Державна служба України з надзвичайних ситуацій
Національний університет цивільного захисту України
Черкаський інститут пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля

С.О. Касярум, К.В. Григоренко, І.П. Частоколенко

Диференціальне числення функцій кількох змінних

Навчальний посібник

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{yx};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{xx}.$$

Черкаси – 2022

Зміст

1. Основні поняття **4**

1.1. Простір R^n 4

1.2. Означення функції багатьох змінних 4

1.3. Графічне зображення функції двох змінних 5

1.4. Знаходження області визначення функції двох змінних 6

1.5. Границя функції двох змінних 7

1.6. Неперервність функції двох змінних 10

1.7. Неперервність складеної (складної) функції двох змінних 13

1.8. Властивості неперервності функції двох змінних 14

1.9. Рівномірна неперервність 15

2. Диференційованість функції двох змінних **16**

2.1. Частинні та повні прирости функції двох змінних 16

2.2. Частинні похідні функції двох змінних 17

2.3. Повний диференціал функції двох змінних 17

2.4. Частинні похідні та повний диференціал функції двох змінних 18

2.5. Достатня умова диференційованості функції двох змінних у точці 21

2.6. Диференціювання складеної функції 22

2.7. Похідна за напрямком. Градієнт 24

2.8. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків 26

2.9. Диференціювання неявної функції 28

I. Функція двох змінних 28

II. Функція трьох змінних 30

2.10. Формула Тейлора для функції двох змінних 31

2.11. Визначник Якобі (якобіан) 32

3. Дослідження функцій багатьох змінних **32**

3.1. Поняття екстремуму функцій багатьох змінних 32

3.2. Необхідні умови існування екстремуму 33

Вправи для самостійного розв'язування **34**

1. Основні поняття.

1.1. Простір R^n.

Одне з фундаментальних понять математики – поняття функції однієї змінної – цілком природно, за аналогією, узагальнюється на довільну кількість n змінних з одночасним переходом від простору R^2 (площини) до n-вимірного простору R^n. Подамо далі докладне теоретичне обґрунтування такого узагальнення.

Множину, елементами якої є всі можливі набори впорядкованих n дійсних чисел, позначають R^n. У цій множині означують поняття відстані між будь-якими двома її елементами.

Відстань між елементами

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in R^n \ \text{ і } \ y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \in R^n\ ,$$

$$x_{i,}\ \ y_i \in R,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

подається у вигляді

$$\rho(x,\ y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ . \qquad (1.1)$$

Означення. Множина R^n із введеною на ній відстанню називається *n-вимірним простором* R^n, число *n–розмірністю* цього простору. Елемент $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in R^n$ називається *точкою простору* R^n, число x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, –*i-ю координатою* цієї точки. Точки $x = (0,\ 0,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ 0)$ n-вимірного простору R^n утворюють i-ту *координатну вісь* простору. Точка 0 = (0, 0, …, 0) називається *початком координат.*

Простір R^1 з елементами $\mathbf{x} = x_1$ — числова пряма. Простори R^2 і R^3 з елементами $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ і $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ являють собою відповідно площину і тривимірний простір.

У просторі R^n можна означити поняття *суми елементів* і *добутку елемента на дійсне число*:
якщо

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \in R^n,\ \ \lambda \in R,$$

то

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n) \in R^n,\ \ \lambda x = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots,\ \lambda x_n) \in R^n.. \qquad (1.2)$$

1.2. Означення функції багатьох змінних.

Означення. Якщо кожній точці множини D n-вимірного простору R^n за деяким законом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ поставлено у відповідність одне і тільки одне дійсне число $z \in E \subset R$, то говорять, що в області $D \subset R^n$ задано *функцію n незалежних змінних*.

$$z = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

При цьому D називають *областю визначення функції*, а *E–областю значень функції*.

Згідно з означенням функцію $z = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ можна розглядати як функцію точки і записувати як $z = f(P)$.

Зокрема, коли $n = 2$, маємо функцію двох змінних $z = f(x,\ y)$, якщо кожній парі $(x,\ y) \in D$ на площині поставлено у відповідність одне і тільки одне число z.

1.3. Графічне зображення функції двох змінних.

Означення. *Графіком* функції двох змінних $z = f\left(x,\ y\right)$ називається множина всіх точок $(x, y, f(x, y))$ простору R^3, де $(x, y)\in R^2$.

Щоб зобразити графічно функцію двох змінних, розглянемо систему координат *xyz* у тривимірному просторі (рис. 1).

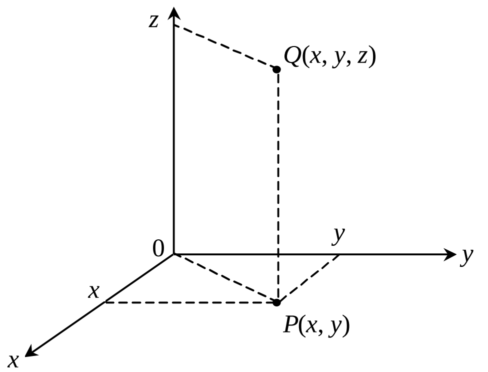


Рис. 1

Кожній парі чисел x і y відповідає точка $P(x, y)$ площини xy. Узявши в цій точці значення функції $z = f(x,\ y)$, дістанемо точку у просторі R^3 з координатами $(x,\ y,\ z)$, яка позначається символом $Q(x,\ y,\ z)$. Усі такі точки, що відповідають різним значенням незалежних змінних x і y, утворюють певну *поверхню у просторі* R^3. Ця поверхня і є *графічним зображенням функції* $z = f(x,\ y)$.

