq D)$, то

$$P\big((X,Y)\subset g\big)=\frac{S_g}{S_D}. \tag{13}$$

де S_g – площа області g.

Дійсно, $P\left((X,Y)\subset g\right)=\iint\limits_g f(x,y)dxdy=\iint\limits_g \frac{1}{S_D}dxdy=\frac{S_g}{S_D}$.

Приклад 1. Задана щільність розподілу системи

$$f(x,y)=\frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}.$$

1) Знайти значення a , 2) визначити функцію розподілу $F(x,y)$, 3) знайти ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник з вершинами $O(0,0)$, $A(0;1)$, $B(\sqrt{3};1)$, $C(\sqrt{3};0)$.

Розв'язання. 1) Для визначення a використаємо властивість 2^0 щільності розподілу:

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}dxdy=a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}=$$

$$=a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=a\cdot\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}\cdot\operatorname{arctg}y\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi^2a,$$

звідки $a=\dfrac{1}{\pi^2}$.

2) За формулою (10)

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{x}\cdot\operatorname{arctg}y\Big|_{-\infty}^{y}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}y+\frac{\pi}{2}\right).$$

3) За формулою (9)

$$P\left((X,Y)\subset D\right)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_D\frac{dx}{1+x^2}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_0^{1}\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}y\Big|_0^{1}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{12}.$$

6.5. Щільність розподілу окремих складових системи.

Нехай відома щільність розподілу $f(x,y)$ системи (X,Y).

Розглянемо, як знайти щільність розподілу складових X та Y, тобто $f_1(x)$ і $f_2(y)$.

За властивістю 1^0 функції розподілу маємо $F_1(x) = F(x, +\infty), \quad F_2(y) = F(+\infty, y)$.

Отже, використовуючи формулу $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dx\,dy$, можна таким чином представити $F_1(x)$ і $F_2(y)$:

$$F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\,dy, \qquad F_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\,dy \ .$$

Звідки, диференціюючи $F_1(x)$ по x, а $F_2(y)$ – по y, отримаємо

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= F_1'(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\ f_2(y) &= F_2'(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Отже, для того, щоб знайти щільність розподілу однієї складової системи, необхідно щільність розподілу системи проінтегрувати за аргументом, відповідним іншій складовій системи.

6.6. Умовні закони розподілу.

Поставимо таку задачу: як за відомими законами розподілу складових системи випадкових величин знайти закон розподілу самої системи? Відзначимо, що в загальному вигляді ця задача не розв'язується: по-перше, закони розподілу складових системи характеризують кожну із складових зокрема, але нічого не говорять про зв'язок між ними; по-друге, шуканий закон розподілу системи повинен містити всі дані про випадкові величини системи, в тому числі і про характер зв'язків між ними. Отже, якщо випадкові величини X і Y залежні між собою, то закон розподілу системи не може бути виражений через закони розподілу складових системи. Це приводить до необхідності введення умовних законів розподілу.

Розподіл однієї складової системи, знайдений за умови, що інша складова системи прийняла певне числове значення, називається умовним законом розподілу.

Нехай складові системи (X,Y) – дискретні випадкові величини, можливі значення яких (x_i, y_j), $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$. Припустимо, що величина Y прийняла значення $Y=y_j$, при цьому X прийме одне із своїх можливих значень $X=x_i$: $X=x_i/Y=y_j$. Ймовірність цієї події позначимо

$$P(X=x_i/Y=y_j)=p(x_i/y_j). \tag{15}$$

Сукупність умовних ймовірностей (15) називається умовним розподілом складової X за умови $Y=y_j$. Аналогічно визначається умовний розподіл складової Y

$$P(Y=y_j/X=x_i)=p(y_j/x_i). \tag{16}$$

Умовні закони розподілу можна задавати умовною функцією розподілу, позначається $F(x/y)$ або $F(y/x)$. $F(x/y)$ – умовна функція розподілу складової X за умови, що Y прийняла значення y. Аналогічно для $F(y/x)$.

Для системи неперервних випадкових величин вводять поняття умовних щільностей розподілу $f(x/y)$ або $f(y/x)$. За означенням щільності розподілу однієї випадкової величини X за умови, що Y прийняла певне значення, маємо

$$f(x/y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X<x+\Delta x/Y=y)}{\Delta x}. \tag{17}$$

За теоремою множення ймовірностей $P(x\le X<x+\Delta x/Y=y)=\dfrac{P(x\le X<x+\Delta x, Y=y)}{P(Y=y)}$, але оскільки випадкова величина Y неперервна, то $P(Y=y)$=0, і тому умовна ймовірність

$P(x\le X<x+\Delta x/Y=y)$ не існує. Отже, праву частину (17) треба видозмінити, не змінюючи її змісту. Це можна зробити, замінивши умову

$(Y = y)$ такою: $(y \le Y < y + \Delta y)$ і спрямувавши $\Delta y \to 0$. Таким чином, отримаємо таке означення умовної щільності розподілу

$$f(x/y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X < x + \Delta x / y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x}. \tag{18}$$

Знову ж таки за теоремою множення ймовірностей

$$P(x \le X < x + \Delta x / y \le Y < y + \Delta y) = \frac{P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y)}{P(y \le Y < y + \Delta y)}.$$

Тому формулу (18) можна переписати

$$f(x/y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot P(y \le Y < y + \Delta y)}.$$

Розділивши в останньому виразі чисельник і знаменник на Δy, отримаємо

$$f(x/y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\dfrac{P(x \le X < x + \Delta x, y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}}{\dfrac{P(y \le Y < y + \Delta y)}{\Delta y}} = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}. \tag{19}$$

Аналогічно одержимо

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \tag{20}$$

Використовуючи співвідношення (19) і (20), запишемо правило множення законів розподілу (аналогічно до правила множення ймовірностей)

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f(y/x) \quad \text{або} \quad f(x,y) = f_2(y) \cdot f(x/y). \tag{21}$$

Таким чином, *для визначення щільності розподілу системи необхідно знати щільність розподілу однієї складової і умовну щільність розподілу іншої складової системи.*

Застосовуючи правила знаходження щільності розподілу складових системи, запишемо формули для умовних щільностей розподілу

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx}; \qquad f(y/x) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy}. \tag{22}$$

Відзначимо, що умовна щільність розподілу має такі властивості, як і безумовна, зокрема, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x/y)\,dx = 1;\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)\,dy = 1.$

Використовуючи теорему множення ймовірностей, для системи двох дискретних випадкових величин умовні закони розподілу знайдемо за формулами

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \qquad p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}. \qquad (23)$$

***6.7. Залежні і незалежні випадкові величини*.**

Поняття залежності (незалежності) – одне з найважливіших понять теорії ймовірностей.

Випадкова величина X називається *незалежною* від випадкової величини Y, якщо закон розподілу X не залежить від того, яке значення прийняла випадкова величина Y:

$$f(x/y) = f_1(x),\ \forall y. \qquad (24)$$

Аналогічно для випадкової величини Y: $f(y/x) = f_2(y),\ \forall x.$

якщо випадкова величина X *залежить* від Y, то

$$f(x/y) \neq f_1(x). \qquad (25)$$

і, аналогічно $f(y/x) \neq f_2(y)$.

Для дискретних випадкових величин незалежність означає виконання умов

$$p(x_i / y_j) = p(x_i), \qquad p(y_j / x_i) = p(y_j). \qquad (26)$$

Якщо умови (26) не виконуються хоч би для однієї пари значень x_i, y_j, то це означає залежність випадкових величин.

Легко переконатися в тому, якщо X не залежить від Y, то і Y не залежить від X.

Дійсно, нехай $f(x/y) = f_1(x)$. Із співвідношення $f(x,y) = f_1(x)\ f(y/x) = f_2(y)\ f(x/y)$ отримаємо $f(y/x) = f_2(y)$.

Вкажемо просту *ознаку незалежності випадкових величин*:

Теорема. *Для того, щоб неперервні випадкові величини* X *та* Y *були незалежними, необхідно і досить, щоб щільність розподілу системи дорівнювала добуткові щільностей розподілу її складових*

$$f(x,y) = f_1(x)\ f_2(y)\,. \qquad (27)$$

Для дискретних випадкових величин ознака незалежності має вигляд

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)\ p(y_j)\,. \qquad (28)$$

Приклад 2. Система (X,Y) задана щільністю розподілу $f(x,y) = \dfrac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)}$. Вияснити, залежні чи незалежні випадкові величини.

Розв'язання. Перепишемо вираз для $f(x,y)$: $f(x,y) = \dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$.

Звідси очевидно, що $f_1(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$; $f_2(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$. Отже, випадкові величини незалежні.

Приклад 3. Задано закон розподілу системи (X,Y)

X\Y	0,2	0,3	0,5
2	0,15	0,12	0,10
3	0,08	0,10	0,12
4	0,07	0,18	0,08

Знайти а) закони розподілу складових X,Y; б) умовний закон розподілу $X/Y=0{,}5$; в) умовний закон розподілу $Y/X=3$; г) вияснити, чи залежні величини X,Y.

Розв'язання. а) Склавши ймовірності по рядках, знайдемо закон розподілу X:

X	2	3	4
P	0,37	0,30	0,33

а склавши ймовірності по стовпцях, знайдемо закон розподілу Y:

Y	0,2	0,3	0,5
P	0,30	0,40	0,30

б) Знайдемо умовні ймовірності можливих значень X за умови, що Y прийме значення $y_3 = 0{,}5$.

$$p(x_1 / y_3) = \frac{p(x_1, y_3)}{p(y_3)} = \frac{0{,}10}{0{,}30} = \frac{1}{3}; \quad p(x_2 / y_3) = \frac{p(x_2, y_3)}{p(y_3)} = \frac{0{,}12}{0{,}30} = \frac{2}{5};$$

$p(x_3 / y_3) = \dfrac{p(x_3, y_3)}{p(y_3)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}30} = \dfrac{4}{15}$. Отже, умовний закон розподілу $X / Y = 0{,}5$ має вигляд

X	2	3	4
$P(X / Y = 0{,}5)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$

Контроль: $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = 1$.

в) Аналогічно знайдемо умовний закон розподілу

$Y / X = 3$: $p(y_1 / x_2) = \dfrac{p(x_2, y_1)}{p(x_2)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}30} = \dfrac{4}{15}$;

$$p(y_2 / x_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(x_2)} = \frac{0{,}10}{0{,}30} = \frac{5}{15}; \quad p(y_3 / x_2) = \frac{p(x_2, y_3)}{p(x_2)} = \frac{0{,}12}{0{,}30} = \frac{6}{15}.$$

Отже, умовний закон розподілу $Y / X = 3$ має вигляд

Y	0,2	0,3	0,5
$P(Y / X = 3)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{6}{15}$

Контроль: $\frac{4}{15} + \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = 1$.

г) Якщо умова $p(x_i) \cdot p(y_j) \neq p_{ij}$ виконується хоча б для однієї пари значень (x_i, y_j), то випадкові величини X, Y залежні між собою. Дійсно, вже для $x_1 = 2$, $y_1 = 0{,}2$ ця умова виконується: $p(x_1) = 0{,}37$; $p(y_1) = 0{,}3$; $p_{11} = 0{,}15$. Отже, $0{,}37 \cdot 0{,}3 \neq 0{,}15$. Таким чином, випадкові величини X, Y залежні.

Завдання для самостійного розв'язування.

1. Проектована точність бомбометання новою гарматою, $a = a_0$ ($м$). Проведено n випробувань цієї гармати та отримано наступні результати:

контрольований розмір	x_i	39,8	37,9	36,0	38,1	36,3
частота (кількість виробів)	n_i	1	4	5	8	5

Потрібно, при рівні значущості α =0,05, перевірити нульову гіпотезу H_0: $a = a_0 = 35$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $a \neq 35$.

а) α =0,05, H_0: $a = a_0 = 39$, H_1: $a \neq 39$;

б) α =0,05, H_0: $a = a_0 = 38$, H_1: $a \neq 38$;

в) α =0,05, H_0: $a = a_0 = 37$, H_1: $a \neq 37$;

г) α =0,1, H_0: $a = a_0 = 39$, H_1: $a \neq 39$.

2. Задано таблицю взаємозв'язку між ознаками X та Y:

$\boldsymbol{x}$	1,67	5,11	13,33	28,33	25,14	16,67	6,67	3,33
$\boldsymbol{y}$	4	12	18	26	20	13	5	2

Потрібно:

1) обчислити коефіцієнти кореляції та детермінації;

2) знайти рівняння прямих Y на X та X на Y;

3) визначити лінію регресії та побудувати кореляційне поле з позначенням на ньому ліній регресії.

3. Задана щільність розподілу $f(x, y) = \begin{cases} 0, (x, y) \notin \Pi = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \\ A(x + y), (x, y) \in \Pi \end{cases}$ системи двох неперервних випадкових величин (ξ, η). Треба:

а) знайти коефіцієнт А;

б) записати функцію розподілу окремих компонент;

в) знайти умовні щільності розподілу і зробити висновок про залежність чи незалежність ξ;

г) знайти ймовірність попадання випадкової точки (ξ, η) в область $D = \{(x, y)$: $0{,}5 < x < 1, 0 < y < 0{,}75\}$.

4. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X,Y) задано в таблиці.

X \ Y	21	23	25	27
21	0,028	0,122	0,098	0,082
26	0,102	0,068	0,092	0,038
31	0,058	0,052	0,118	0,142

Виконати наступні завдання:

а) скласти закон розподілу системи, що відповідає номеру вашого варіанта;

б) знайти числові характеристики складових X і Y системи:

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$;

в) обчислити кореляційний момент K_{xy} і коефіцієнт кореляції ρ_{xy};

г) побудувати умовні закони розподілу $X/Y = 23$; $Y/X = 31$;

д) обчислити умовні математичні сподівання $M(X/Y = 23)$ і $M(Y/X = 31)$.

Розділ 7. Математична статистика

7.1. Вибірковий метод.

Центральним поняттям статистики є поняття *статистичної сукупності*, як маси деяких однорідних елементів, що відрізняються між собою за певними ознаками. Одиниці сукупності, з яких складається статистична сукупність, надалі будемо називати *елементами* цієї сукупності (на практиці – *варіантами* або *ознаками*).

Встановлення статистичних закономірностей, щодо масових випадкових явищ, ґрунтується на вивченні *статистичних даних* – відомостей про те, які значення прийняла окрема ознака (випадкова величина X) унаслідок проведення досліду.

На практиці статистичних досліджень відрізняють два види дослідів:

- *суцільний*, коли розглядаються всі елементи сукупності
- *вибірковий*, де вивчається лише деяка частина елементів.

Вся сукупність елементів, яку треба вивчити, називається *генеральною сукупністю*. Поняття генеральної сукупності, в певному сенсі, є аналогічним поняттю випадкової величини (закону розподілу ймовірностей), бо повністю обумовлене певним комплексом умов.