Графічним зображенням функції $z = 4 - x - y$ є площина, що проходить через точки (0, 0, 4), (0, 4, 0), (4, 0, 0) (рис. 2).

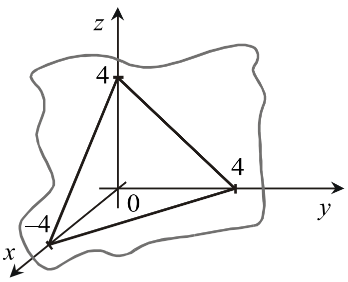


Рис. 2

Графічним зображенням функції $z = y^2 - x^2$ є сідло (рис. 3).

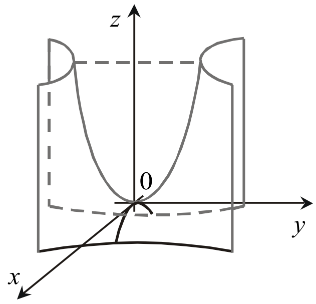


Рис. 3

Зауваження. На практиці побудувати графік функції двох змінних буває нелегко, оскільки потрібно зобразити на площині просторову фігуру, а це не завжди вдається.

Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних – за допомогою ліній рівня.

Означення. *Лінією рівня* називається множина всіх точок площини, в яких функція $z = f(x,\ y)$ набуває однакових значень. Рівняння ліній рівня записують у вигляді $f(x,\ y) = c$. Для функції трьох змінних розглядають *поверхні рівня*.

Накресливши кілька ліній рівня та задавши значення на них функції, дістанемо певне уявлення про характер зміни функції.

Один з найпростіших прикладів зображення функції за допомогою ліній рівня – задання рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями однакової висоти, нанесеними на карту, легко уявити рельєф відповідної місцевості.

Побудувати лінії рівня функції $z = \sqrt{\dfrac{6y}{x^2 + y^2 - 4}}$.

Розв'язування. Шукане рівняння має вигляд

$$\sqrt{\frac{6y}{x^2 + y^2 - 4}} = c \, .$$

1. Якщо $c<0$, то ліній рівня немає.

2.Якщо $c = 0$, то лінії рівня становлять множину всіх точок осі Ox, крім двох: $(\pm 2, 0)$.

3.Якщо $c>0$, маємо $\dfrac{6y}{x^2 + y^2 - 4} = c^2 \Rightarrow c^2(x^2 + y^2 - 4) = 6y \Rightarrow x^2 + y^2 - \dfrac{6}{c^2} y = 4$, або $x^2 + (y - \dfrac{3}{c^2})^2 = 4 + \dfrac{9}{c^4}$. Отже, лініями рівня є кола радіусом $\sqrt{4 + \dfrac{9}{c^4}}$ із центром у точці $\left(0, \dfrac{3}{c^2}\right)$, з яких вилучено точки $(\pm 2, 0)$. Узявши $c = 1, 2, \ldots$, дістанемо сім’ю ліній рівня (рис. 4).

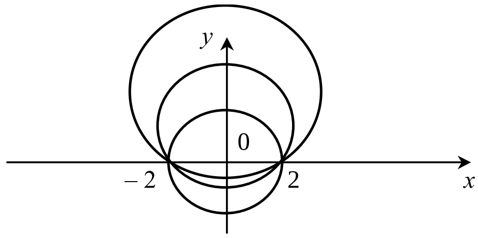


Рис. 4

1.4. Знаходження області визначення функції двох змінних.

Розглянемо алгоритм знаходження області визначення функції двох змінних на такому прикладі.

Знайти область визначення функції $z = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 - 9)}{\sqrt{9x - y}}$ та надати відповідну геометричну інтерпретацію.

1. Запишемо область визначення функції аналітично:

$$D = \{(x; y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 9 > 0, \; 9x > y\} \, .$$

2. Замінивши нерівності в D рівностями, побудуємо лінії, що відповідають їм на координатній площині:

$$x^2 + y^2 = 9; \qquad y = 9x.$$

3.За допомогою контрольних точок $P_1\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ і $P_2(1, 3)$ з’ясуємо розміщення D на площині й виділимо її штриховкою (рис. 1.5).