Та частина об'єктів, що її відібрано для безпосереднього вивчення із генеральної сукупності, називається *вибірковою сукупністю* (або просто – *вибіркою*). Кількість елементів у генеральній чи вибірковій сукупності називають їх *об'ємами*.

Генеральна сукупність може мати як скінченний так і нескінченний об'єм, звідки можемо бачити перший з витоків вибіркового дослідження, а саме – неможливість дослідити сукупність з нескінченною кількістю елементів, проте проблема дослідження вибіркової сукупності також може бути пов'язана з тим, що економічні та часові обмеження не дозволяють провести суцільне дослідження (наприклад, витрати на проведення Першого всеукраїнського перепису населення 2001 року складали понад 146 млн. грн.

і вимагали залучення понад 250 тис. обліковців), звідки можна побачити другу проблему дослідника – рентабельність дослідження, що проводиться.

Вибіркова сукупність розглядається як деякий емпіричний аналог генеральної сукупності. *Сутність вибіркового методу* полягає в тому, щоб за деякою частиною генеральної сукупності (за вибіркою) робити висновки про її властивості в цілому, наприклад, про її закон розподілу, або про числові значення її певних параметрів. Головним недоліком вибіркового методу є помилки досліду, які також називають *помилками репрезентативності*.

Щоб за даними вибірки мати можливість судити про генеральну сукупність, вона повинна бути взята випадково, це у певній мірі дозволяє знизити можливість помилок репрезентативності. Випадковість елементів у вибірці досягається шляхом слідування принципу рівної можливості всіх елементів генеральної сукупності бути відібраними у вибірку. Вибіркову сукупність називають *репрезентативною*, якщо вона досить добре відбиває основні характеристики генеральної сукупності.

Розрізняють наступні види вибірок [Кремер]:

- *власне-випадкова вибірка*, отримана випадковим відбором елементів без поділу їх на частини або групи;
- *механічна вибірка*, для якої елементи генеральної сукупності відбираються через деякий інтервал;
- *типова вибірка*, у яку випадковим чином вибираються елементи з типових груп, на які за деякою ознакою поділяється генеральна сукупність;
- *серійна вибірка*, у яку випадковим чином потрапляють не елементи груп, а власне групи, які потім суцільно досліджуються.

Надалі домовимося позначати:

- x_i – значення і-ої ознаки (елемента) випадкової величини X;
- N та n – об’єми генеральної та вибіркової сукупностей;
- N_i та n_i – відповідно кількість елементів генеральної та вибіркової сукупностей, які мають значення x_i;

- M та m – кількість елементів генеральної та вибіркової сукупностей, які мають значенням дану ознаку.

7.2 Статистичні оцінки параметрів розподілу.

Нехай a^* – статистична оцінка невідомого параметру a теоретичного розподілу (генеральної сукупності). Припустимо, що по вибірці об'єму n знайдена оцінка a_1^* .

Повторимо експеримент, тобто візьмемо знову вибірку об'єму n з генеральної сукупності і по ній знайдемо оцінку a_2^* і т.д. Таким чином оцінку a^* можна розглядати як випадкову величину, що має закон розподілу, який залежить, по-перше, від закону розподілу випадкової величини X, по-друге, від числа експериментів n, а числа $a_1^*, a_2^*, \ldots a_k^*$ – як її можливі значення.

Припустимо, що оцінка a^* дає наближене значення a з надлишком; тоді кожне знайдене за даними вибірок число $a_i^* \left(i = \overline{1,k}\right)$ більше істинного значення a. Зрозуміло, що в цьому випадку і математичне сподівання (середнє значення) випадкової величини a^* більше, ніж a, тобто $M[a^*]>a$. Те ж саме, очевидно, якщо a^*дає оцінку з недостачею, то $M[a^*]<a$.

Таким чином, використання статистичної оцінки, математичне сподівання якої не рівне оцінюючому параметру, привело б до систематичних (одного знаку) похибок. Тому потрібно вимагати, щоб математичне сподівання оцінки було рівне шуканому параметру. Хоча дотримання цієї вимоги не усуне похибку, проте похибки різних знаків будуть взаємно компенсуватись. Тобто дотримання умови $M[a^*]=a$ гарантує відсутність систематичних похибок.

Незміщеною називають статистичну оцінку a^*, математичне сподівання якої дорівнює параметру, що оцінюється при будь-якому об'ємі вибірки, тобто

$$M[a^*]=a. \tag{1}$$

Зміщеною будемо називати статистичну оцінку, для якої порушується умова (1), тобто $M[a^*] \neq a$.

Проте помилково було б вважати, що незміщена оцінка завжди дає добрі наближення оціненого параметру. Справа в тому, що можливі значення a^* можуть бути сильно розсіяні навколо свого середнього значення. Наприклад, a_1^* може виявитися дуже віддалено від середнього значення $\bar{a}^*$, а значить, і від самого параметру a; прийнявши a_1^* за наближене значення a, ми допустилися б грубої похибки. Отже, необхідно вимагати, щоб дисперсія a^* була малою. По цій причині до статистичної оцінки ставиться вимога ефективності.

Ефективною називається статистична оцінка, яка при заданому обсязі вибірки n має найменшу дисперсію.

При вибірці великого обсягу (n велике) до статистичних оцінок ставляться вимоги змістовності.

Змістовною (спроможною) називають статистичну оцінку, яка при $n \to \infty$ прямує за ймовірністю до параметру, що оцінюється:

$$\lim_{n\to\infty} P(|a^* - a| < \varepsilon) = 1, (\varepsilon > 0) \qquad (2)$$

Для виконання вимоги (2) досить, щоб дисперсія оцінки прямувала до нуля, коли $n \to \infty$, тобто, щоб виконувалась умова

$$\lim_{n\to\infty} D[a^*] = 0 \qquad (3)$$

і, крім того, щоб оцінка була незміщеною. Від формули (2) легко перейти до виразу (3), якщо скористатись нерівністю Чебишева.

7.3. Інтервальні статистичні оцінки параметрів.

Статистичні оцінки діляться на точкові та інтервальні. *Точковою* називається оцінка, яка визначається одним числом. При вибірці малого обсягу точкові оцінки можуть значно відхилятись від параметру, тобто приводять до грубих похибок. Тому більш точними є інтервальні оцінки.

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу. Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність і надійність оцінок.

Нехай знайдена по даних вибірки статистична характеристика a^* служить оцінкою невідомого параметру a. Будемо вважати a постійною величиною (може бути і випадковою). Зрозуміло, що a^* тим точніше визначає параметр a, чим менша абсолютна величина різниці $|a - a^*|$. Іншими словами, якщо $\delta > 0$ і $|a - a^*| < \delta$, то чим менше δ, тим точніша оцінка. Таким чином, додатне число δ характеризує *точність оцінки*.

В зв'язку з тим, що вибіркові параметри (середні, дисперсія і т.д.) є випадковими величинами, то і їх відхилення від генеральних параметрів (похибки) також будуть випадковими величинами. Таким чином, задачу про оцінку цих відхилень носить ймовірнісний характер і полягає в оцінці ймовірності $P(|a - a^*| < \delta)$, наприклад:

$P(|\bar{x}_B - \bar{x}_\Gamma| < \delta), P(|D_B - D_\Gamma| < \delta), P(|\delta_B - \delta_\Gamma| < \delta)$ чи $P(|\delta_B - S| < \delta)$ і т.д. Ймовірність $P = \gamma$ (як правило $\gamma = 0{,}95; 0{,}99; 0{,}999$) *називається надійністю*, а інтервали $(\bar{x}_B - \delta, \bar{x}_B + \delta), (D_B - \delta, D_B + \delta), (\delta_B - \delta, \delta_B + \delta)$ і т.д. *називаються надійними інтервалами, або довірчими інтервалами*. В загальному випадку надійністю оцінки a по a^*називається ймовірність γ, з якою здійснюється нерівність $|a - a^*| < \delta$, а інтервал $(a^* - \delta, a^* + \delta)$, який з заданою надійністю γ накриває невідомий параметр a і називається довірчим інтервалом.