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{10}{4}<9\\ \frac{9}{2}+\frac{3}{2}>0\end{array}\right\}\Rightarrow P_1 \notin D;$$

$$\left.\begin{array}{l}1^2+3^2=10>9\\ 9>3\end{array}\right\}\Rightarrow P_2 \in D.$$

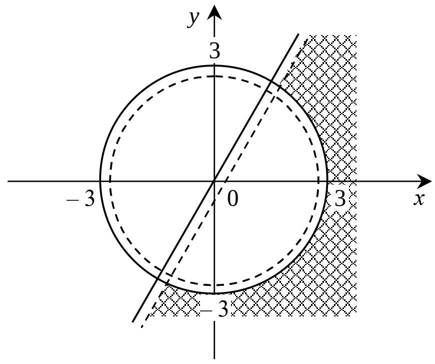


Рис. 5

1.5. Границя функції двох змінних.

Означення. Число A називається *границею функції* $z = f(x,\ y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що в разі виконання нерівності

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2,$$

справджується нерівність $|\, f(x,\ y) - A| < \varepsilon$.

Позначають:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A,\ \text{або} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A.$$

Наслідок. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c \qquad (c = \text{const});$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = x_0; \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0.$$

Теорема 1. Якщо функція $f(x, y)$ має границю при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, то така границя тільки одна.

Теорема 2. Якщо функція $f(x, y)$ має границю при $(x, y)\to(x_0, y_0)$, то вона обмежена в деякому околі точки $f(x_0, y_0)$.

Теорема 3. Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y) = b,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y) = c$, і в деякому виколотому околі точки (x_0, y_0) виконується нерівність $f(x,y) \le g(x,y)$, то $b \le c$.

Наслідок. Якщо $f(x,\ y) \ge 0$ ($f(x,\ y) \le 0$) у деякому околі точки (x_0, y_0) і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)$ існує, то ця границя невід'ємна (недодатна).

Теорема 4. Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x,\ y) = b$ і у деякому виколотому δ-околі точки (x_0, y_0) справджуються нерівності $f(x,\ y) \le g(x,\ y) \le h(x,\ y)$, то і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,\ y) = b$.

Теорема 5. Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=b,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,\ y)=c$,то виконуються рівності:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,\ y)+g(x,\ y)]=b+c$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)\,g(x,\ y)=b\,c$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{f(x,\ y)}{g(x,\ y)}=\dfrac{b}{c}$ ($c\neq 0$).

Означення. Якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=0$, то функція $z=f(x,\ y)$ називається *нескінченно малою* при $x\to x_0,\ y\to y_0$.

Обчислити $\lim\limits_{(x,\ y)\to(-1,\ -2)} \dfrac{x^2+4y^5}{12x-3y}$.

Розв'язування. Застосувавши теорему про арифметичні операції над границями, а також узявши до уваги те, що границя сталої величини дорівнює цій сталій, тобто

$$\lim_{(x,\ y)\to(-1,\ -2)} x=-1,\qquad \lim_{(x,\ y)\to(-1,\ -2)} y=-2$$

дістанемо:

$$\lim_{(x,\ y)\to(-1,-2)}\frac{x^2+4y^5}{12x-3y}=\frac{\lim\limits_{(x,\ y)\to(-1,\ -2)}\left(x^2+4y^5\right)}{\lim\limits_{(x,\ y)\to(-1,\ -2)}(12x-3y)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{(x,\ y)\to(-1,\ -2)} x^2+\lim\limits_{(x,\ y)\to(-1,\ -2)} 4y^5}{\lim\limits_{(x,\ y)\to(-1,\ -2)} 12x-\lim\limits_{(x,\ y)\to(-1,\ -2)} 3y}=\frac{127}{6}.$$

Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+2xy)}{\sin 2xy}$.

Розв'язування. Візьмемо $xy=t$. Тоді з того, що $(x,\ y)\to(0,\ 0)$, випливає $t\to 0$ і задану границю можна подати у вигляді $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+2t)}{\sin 2t}$. При $t\to 0$ маємо: $\ln(1+2t)\sim 2t$, $\sin 2t\sim 2t$.

Отже,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+2t)}{\sin 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{2t}=\frac{2}{2}=1.$$

Звідси, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+2xy)}{\sin 2xy}=1$.

Зауваження. Поняття границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних мають багато спільного, але існує й принципова різниця, з огляду на яку поняття границі функції кількох змінних є істотно більш обмеженим, ніж поняття границі функції однієї змінної.

Так, для функції багатьох змінних справджуються теореми про границю суми, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї змінної.

Водночас маємо такі розбіжності між цими поняттями:

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ($f(x)$ – функція однієї змінної), то це означає, що і лівостороння і правостороння границі її дорівнюють b. Обернене твердження також правильне: з існування та збігу двох односторонніх границь випливає існування границі функції в точці.

Для функції двох змінних $z = f(x,\ y)$ наближення до точки $(x_0,\ y_0)$ можливе нескінченною кількістю способів: і справа, і зліва, і згори, і знизу, і під деяким кутом до осі x тощо (рис. 6).

Більш того, до точки можна наближатися не лише по прямій, а й по складніших траєкторіях (рис. 7).

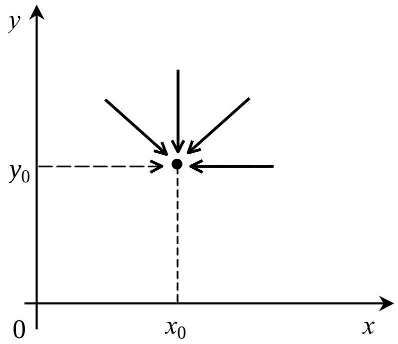


Рис. 6

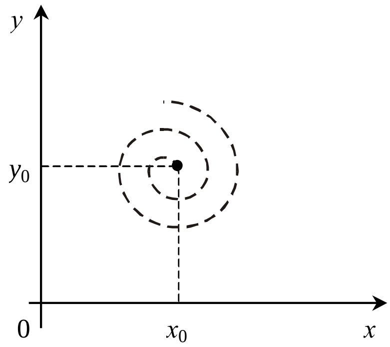


Рис. 7

Очевидно, що рівність $\lim\limits_{(x_0,\ y_0)} f(x,\ y) = b$ справджується тоді й тільки тоді, коли границя досягається в результаті наближення до точки (x_0, y_0) по будь-якій траєкторії. Отже, маємо істотне обмеження порівняно зі збігом двох односторонніх границь у разі функції однієї змінної.

[redacted] Довести, що $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{5xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Розв'язування. Наближатимемося до точки (0, 0) по прямій $y = kx$.

Якщо $y = kx$, то

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{5xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \frac{5xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{5k}{1+k^2}.$$

Зауважимо, що значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, наприклад:

при $k = 1$ границя дорівнює $\dfrac{5}{2}$,

при $k = 2$ границя дорівнює $\dfrac{10}{5}$ і т. д.

Отже, наближаючись до точки (0, 0) у різних напрямах, дістаємо різні границі. Це означає, що $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Зауваження. Для функцій $n>1$ змінних можна розглядати $n!$ так званих «повторних границь».

У частинному випадку для функції двох змінних $z = f(x, y)$ можна розглядати дві повторні границі в точці (x_0, y_0):

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,\ y)) \text{ і } \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,\ y)).$$

Наприклад, для функції $z=\dfrac{2x-y}{2x+y}$ маємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x-y}{2x+y}\right)=1;\quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x-y}{2x+y}\right)=-1.$$

Отже, змінювати порядок граничних переходів **загалом не можна**.

Скажімо, у попередньому прикладі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{5xy}{x^2+y^2}$ не існує, але повторні границі існують: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{5xy}{x^2+y^2}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5xy}{x^2+y^2}\right)=0$.

1.6. Неперервність функції двох змінних.

Означення. Функція $z=f(x,\ y)$ називається *неперервною в точці* $P_0(x_0,\ y_0)$, якщо

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0).$$

Означення. Функція $z=f(x,\ y)$ називається *неперервною в області*(замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Означення. Функцію $z=f(x,y)$, визначену на множині $D\subset R^2$,називають *неперервною за множиною $E\subset D$ в точці*$(x_0, y_0)\in D$,якщо

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0),\ (x,\ y)\in D} f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0).$$

Означення. Точка $(x_0,\ y_0)$ називається *точкою розриву функції* $z=f(x,\ y)$, якщо:

1) функція $z=f(x,\ y)$ не визначена в точці $(x_0,\ y_0)$;

2) функція $z=f(x,\ y)$ визначена в точці $(x_0,\ y_0)$, проте:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)$ не існує;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)$ існує, але не дорівнює $f(x_0,\ y_0)$.

Означення. Точка $(x_0,\ y_0)$ називається *точкою усувного розриву* функції $f(x,\ y)$, якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)$ існує, але або $f(x,\ y)$ не визначена в точці $(x_0,\ y_0)$, або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)\neq f(x_0,\ y_0)$.

Розглянемо функцію двох незалежних змінних

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2>0);\\[2mm] 0 & (x,\ y)=(0,\ 0).\end{cases}$$

Ця функція має розрив у точці (0,0), бо в ній для функції $f(x,\ y)$ границі не існує.

Тут ми стикаємося з цікавим явищем: розглядувана функція не є неперервною в точці (0,0) за двома змінними водночас, але є неперервною за кожною зі змінних x і y окремо.

Точки розриву можуть бути не лише ізольованими, як у попередньому прикладі, а можуть заповнювати лінії, поверхні тощо. Так, функції двох змінних $f\left(x,\ y\right)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $f\left(x,\ y\right)=\dfrac{1}{x^2+y^2-4}$ мають розриви: перша – прямі $y=\pm x$, друга – окіл $x^2+y^2=4$. Для функції трьох змінних

$$f\left(x,\ y,\ z\right)=\frac{x+y+z}{xy-z},\ f\left(x,\ y,\ z\right)=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}$$

розриви заповнюють відповідно гіперболічний параболоїд $z=xy$ і конус $z^2=x^2+y^2$.

Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4y}{x^4+y^4}$.

Розв'язування. Для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, таке що для всіх точок $\left(x,\ y\right)$, які задовольняють умову $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ і відмінні від початку координат, справджується нерівність

$$\left|\frac{x^4y}{x^4+y^4}-0\right|=\frac{x^4}{x^4+y^4}|y|\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4y}{x^4+y^4}=0\,.$$

Знайти границю функції $f\left(x,\ y\right)=y\sin\dfrac{1}{y-x}$ в точці (0,0) за множиною, на якій функція визначена.