7.3.1. Довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання при відомому σ.

Припускаючи, що випадкова величина X розподілена нормально, причому середнє квадратичне відхилення σ цього розподілу відоме, потрібно оцінити невідоме математичне сподівання $m = \bar{x}_\Gamma$ по вибірковій середній x_B, тобто поставимо задачу знаходження довірчого інтервалу, що накриває параметр m з надійністю γ .

Так як величина $\bar{x}_B$ є сума n незалежних однаково розподілених випадкових величин X_i, то згідно з центральною граничною теоремою її закон розподілу близький до нормального. Параметри розподілу такі:

$$\mathrm{M}[\bar{x}_B] = \bar{x}_\gamma = m, \sigma(\bar{x}_B) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Вимагаємо, щоб виконувалась рівність:

$$P(|\bar{x}_B - m| < \delta) = \gamma,$$

де γ - задана надійність.

Як відомо $P(|X - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, а замінивши X на $\bar{x}_B$ і σ на $\sigma(\bar{x}_B)$, отримаємо:

$$P(|\bar{x}_B - m| < \sigma) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t) \qquad (4)$$

де $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$.

Знайшовши з останньої рівності $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, можна записати

$$P\left(|\bar{x}_B - m| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Зауважимо, що ймовірність P (надійність) задана, і рівна γ , тому маємо

$$P\left(\bar{x}_B - t\sigma / \sqrt{n} < m < \bar{x}_B + t\sigma / \sqrt{n}\right) = 2\Phi\sqrt{t} = \gamma.$$

Смисл одержаного співвідношення такий: з надійністю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал $\left(\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ накриває невідомий параметр m; точність оцінки $\delta = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$.

Поставлена задача розв’язана, причому зауважимо, що число t визначається з рівності $2\Phi(t)=\gamma$, або $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ і по таблиці (2) функції Лапласа (див. додаток) знаходять аргумент t, якому відповідає значення функції Лапласа, рівне $\frac{\gamma}{2}$.

З класичної оцінки $|\bar{x}_B - m| < t\sigma/\sqrt{n}$ випливає, що коли об’єм вибірки n зростає, то точність оцінки збільшується, а із збільшенням надійності γ збільшується t (*Ф(t)* – зростаюча функція), тобто зменшується точність.

7.4. Довірчі інтервали та оцінки точності вибірки.

Інтервал $(\theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)})$ називають *довірчим*, а ймовірність γ – *довірчою імовірністю* або *надійністю оцінки.*

У першу чергу розглянемо побудову довірчого інтервалу для генеральної середньої $\bar{x}_0$ та частості w при достатньо великих вибірках (при n>30–40). Цей підхід побудовано на знанні точного чи асимптотичного розподілу вибіркових характеристик.

У такому випадку довірчий інтервал обирається симетричним відносно параметру θ, тобто (θ–Δ, θ+Δ), а найбільше відхилення Δ вибіркової середньої (частості), від генеральної середньої (частості), яке можна задати з довірчою ймовірністю γ, називається граничною похибкою вибірки. За достатньо великою кількістю елементів вибірки користуючись центральною граничною теоремою можна довести наступне твердження:

Ймовірність того, що відхилення вибіркової середньої (або частості) від генеральної середньої (або частості), не перевищить Δ>0 дорівнює:

$$P(|\bar{x}-\bar{x}_0| \le \Delta) = \Phi(t) = \gamma, t = \frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad (5)$$

$$P(|w-p| \le \Delta) = \Phi(t) = \gamma, t = \frac{\Delta}{\sigma_w} \qquad (6)$$

$\Phi(t)$ – функція (інтеграл ймовірностей Лапласа).

Формули (5) та (6) отримали назву формул *довірчої ймовірності для середньої та для частості*.

Середнє квадратичне відхилення вибіркової середньої $\sigma_{\bar{x}}$ та вибіркової частості σ_w, власне – випадкової вибірки називається *середньою квадратичною похибкою вибірки,* у випадку безповторної вибірки це відповідно $\sigma'_{\bar{x}}$ та σ'_w.

Розглянемо тепер *побудову довірчого інтервалу для генеральної середньої та частості за вибірками малого об'єму* (n<10 – 20). В цьому випадку наведені раніше методи побудови інтервальних оцінок для генеральної частості та генеральної середньої не можна застосовувати через те, що:

– необґрунтованою стає висновок про нормальний закон розподілу вибіркових середніх та частості (так як його зроблено з центральної граничної теореми).

– необґрунтованою стає заміна невідомих генеральної дисперсії та частості їх точковими оцінками, так як з закону про великі числа, це можливо лише при великих n.

Задача побудови довірчого інтервалу для генеральної середньої може бути вирішеною, якщо в генеральної сукупності ознака має нормальний розподіл. Розглянемо наступну *теорему*:

Якщо ознака (випадкова величина Х) має нормальний розподіл з параметрами $M(X)=\bar{x}_0$, $\sigma_x^2=\sigma^2$, тобто $N(\bar{x}_0,\sigma^2)$, то вибіркова середня $\bar{x}$ для будь якого n (а не тільки при n->∞) має нормальний закон розподілу $N(\bar{x}_0,\frac{\sigma^2}{n})$.

Таким чином, якби була відома генеральна дисперсія, то довірчий інтервал можна було б побудувати аналогічно до розглянутого раніше і при малих n. Зауважимо, що в такому випадку нормоване відхилення вибіркової середньої $t = \frac{\bar{x} - M(\bar{x})}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\sigma}\sqrt{n}$ має стандартний нормальний розподіл N(0,1).

Поза нашою увагою залишилася лише *побудова довірчого інтервалу для генеральної дисперсії*. Зсуненість вибіркової дисперсії, як оцінки генеральної дисперсії, породжує деякі неприємності, у тому числі й несиметричність довірчого інтервалу. Розглянемо це більш детально.

Хай розподіл ознаки *X* в генеральній сукупності є нормальним. Припустимо, що математичне сподівання відоме. Тоді вибіркова дисперсія повторної вибірки:

$$s_*^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x}_0)^2}{n},$$

s_*^2 – характеризує варіацію змінної відносно генеральної середньої.

Розглянемо статистику:

$$\chi^2 = \frac{ns_*^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{x}_0}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1} t_i,$$

яка має розподіл χ^2 з $k=n$ степенями вільності.