Розв'язування. Зауважимо, що функція не визначена в точках прямої $y=x$. Тому звичайної границі в точці (0,0) не існує. Але границя за множиною точок $D=\left\{\left(x,\ y\right)\middle| x\ne y\right\}$, на якій функція визначена, існує і дорівнює нулю, оскільки

$$\left|\ y\sin\frac{1}{y-x}\ \right|\le|\ y\,|\,.$$

Знайти значення a, при якому функція $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2\ne 0;\\ a, & \text{якщо } x^2+y^2=0\end{cases}$ в точці (0,0):

1) є неперервною за прямою $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2\ne 0$;

2) неперервною за кривою $y=\alpha x^2$;

3) неперервною.

Розв'язування. 1. Наближатимемося до точки (0,0) по прямій $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2\ne 0$. Це означає, що виконуються рівності:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2t^2\beta t}{\alpha^4t^4+\beta^2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t^3}{t^2\left(\alpha^4t^2+\beta^2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4t^2+\beta^2}=0\,.$$

Якщо $a=0$, то дана функція буде неперервною за даною прямою.

2. Наближатимемося до точки (0,0) по кривій $y=\alpha x^2$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\alpha x^2}{x^4+\alpha^2x^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\alpha x^4}{x^4\left(1+\alpha^2\right)}=\frac{\alpha}{1+\alpha^4}\,.$$

Якщо $a=\dfrac{\alpha}{1+\alpha^4}$, то розглядувана функція буде неперервною за даною прямою.

3. У точці (0,0) функція $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ має розрив, оскільки в ній границя не існує. Це випливає з 1 і 2.

Знайти точки розриву, а також точки усувного розриву функції двох змінних:

1) $z=\dfrac{x^5}{x^4+y^4}$;

2) $z=\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos^2 y}$.

Розв'язування. 1. Функція $z=\dfrac{x^5}{x^4+y^4}$ в точці (0,0) не існує, тому вона має в цій точці розрив. Знайдемо границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^5}{x^4+y^4}$.

Для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, таке що для всіх точок $(x,\ y)$, які задовольняють умову $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ і відмінні від початку координат, виконується нерівність

$$\left|\frac{x^5}{x^4+y^4}-0\right|=\frac{x^4}{x^4+y^4}|x|\le|x|\le\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon\,.$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^5}{x^4+y^4}=0$ і функція має в точці (0,0) усувний розрив, якщо $z=0$ у цій точці.

2. Функція $z=\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos^2 y}$ не існує, якщо $\cos^2 x+\cos^2 y=0$, тобто $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $y=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $k,\,n\in Z$.

Тому вона має розриви. Знайдемо границю $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+\pi k\\ y\to\frac{\pi}{2}+\pi n}}\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos^2 y}=+\infty$.

Отже, функція $\dfrac{1}{\cos^2 x+\cos^2 y}$ має в точці $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ неусувний розрив.

1.7. Неперервність складеної (складної) функції двох змінних.

Означення. Нехай функція $z = f(u,v)$ визначена на множині *E,* а змінні u і v, у свою чергу, залежать від змінних *x* і *y*: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, причому обидві функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ визначені на множині *D*. Якщо для будь-якого $(x,y) \in D$ існує значення $(u,v) \in E$ (рис. 8), то говорять, що на множині *визначено складену (складну) функцію* $z = f(u,v)$, де $u = u(x,\ y)$, $v = v(x,\ y)$; *u, v* – проміжні, *x, y*– незалежні змінні.

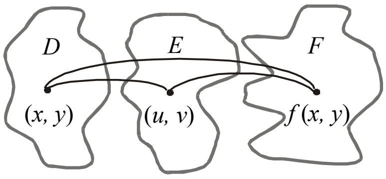


Рис. 8

Функція $z = u^3 + v^3$, де $u = \sin^2\left(x + y^2\right)$, $v = \cos^4\left(x^2 + y^2\right)$. Це складена функція, яка визначена на координатній площині. Її можна записати у вигляді

$$z = \sin^6\left(x + y^2\right) + \cos^{12}\left(x^2 + y^2\right).$$

Теорема. Нехай на множині *D* визначено складену функцію $z = f\left(u,v\right)$, де $u = u\left(x,y\right)$, $v = v\left(x,y\right)$ і нехай функції $u\left(x,y\right)$, $v\left(x,y\right)$ неперервні в точці $\left(x_0,y_0\right) \in D$, а функція $f\left(u,v\right)$ неперервна в точці $\left(u_0,v_0\right)$, де $u_0 = u\left(x_0,y_0\right)$, $v_0 = v\left(x_0,y_0\right)$. Тоді складена функція $z = f\left(u\left(x,y\right),\ v\left(x,y\right)\right)$ неперервна в точці $\left(x_0,y_0\right)$.