На практиці вибіркових спостережень математичне сподівання $\bar{x}_0$, як правило невідоме, тому приходиться мати справу не з s_*^2, а з вибірковою дисперсією s^2 або з виправленою вибірковою дисперсією $\tilde{s}^2$. У такому випадку, випадкова величина $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ також має розподіл χ^2 з $k=n-1$ степенями вільності. Тому для заданої ймовірності γ можна записати:

$$P(\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2) = \gamma.$$

З несиметричності розподілу χ^2 значення χ_1^2 та χ_2^2 визначаються не однозначно. Звичайно їх обирають таким чином, щоб ймовірності подій $\chi^2 < \chi_1^2$ та $\chi^2 > \chi_2^2$ були однакові, тобто

$$P(\chi^2 < \chi_1^2) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{1-\gamma}{2}$$

Перетворюючи нерівність $\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$ до наступного вигляду $\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}$, отримаємо формулу довірчої ймовірності для генеральної дисперсії:

$$P(\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}) = \gamma .$$

Відповідно одразу можемо отримати формулу довірчого інтервалу й для середнього квадратичного відхилення:

$$P(\frac{\sqrt{n}s}{\chi_2} < \sigma < \frac{\sqrt{n}s}{\chi_1}) = \gamma .$$

При використанні таблиць ймовірностей $P(\chi^2 > \chi_{\alpha,k}^2)$ слід пам'ятати, що $P(\chi^2 < \chi_1^2) = 1 - P(\chi^2 > \chi_2^2)$, тому умова $P(\chi^2 < \chi_1^2) = \frac{1-\gamma}{2}$ рівносильна умові $P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$. Таким чином відповідні значення знаходимо з таблиць додатків із рівностей:

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = \frac{1+\gamma}{2} \text{ та } P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{1-\gamma}{2} .$$

7.5. Статистична перевірка статистичних гіпотез. Статистична гіпотеза та загальна схема її перевірки.

З теорією статистичного оцінювання тісно пов'язана перевірка статистичних гіпотез. Її використовують, коли необхідно зробити обґрунтований висновок про переваги того чи іншого засобу, процесу та ін.

Статистичною гіпотезою називається припущення про вигляд або параметри невідомого закону розподілу, яке може бути перевірене за результатами спостережень.

Висунуту гіпотезу, яку треба перевірити, виділяють як головну і позначають, як правило, H_0 (або H), а іншу – як альтернативну (конкуруючу) і позначають H_1 (або K). Нульова та конкуруюча гіпотези являють собою *дві можливості вибору*, що взаємовиключають одна одну.

Припущення-гіпотези можуть бути різними, та їх можна перевірити за допомогою статистичних даних. Обмеженість вибіркових даних припускає можливість прийняття неправильного рішення. Очевидно, що за статистичними даними важко, а іноді і неможливо робити безпомилкові висновки, при цьому помилки при перевірці гіпотез можуть бути двох родів. Помилка першого роду полягає в тому, що відкидається основна гіпотеза, коли вона вірна. При помилці другого роду відкидається вірна конкуруюча гіпотеза. Ймовірність α припуститися помилки першого роду називається *рівнем значущості критерію*, ймовірність припуститися помилки другого роду зазвичай позначають β. Ймовірність $(1-\beta)$ не припуститися помилки другого роду називають *потужністю критерію*.

З метою перевірки статистичної гіпотези використовують спеціально складену випадкову величину (*статистику* або *критерій*), розподіл якої відомий, її позначають t, F чи X^2 у залежності від її розподілу (у загальному вигляді позначимо $\tilde{\theta}_n$). Прийняте рішення щодо нульової гіпотези опирається на *статистичний критерій* – правило, за яким гіпотеза повинна бути прийнята чи відкинута. Статистичний критерій розбиває всю множину можливих значень статистики (критерію) $\tilde{\theta}_n$ на дві множини, що не перетинаються: критичну область (область відкидання гіпотези) та область припустимих значень (область прийняття гіпотези). При перевірці гіпотези намагаються обрати таку критичну область, де потужність критерію буде найбільшою.

Вимоги до критичної області аналітично можна записати так:

$$P(\tilde{\theta}_n \in W / H_0) = \alpha$$

$$P(\tilde{\theta}_n \in W / H_1) = \max,$$

тобто критичну область слід обирати так, щоб ймовірність потрапляння у неї статистики $\tilde{\theta}_n$ була мінімальною та рівною α, якщо гіпотеза H_0 правильна, та максимальною у протилежному випадку. Або іншими словами, критична область повинна бути такою, щоб при даному рівні значущості α, потужність критерію була б найбільшою.

В залежності від вигляду конкуруючої гіпотези H_1 обирають правосторонню, лівосторонню або двосторонню критичні області. Так можна впевнитися, що при конкуруючій гіпотезі H_1: $a>a_0$ слід використовувати правосторонню критичну область, у випадку H_1: $a<a_0$ – лівосторонню критичну область, а при конкуруючій гіпотезі H_1: $a\neq a_0$ – двосторонню критичну область. За таких обставин границі критичних областей $\theta_{кр}$ при заданому рівні значущості визначаються з відповідних співвідношень:

– для правосторонньої критичної області

$$P(\tilde{\theta}_н > \theta_{кр}) = \alpha;$$

– для лівосторонньої критичної області

$$P(\tilde{\theta}_н < \theta_{кр}) = \alpha;$$

– для двосторонньої критичної області

$$P(\tilde{\theta}_н < \theta_{кр1}) = P(\tilde{\theta}_н > \theta_{кр2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Принцип перевірки статистичної гіпотези не дає логічного доведення її вірності або невірності. Прийняття гіпотези слід розглядати лише як твердження, що не містить протиріч до дослідних даних.

Перевірка гіпотез про рівність середніх сукупностей.

Розглянемо задачу порівняння двох середніх генеральних сукупностей. Нехай є дві сукупності, що характеризуються генеральними середніми $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ та *відомими дисперсіями* σ_x^2 та σ_y^2. Необхідно перевірити гіпотезу про рівність генеральних середніх H_0: $\bar{x}_0 = \bar{y}_0$.

Для перевірки гіпотези з цих сукупностей взято дві незалежні вибірки об'ємами n_1 та n_2, за якими знайдено середні арифметичні $\bar{x}, \bar{y}$ та вибіркові дисперсії s_x^2, s_y^2.

За достатньо великими об'ємами вибірки вибіркові середні мають нормальні закони розподілу з параметрами $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ та σ_x^2 σ_y^2 відповідно.

У випадку правильної гіпотези H_0 різниця $\bar{x}-\bar{y}$ має нормальний розподіл з математичним сподіванням $M(\bar{x}-\bar{y}) = M(\bar{x}) - M(\bar{y}) = \bar{x}_0 - \bar{y}_0 = 0$ та дисперсією $\boldsymbol{\sigma}^2_{\bar{x}-\bar{y}} = \boldsymbol{\sigma}^2_{\bar{x}} + \boldsymbol{\sigma}^2_{\bar{y}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^2_{\bar{x}}}{n_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^2_{\bar{y}}}{n_2}$ (зауважимо, що дисперсія різниці двох незалежних величин дорівнює сумі їх дисперсій, а дисперсія n незалежних доданків в n разів менша за дисперсію кожного).

Тому при виконанні гіпотези H_0 статистика

$$t = \frac{(\bar{x}-\bar{y}) - M(\bar{x}-\bar{y})}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2_{\bar{x}}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{\bar{y}}}{n_2}}}$$

має стандартний нормальний розподіл.

У випадку конкуруючої гіпотези H_1: $\bar{x} < \bar{y}$ (або H_1: $\bar{x} > \bar{y}$) обирають односторонню критичну область та критичне значення статистики знаходять з умови

$$\Phi(t_{кр}) = \Phi(t_{1-2\alpha}) = 1 - 2\alpha, \qquad (7)$$

а при конкуруючій гіпотезі H_1: $\bar{x} \neq \bar{y}$ обирають двосторонню критичну область, критичне значення статистики:

$$\Phi(t_{кр}) = \Phi(t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha. \qquad (8)$$

Якщо фактичне значення статистики t, що спостерігається більше $t_{кр}$, що його визначено на рівні значущості α (за абсолютною величиною), тобто $|t|>t_{кр}$, то гіпотезу H_0 відкидаємо, інакше – робимо висновок, що гіпотеза не містить протиріччя до вибіркових даних.

Будемо вважати, що розподіл ознаки (випадкової величини) *X* та *Y* у кожній сукупності має нормальний розподіл. В такому випадку, якщо генеральні дисперсії відомі, то перевірка гіпотез проводиться таким самим чином не тільки для великих, але і для малих за об'ємом вибірок.

Якщо ж дисперсії невідомі, проте рівні, тобто $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, то у якості невідомої величини σ^2 можна взяти її оцінки – виправлену вибіркову дисперсію.

$$\tilde{s}_x^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{або} \quad \tilde{s}_y^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 .$$

Проте найкращою оцінкою буде дисперсія змішаної сукупності об’єму n_1+n_2, тобто

$$\tilde{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1)\tilde{s}_x^2 + (n_2 - 1)\tilde{s}_y^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

а оцінкою дисперсії різниці незалежних вибіркових середніх $\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}^2$

$$\tilde{s}_{\bar{x}-\bar{y}}^2 = \frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right).$$

У випадку справедливості гіпотези H_0 статистика

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

має t-розподіл Стьюдента з $k=n_1+n_2-2$ степенями вільності. Тому критичне значення статистики t знаходять за тими ж формулами (1)–(2), де замість функції Лапласа береться функція $\theta(t,k)$ для розподілу Стьюдента при кількості ступенів волі $k=n_1+n_2-2$, тобто

$$\theta(t,k) = 1 - 2\alpha, \tag{9}$$

$$\theta(t,k) = 1 - \alpha. \tag{10}$$

При цьому правило відкидання (прийняття) гіпотези зберігається.

Завдання для самостійного розв'язування.

1. Проведено 20 дослідів над величиною ξ. Результати наведені в таблиці:

I	x_i	i	x_i

1	10,9	11	10,8
2	10,7	12	10,3
3	11,0	13	10,5
4	10,5	14	10,8
5	10,6	15	10,9
6	10,4	16	10,6
7	11,3	17	11,3
8	10,8	18	10,8
9	11,2	19	10,9
10	10,9	20	10,7

Потрібно знайти оцінку M^{*} для математичного сподівання величини ξ і побудувати довірчий інтервал, який відповідає довірчій ймовірності β=0,86.

2. За відомим середньоквадратичним відхиленням 2 нормально розподіленої випадкової величини, вибірковою середньою 13,8, об`ємом вибірки 36 знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання із заданою надійністю 0,9.

3. У відділі технічного контролю було виміряно n = 200 втулок з партії, виготовленої одним автоматичним верстатом. У таблиці дано відхилення діаметрів від номіналу (у мікронах) після групування. Знайти вибіркове середнє і незсунену оцінку дисперсії для цих відхилень. Знайти надійні межі для математичного сподівання a відхилення діаметра від номіналу для генеральної сукупності при надійному рівні 0,95.

Межі відхилення	[-20,-15)	[-15,-10)	[-10,-5)	[-5, 0)	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)
n	6	11	15	25	52	42	26	15	5	3

4. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову

середню x = 75,14, об'єм вибірки n = 81 і середньоквадратичне відхилення σ = 9.

5. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню x_c=76,17, об'єм вибірки n = 36 і середнє квадратичне відхилення σ = 6.

6. Вивчається відсоткове відношення номінальної і ринкової цін на акції на фондовому ринку (X) за певний період. Вибірка, зроблена випадковим способом за акціями 50 різних підприємств, задається даними:

8,23	00,35	8,0	6,4	9,98
01,42	9,35	04,0	02,8	03,98
01,42	9,55	06,0	00,8	8,98
6,42	8,35	01,0	00,8	9,98
01,02	8,35	00,0	01,8	6,28
01,42	7,35	02,0	6,5	6,98
9,02	4,35	02,0	6,5	8,98
9,42	00,75	00,0	8,8	00,98
00,72	8,35	03,4	00,3	8,98
00,62	6,35	02,0	01,8	00,98

Необхідно:

1. За допомогою критерію Пірсона перевірити гіпотезу про нормальний закон розподілу відсоткового відношення номінальної і ринкової цін на акції на фондовому ринку при рівні значимості α = 0,01.
2. У випадку, коли закон розподілу виявиться нормальним, з надійністю γ = 0,99, побудувати довірчі інтервали для параметрів a і σ.

7. Для оцінки середньої урожайності деякої культури з одного гектара на всій площі в 1680 га було проведене вибіркове обстеження врожайності на частині площі. Результати вибіркового обстеження наведені в таблиці:

Урожайність, ц/га (X)	3	4	5	6	7
Посівна площа, га (m)	0	2	8	0	5

Визначити:

1) середню урожайність та дисперсію урожайності в вибірковій сукупності (використати метод моментів);

2) ймовірність того, що середня урожайність з 1 га на всій площі відхилиться від середньої урожайності у вибірковій сукупності не більше, ніж на 0,38 центнерів;

3) межі, в яких з ймовірністю 0,6827 знаходиться середня урожайність на всій площі.

Завдання для виконання роботи

1. Обчислити границі функцій, не користуючись методами диференціального числення.

1.1. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-e^{x}-1}{arctgx}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+11}{7x^3-5x^2+x}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$

1.2. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$ 4) $\lim\limits_{x\to -3}\left(7+2x\right)^{\frac{-4}{x+3}}$

1.3. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{tg\pi x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+5x}-10$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(1-\sin 3x\right)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$

1.4. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(4+3x\right)^{\frac{3}{x+1}}$

1.5. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^{x+2}-1}{\ln\left(x+2\right)}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(9-x^3\right)^{\frac{4}{x-2}}$

1.6. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\left(tgx+x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-8}{3x^2-5x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2 2x\right)^{\frac{1}{-\cos 4x}}$

1.7. 1) $\lim\limits_{x\to -0,5} \dfrac{2x^2+3x+1}{6x^2+x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-5x+8}{3x^2+6x-15}$

3) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+7x+2}{3x^2-2x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \left(3-2x^2\right)^{\frac{1}{2(1-x)}}$

1.8. 1) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\cos 3x}{ctgx}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-x-4}{4x^2+3x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to 3} \left(10-3x\right)^{\frac{1}{3(3-x)}}$

1.9. 1) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\cos(x-3)+2x}{x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3+9x^2+2x}{3x^3-8x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to 0,5} \dfrac{2x^2+x-1}{6x^2-x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to -2} \left(5+2x\right)^{\frac{1}{x+2}}$

1.10. 1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$

3) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to -4} \left(9+2x\right)^{\frac{-1}{2(x+4)}}$

2. Знайти похідні першого порядку, використовуючи правила обчислення похідних:

2.1. 1) $y=\frac{7}{x^3}+\sin 3x$ 2) $y=x\cdot\arccos\frac{x}{2}$

3) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 4) $\begin{cases} x=arctg(1+t)^2 \\ y=\sqrt{t^2+2t+2} \end{cases}$

2.2. 1) $y=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-2\cos 4x$ 2) $y=x^2\sin x++2x\cos x$

3) $y=arctg\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ 4) $\begin{cases} x=tg(t^2) \\ y=t^2-5 \end{cases}$

2.3. 1) $y=7\sqrt[4]{x}-2\ln 2x$ 2) $y=\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}$

3) $y=\frac{\arccos x}{x}$ 4) $\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1)^2 \end{cases}$

2.4. 1) $y=2x^3-5\sqrt{x}+tg2x$ 2) $y=x^2e^{2x}$

3) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ 4) $\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=(2+e^{-t})^3 \end{cases}$