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(u,v)$ неперервна. За означенням неперервності функції в точці (u_0,v_0) візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$, тоді існує таке $\delta > 0$, що з нерівності

$$\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} < \delta . \qquad (1.3)$$

випливає нерівність

$$\left| f(u,v) - f(u_0,v_0) \right| < \varepsilon .$$

Аналогічно, функції $u = u(x,y)$ і $v = v(x,y)$ за умовою теореми неперервні, тому існують такі $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що з нерівностей

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1 \quad \text{і} \quad \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2$$

випливають нерівності

$$\left| u(x,y) - u(x_0,y_0) \right| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} . \qquad (1.4)$$

$$\left| v(x,y) - v(x_0,y_0) \right| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} . \qquad (1.5)$$

Нехай $\delta^0 = \min(\delta_1,\delta_2)$. Тоді з нерівності

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta^0 . \qquad (1.6)$$

дістанемо нерівності (1.4) і (1.5).

З урахуванням нерівностей (1.4) і (1.5) для нерівності (1.3) запишемо:

$$\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\sqrt{\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)^2}=\delta.$$

Отже, якщо виконується нерівність (1.6), маємо

$$\left|f(u(x,y),\, v(x,y))-f(u(x_0,y_0),\ v(x_0,y_0))\right|<\varepsilon\,,$$

а це означає, що складена функція $z=f(u(x,y),\, v(x,y))$ неперервна в точці (x_0,y_0). ♦

1.8. Властивості неперервної функції двох змінних.

Теорема. Якщо функція неперервна в точці, то вона обмежена деяким околом цієї точки.

Теорема. Якщо функції $f(x,y)$ та $g(x,y)$ неперервні в точці (x_0,y_0), то в цій точці будуть неперервними функції:

1) $f(x,y)\pm g(x,y)$;

2) $f(x,y)g(x,y)$;

3) $f(x,y)/g(x,y)$ при $g(x_0,y_0)\neq 0$.

Теорема. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на замкненій множині, то вона обмежена на цій множині.

Теорема (про нуль неперервної функції). Нехай функція $f(x,\ y)$ неперервна на зв'язній множині D і набуває у двох точках A і B цієї множини значень різних знаків. Тоді у множині D знайдеться така точка, що в ній функція перетворюється на нуль.

Доведення. Побудуємо на зведенні до випадку функції однієї незалежної змінної.

Оскільки область Dзв'язна, точки M_0 та M_1 можна сполучити ламаною, усі точки якої лежать у D. Якщо поступово перебирати вершини ламаної, то або з'ясується, що в деякій із них функція перетворюється на нуль — і тоді теорему доведено, або цього не буде. В останньому випадку знайдеться така ланка ламаної, на кінцях якої функція набуває значень різних знаків. Замінивши позначення точок, вважатимемо, що M_0 і M_1 саме і є кінцями цієї ланки. Її рівняння мають вигляд:

$$x=x_0+t(x_1-x_0),\qquad \underset{(0\le t\le 1)}{}\qquad y=y_0+t(y_1-y_0).$$

Якщо точка $M(x,y)$ рухається вздовж цієї сторони, то початкова функція $f(x,y)$ перетворюється на складену функцію однієї змінної t:

$$F(t)=f(x_0+t(x_1-x_0),\ y_0+t(y_1-y_0))\qquad (0\le t\le 1)\,,$$

очевидно, неперервну за теоремою 1.6 з огляду на неперервність як функції $f(x,\ y)$, так і лінійних функцій від t, підставлених замість її аргументів. Але для $F(t)$ маємо:

$$F(0)=f(x_0,y_0)<0,\qquad F(1)=f(x_1,y_1)>0.$$

Застосовуючи до функції $F(t)$ однієї змінної доведену для одновимірного випадку аналогічну теорему маємо, що $F(t')=0$ при деякому значенні t' між 0 та 1. Тоді згідно з означенням функції $F(t)$ можемо записати:

$$f(x_0+t'(x_1-x_0),\quad y_0+t'(y_1-y_0))=0.$$

Точка $M'(x', y')$, де $x' = x_0 + t'(x_1 - x_0),\ y' = y_0 + t'(y_1 - y_0),$ і є шуканою♦.

Теорема (про проміжне, або середнє значення). Нехай функція $f(x, y)$ неперервна на зв'язній множині D й у двох будь-яких точках A та B цієї множини набуває нерівних значень $f(A)$ і $f(B)$. Тоді на цій множині вона набуває деякого значення M, яке лежить між $f(A)$ і $f(B),$ тобто існує така точка $(x_0, y_0) \in D$, що $f(x_0, y_0) = M$.

Доведення аналогічне доведенню теореми Коші для функції однієї змінної.

1.9. Рівномірна неперервність.

Нагадаємо, що неперервність функції $f(x, y)$ у певній точці (x_0, y_0) множини M, де функцію задано, ми сформулювали так: для будь-якого $\varepsilon > 0$ має існувати таке $\delta > 0,$ що нерівність

$$\left| f(x, y) - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon$$

виконується для будь-якої точки $(x, y) \in M$, яка перебуває в δ-околі точки (x_0, y_0):

$$\sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} < \delta .$$

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в усій множині M. Тоді постає запитання: чи можна за даним $\varepsilon > 0$ знайти таке $\delta > 0,$ яке годилося б – у зазначеному розумінні – для всіх точок (x_0, y_0) з M одночасно? Якщо це можливо (при будь-якому ε), тоді говорять, що функція $f(x, y)$ в M *рівномірно неперервна*.