2.5. 1) $y=3\sqrt{x}+2\ln 4x-4e^{2x}$ 2) $y=x\cdot\arcsin 3x$

3) $y=\frac{2\cos x-\sin x}{\sin 2x+4x}$ 4) $\begin{cases} x=\frac{3}{1+t^2} \\ y=arctgt \end{cases}$

2.6. 1) $y=3e^{2x}+\sqrt{2x}$ 2) $y=arctg\,2x\cdot\ln 2x$

3) $y=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$ 4) $\begin{cases} x=7+t^2 \\ y=ctg(3t^2) \end{cases}$

2.7. 1) $y=\sin 3x+\cos^2 x-4$ 2) $y=\cos 2x\cdot\sin 3x$

3) $y=\frac{\ln 2x}{tg3x}$ 4) $\begin{cases} x=\arcsin 2t \\ y=\frac{1}{1-4t^2} \end{cases}$

2.8. 1) $y=e^{3x}+\sqrt[3]{2x}+x^2$ 2) $y=\ln 3x\cdot 2^x$

3) $y=\dfrac{\arcsin 2x}{\arccos 3x}$

4) $\begin{cases} x=(t-1)^2 \\ y=\sin(t-1)^2 \end{cases}$

2.9. 1) $y=\ln^2 x+2\sqrt{\cos x}$

2) $y=3\ln 4x\cdot e^{\sqrt{x}}$

3) $y=\dfrac{\sin 4x}{\cos 8x}$

4) $\begin{cases} x=\ln\left(1-t^4\right) \\ y=\arccos\left(t^2\right) \end{cases}$

2.10. 1) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+7arctgx$

2) $y=\sqrt[3]{x}\cdot\sin 4x$

3) $y=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x^4}}$

4) $\begin{cases} x=\sin^2(1-4t) \\ y=\cos^2(1-4t) \end{cases}$

3. Обчислити невизначені інтеграли.

3.1. 1) $\int \frac{5x^2dx}{5-2x^3}$ 2) $\int \frac{dx}{2+tgx}$

3) $\int x\cos 5xdx$

3.2. 1) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-4}}$ 2) $\int \frac{dx}{1-\sin^2 x}$

3) $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3}dx$

3.3. 1) $\int e^{x^2+2x}(x+1)dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot tg^2x}$

3) $\int xe^{3x-5}dx$

3.4. 1) $\int \sqrt{1-2x^3}\,x^2dx$ 2) $\int \sin 3x\cos 5xdx$

3) $\int (x+1)\cos 2xdx$

3.5. 1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 2) $\int \sin^5 2xdx$

3) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

3.6. 1) $\int \frac{\sqrt{2+tgx}}{\cos^2 x}dx$ 2) $\int \frac{dx}{4+2\sin x}$

3) $\int x\cos 5xdx$

3.7. 1) $\int \frac{dx}{\sin^2(3-2x)}$ 2) $\int \frac{2-\sin x}{2+2\cos x}dx$

3) $\int x\ln(x-1)dx$

3.8. 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$ 2) $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$

3) $\int (2x+1)arctgxdx$

3.9. 1) $\int \frac{\cos x}{3-5\sin^2 x}dx$ 2) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$

3) $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$

3.10. 1) $\int e^{3-5x}dx$ 2) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$

3) $\int \arcsin x dx$

4. Розв'язати задачі:

4.1. Шестигранний гральний кубик підкидають один раз. Визначити елементарні події і події: A – випаде число очок, кратне 2; B – випаде число очок, кратне 3; C – випаде яке-небудь число очок від 1 до 6; D – випаде число очок, кратне 8.

4.2. Із картотеки служби зайнятості навмання вибирають три картки, на кожній з яких може бути позначено, що відповідний мешканець регіону працевлаштований (*П*) або залишається безробітним (*Б*). Побудувати простір елементарних подій та описати події: A – дві особи з трьох навмання вибраних залишаються безробітними, B – не менше як дві особи з трьох навмання вибраних працевлаштовані.

4.3. Припустимо, що монету кидають до першої появи герба. Описати подію A, яка полягає в тому, що буде виконано не більше ніж три кидки.

4.4. Точку «кидають» у квадрат зі стороною $2a$ і центром у початку координат, сторони якого паралельні до осей координат. Подія A полягає в тому, що точка «попаде» на вписаний у цей квадрат круг радіуса a. Тоді

$$A = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}.$$

4.5. Ймовірність того, що при одному пострілі стрілець попаде в "десятку", дорівнює $p = 0{,}6$. Скільки пострілів він повинен зробити, щоб з ймовірністю не менше 0,8 він попав в "десятку" принаймні один раз?

4.6. Ймовірності появи кожної з двох незалежних подій A_1 і A_2 задані p_1 і p_2. Знайти ймовірність появи тільки однієї з цих подій.

4.7. До магазину надходять вироби з двох заводів, причому з першого 150 штук, а з другого 250. Перший завод випускає в середньому 0.5% бракованої продукції, другий – 0.2%. Яка ймовірність купити в магазині бракований виріб?

4.8. Спеціалізована лікарня приймає в середньому 50% хворих, що мають захворювання H_1, 30% - захворювання H_2 і 20% - H_3. Статистика свідчить, що ймовірність повного виліковування хвороби H_1 дорівнює 0.9, для хвороби H_2 – 0.7 і для хвороби H_3 – 0.8. Яка ймовірність того, що пацієнт, виписаний з лікарні цілком здоровим (подія A), був хворий на хворобу H_2?

4.9. З партії, що містить N–виробів, серед яких є n бракованих, взято m виробів. Описати простір елементарних подій. Описати подію A: серед взятих виробів l- бракованих ($n<N$, $l\le m$).

4.10. З таблиці випадкових чисел навмання вибрані два числа. Події A та B відповідно означають, що вибрано хоча б одне просте та хоча б одне парне число. Що означають події $A\cap B$ та $A\cup B$?

5. Розв'язати задачі:

5.1. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,35	0,20	0,15

Знайти $M[X]$ і σ_x.

5.2. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\le x\le 2\\ 0, & x<0,\ x>2.\end{cases}.$$

Знайти $M[X]$ і σ_x.

5.3. В грошовій лотереї 100 білетів. Розігрується виграш у 500 гривень і 10 виграшів по 100 гривень. Знайти закон розподілу випадкової величини X – вартості можливого виграшу для одного лотерейного білета.

5.4. Дискретна випадкова величина *X* задана законом розподілу:

X	–1	2	4
p	0,3	0,2	0,5

Знайти функцію розподілу *F(X)*.

5.5. Випадкова величина *X* задана щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ C\sin x, & \\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Знайти сталу C та функцію розподілу *F(X)*.

5.6. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої законом розподілу

X	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

5.7. Знайти ймовірність потрапляння в інтервал (4;11) нормально розподіленої випадкової величини X, якщо відомі її математичне сподівання α=3 і середнє квадратичне відхилення σ=6.

5.8. Визначити математичне сподівання випадкової величини ξ - числа попадань при трьох пострілах, якщо імовірність попадання при кожному пострілі Р = 0,4.

5.9. Нехай в. в. $\xi = m$ - число появи події А в n незалежних випробуваннях, причому в кожному з випробувань А з'являється з імовірністю Р(А)=p і не з'являється з імовірністю Р(А)=1-p=q. Знайти для в. в. ξ $M\xi$, $D\xi$, $\sigma\xi$.

5.10 Проводиться перевірка великої партії деталей до виявлення нестандартної. Скласти закон розподілу числа перевірених деталей. Знайти математичне сподівання і дисперсію, якщо відомо, що ймовірність браку для кожної деталі рівна 0,1.

6. Розв'язати задачі:

6.1. Задана щільність розподілу системи $f(x,y) = \dfrac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}$.

1) Знайти значення a;

2) визначити функцію розподілу $F(x,y)$;

3) знайти ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник з вершинами $O(0{,}0)$, $A(0;1)$, $B(\sqrt{3};1)$, $C(\sqrt{3};0)$.

6.2. Задано закон розподілу системи (X,Y)

X\Y	0,2	0,3	0,5
2	0,15	0,12	0,10
3	0,08	0,10	0,12
4	0,07	0,18	0,08

Знайти: 1) закони розподілу складових X,Y; 2) умовний закон розподілу $X/Y=0{,}5$;

3) умовний закон розподілу $Y/X=3$; 4) вияснити, чи залежні величини X,Y.

6.3. Зроблено два внески з великим ризиком 10 тис. грн. в компанію А (вона обіцяла 50 % річних , проте може збанкрутувати з ймовірністю 0,2) та 15 тис. грн. (40 % річних, ймовірність банкрутства - 0,15). Скласти закон розподілу випадкової величини - загальні суми (збитки), що отримано від А та В за рік та скласти їх математичне сподівання.

6.4. Закон розподілу дискретної двомірної випадкової величини (X,Y) задано таблицею:

y_i / x_i	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,20	0,16	0,10

1	0,05	0,10	0,15	0,05

Знайти: 1) закони розподілу одномірних випадквих величин X і Y;

2) умовні закони розподілу X за випадкової величини умовою Y=2 і випадкової величини Y за умовою X=1;

3) розрахувати P(Y >X);

4) знайти коваріацію та коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y.

6.5. Дано закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини (X,Y) у вигляді наступної таблиці:

Y **X**	1	3	5	6
2	0,05	0,12	0,08	0,04
7	0,09	0,30	0,11	0,21

Знайти закони розподілу одновимірних складових, умовний закон розподілу X за умовою $Y=y_2=5$. Коваріацію та коефіцієнт кореляції.

6.6. Закон розподілу дискретної двомірної випадкової величини (X,Y) задано таблицею:

y_i x_i	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Знайти: 1) закони розподілу одномірних випадквих величин X і Y;

2) умовні закони розподілу випадкової величини X за умовою Y=2 і випадкової величини Y за умовою X=1;

3) розрахувати P(Y < X);

4) знайти коваріацію та коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y.

6.7. Дано щільність розподілу системи

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}5\sin(x+y), & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ y\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

Побудувати кореляційну матрицю системи.

6.8. Поле кореляції Y та X (млн. грн.) приведено в таблиці. *Необхідно:*

1) знайти групові середні та побудувати лінії регресії; 2) оцінити щільність та напрямок зв'язку між змінними, за допомогою коефіцієнта кореляції; перевірити значущість коефіцієнта кореляції та побудувати для нього 95%-ий довірчий інтервал;

3) обчислити емпіричні кореляційні відношення та оцінити їх значущість на 5%-ому рівні;

4) на рівні значущості 0,05 перевірити гіпотезу про лінійну кореляційну залежність між змінними Y та X.

		X					Разом
		0-4,5	4,5-9	9-13,5	13,5-18	18-22,5	
Y	0-1,4	4	2				6
	1,4-2,8	3	3				6
	2,8-4,2	1	9	1			11
	4,2-5,6		1	17	4		22
	5,6-7			4	4	3	11
	7-8,4				1	3	4
Разом		8	15	22	9	6	60

6.9. Проектована точність бомбометання новою гарматою, a = a_0 (м). Проведено n випробувань цієї гармати та отримано наступні результати:

контрольований розмір x_i 39,8 37,9 36,0 38,1 36,3 частота (кількість виробів) n_i 1 4 5 8 5

Потрібно, при рівні значущості α =0,05, перевірити нульову гіпотезу H_0:а = a_0 = 35 при конкуруючій гіпотезі H_1: а ≠ 35.

1) α =0,05, H_0:a = a_0 = 39, H_1: a ≠ 39;

2) α =0,05, H_0:a = a_0 = 38, H_1: a ≠ 38;

3) α =0,05, H_0:a = a_0 = 37, H_1: a ≠ 37;

4) α =0,1, H_0:a = a_0 = 39, H_1: a ≠ 39.

6.10. Дві випадково розподілені величини ***X*** і ***У***. Знайти коефіцієнт кореляції:

X	0	0	9	0	1	8	2	0	2	8
Y	5	7	5	6	5	6	7	6	8	5

*7. **Розв’язати задачі:***

7.1. Під час дослідження кількісної ознаки *X* із генеральної сукупності було отримано вибірку 4, 3, 6, 4, 7, 2, 5,1, 2, 5, 4, 4, 3, 5, 6, 3, 4,1, 3,4.

Знайти обсяг вибірки, побудувати варіаційний ряд вибірки та її статистичний розподіл.

7.2. *Знайти* емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

	3	5	7	10	15
Пі	2	4	7	4	3

7.3. Вибірка задана розподілом частот:

	3	5	7	10	15
Пі	2	4	7	4	3

Знайти розподіл відносних частот.

7.4. *Побудувати* полігон частот за даним розподілом вибірки:

	1	2	3	4	5	6	7
Пі	5	1	8	3	2	2	6

7.5. Вибірку задано інтервальним розподілом частот:

$(x_i; x_{i+1}]$	(1;3]	(3;5]	(5; 7]	(7; 9]	(9; 11]
Пі	13	9	5	16	7

Побудувати полігон відносних частот.

7.6. Вибірку задано інтервальним розподілом частот:

$(x_i; x_{i+1}]$	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4; 5]	(5; 6]	(6; 7]	(7; 8]
Пі	19	9	12	14	7	22	17

Побудувати гістограму частот.

7.7. За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n_1 = 11$ і $n_2 = 14$, витягнутими з нормальних генеральних сукупностей *X* і *Y*, знайдені виправлені вибіркові дисперсії $\tilde{s}_X^2 = 0,76$ і $\tilde{s}_Y^2 = 0,38$. При рівні значущості

α=0,05, перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X)=D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій, при конкуруючій гіпотезі H_1: $D(X) > D(Y)$.

7.8. За двома незалежними вибірками, об'єми яких $n_1 = 14$ та $n_2 = 10$, витягнутими з нормальних генеральних сукупностей X і Y, знайдені виправлені вибіркові дисперсії $\tilde{s}_X^2 = 0{,}84$ і $\tilde{s}_Y^2 = 2{,}52$. При рівні значущості α = 0,1, перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X)=D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі H_1: $D(X)\neq D(Y)$.

7.9. Двома методами проведені виміри однієї й тієї ж самої фізичної величини. Отримано наступні результати:

1) у першому випадку $x_1 = 9{,}6$; $x_2 = 10{,}0$; $x_3 = 9{,}8$; $x_4 = 10{,}2$; $x_5=10{,}6$;

2) у другому випадку $y_1 = 10{,}4$; $y_2 = 9{,}7$; $y_3 = 10{,}0$; $y_4 =10{,}3$.

Чи можна вважати, що обидва методи забезпечують однакову точність вимірів, якщо прийняти рівень значущості α=0,1? Передбачається, що результати вимірів розподілені нормально та вибірки незалежні.

7.10. З нормальної генеральної сукупності витягнута вибірка об'єму n=21 і по ній знайдена виправлена вибіркова дисперсія $\tilde{s}^2 = 16{,}2$. Потрібно, при рівні значущості 0,01, перевірити нульову гіпотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma^2_0 = 15$, прийнявши у якості конкуруючої гіпотезу H_1: $\sigma^2>15$.