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то вона й рівномірно неперервна вD.

Доведення (від супротивного). Припустимо, що для деякого числа $\varepsilon > 0$ не існує числа $\delta > 0,$ яке годилося б одночасно для всіх точок (x_0, y_0) області D.

Візьмемо послідовність додатних чисел, що прямує до нуля:

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_n > \ldots > 0, \quad \delta_n \to 0.$$

Оскільки жодне з чисел δ_n не може годитися – у зазначеному розумінні – одночасно для всіх точок (x_0, y_0) області D, то для кожного δ_n знайдеться в D така конкретна точка $(x_n, y_n),$ для якої δ_n не годиться. Це означає, що в D існує точка $(x_n', y_n'),$ така, що виконуються нерівності

$$\left| x_n' - x_n \right| < \delta_n, \quad \left| y_n' - y_n \right| < \delta_n,$$

а, водночас, і нерівність

$$\left| f(x_n', y_n') - f(x_n, y_n) \right| \geq \varepsilon . \qquad (1.7)$$

З обмеженої послідовності точок $\left\{(x_n, y_n)\right\}$, за теоремою Больцано-Вейєрштрасса, вилучимо таку частинну послідовність $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$, що $x_{n_k} \to \bar{x}$, $y_{n_k} \to \bar{y}$, причому гранична точка $(\bar{x}, \bar{y})$ обов'язково належить області D (згідно з її замкненістю).

Далі дістаємо:

$$\left| x_{n_k}' - x_{n_k} \right| < \delta_{n_k}, \quad \left| y_{n_k}' - y_{n_k} \right| < \delta_{n_k};$$

причому зі зростанням k маємо: $n_k \to +\infty$ і $\delta_{n_k} \to 0$. Тому

$$x'_{n_k} - x_{n_k} \to 0, \quad y'_{n_k} - y_{n_k} \to 0,$$

а, отже,

$$x'_{n_k} \to \bar{x}, \quad y'_{n_k} \to \bar{y}.$$

З огляду на неперервність функції $f(x, y)$ в точці $(\bar{x}, \bar{y})$, що належить області D, мають одночасно виконуватися такі співвідношення:

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

звідки

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to 0,$$

а це суперечить нерівності (1.7). ♦

2. Диференційованість функції двох змінних.

2.1. Частинні та повні прирости функції двох змінних.

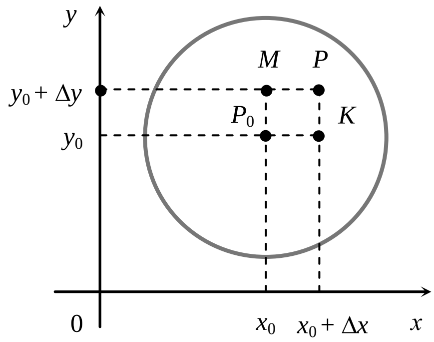


Рис. 9

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0, y_0)$. Надамо незалежним змінним x та y приростів Δx і Δy так, щоб точка $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ не виходила за межі зазначеного околу. Тоді й точки $K(x_0 + \Delta x, y_0)$, $M(x_0, y_0 + \Delta y)$ також потраплять у цей окіл (рис. 9).

Означення. Різницю $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називають *повним приростом функції за x та y* при переході від точки (x_0, y_0) до точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ і позначають Δz. Різницю $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ називають *частинним приростом за x* функції $z = f(x, y)$, а різницю $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ – *частинним приростом за y* цієї функції. Позначають ці прирости відповідно $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$. Отже,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0);$$
$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0);$$
$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Зауваження. Аналогічно визначаються прирости функції більш ніж двох змінних.

2.2. Частинні похідні двох змінних.

Нехай функція $z = f\left(x,\ y\right)$ задана в деякому околі точки $\left(x_0,\ y_0\right)$.

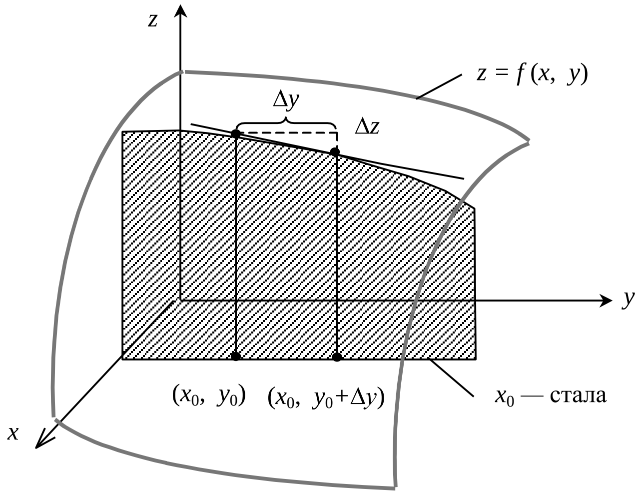


Рис. 10

Означення. Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,\ y_0\right)-f\left(x_0,\ y_0\right)}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0,\ y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,\ y_0\right)}{\Delta y},$$

то їх називають *частинними похідними* функції $z = f(x, y)$ у точці $\left(x_0,\ y_0\right)$ відповідно за змінними x і y та позначають: $\dfrac{\partial f\left(x_0,\ y_0\right)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f\left(x_0,\ y_0\right)}{\partial y}$ або $f'_x\left(x_0,\ y_0\right)$, $f'_y\left(x_0,\ y_0\right)$ або $D_x f$, $D_y f$. (Символ «∂» - так зване «де» кругле - вперше застосував Якобі).

2.3. Повний диференціал функції двох змінних.

Означення. Функція $z = f\left(x,\ y\right)$ називається *диференційовною в точці* $\left(x_0,\ y_0\right)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B- деякі числа; α, β- нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається *повним диференціалом функції*(точніше -*першим диференціалом*) $z = f\left(x,\ y\right)$ у точці $\left(x_0,\ y_0\right)$; позначається $df\left(x_0,\ y_0\right)$ або dz. Таким чином,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (2.1)$$

Диференціалом незалежної змінної x або y називають її приріст, тобто за означенням беруть $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Якщо функція *f* диференційовна в кожній точці множини $D \subset R^2$, то її називають *диференційовною на множині D.*

Отже, у кожній точці, де виконується рівність (2.1), повний диференціал функції $z = f(x,\ y)$ обчислюється за формулою

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{2.2}$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x,\ y)$ диференційовна в точці $(x_0,\ y_0)$ і $dz = Adx + By$, то в точці $(x_0,\ y_0)$ існують частинні похідні

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y} = B.$$

Доведення. За означенням диференційовної функції $z = f(x,\ y)$ маємо:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \tag{2.3}$$

Узявши у (4.10) $\Delta y = 0$ $(\Delta x = 0)$, дістанемо $\Delta_x z(\Delta_y(z))$:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \alpha\Delta x \qquad \left(\Delta z = \frac{\partial z}{dy}\Delta x + \beta\Delta y\right).$$

Звідси

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x} \qquad \left(\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B = \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\right).$$

Якщо частинні похідні функції *f* існують у кожній точці множини $D \subset R^2$, то говорять, що ***функція f має частинні похідні на множині D***.

Аналогічно визначають і позначають частинні похідні трьох і більше змінних.

2.4. Частинні похідні та повний диференціал функції *n*-змінних.

Означення. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x_k \to 0}\frac{f(x_1,\ \ldots,\ x_k + \Delta x_k,\ \ldots,\ x_n) - f(x_1,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_n)}{\Delta x_k},$$

то її називають *частинною похідною функції f у точці* $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *за змінною* x_k і позначають $\dfrac{\partial f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{\partial x_k}$ або $f_{x_k}{}'(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$.

Похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$ називають *похідними першого порядку.*

Правило знаходження частинних похідних першого порядку.

Для обчислення частинної похідної $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ звичайно користуються відомими формулами і правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи всі змінні, крім x_k, сталими.

Знайти частинні похідні функції $z = x + y^3 + \ln\left(2x + y^2\right)$.

Розв'язування. Функція визначена в області $y^2 > -2x$. Вважаючи, що y стале, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{1}{2x + y^2}\ 2, \qquad y^2 > -2x.$$

Вважаючи, що x стале, знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + \frac{1}{2x + y^2}\ 2y, \qquad y^2 > -2x.$$

Знайти частинні похідні функції $u = x^2 y + \sin\left(ax + by + cz\right) + \mathrm{tg} z$.

Розв'язування. Вважаючи, що $y = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + \cos\left(ax + by + cz\right)a.$$

Вважаючи, що $x = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \cos\left(ax + by + cz\right)b.$$

Вважаючи, що $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos\left(ax + by + cz\right)c + \frac{1}{\cos^2 z}.$$

Геометрична інтерпретація частинних похідних.

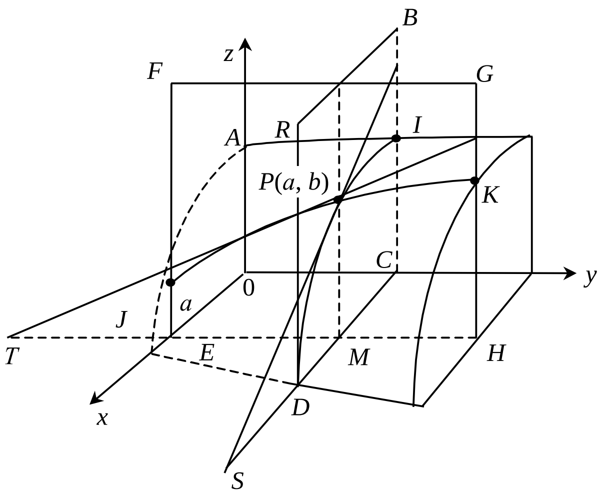


Рис. 11

Проведемо площину *EFGH* через точку $P(a,\ b)$ даної поверхні паралельно площині *y*0*z*. Рівняння цієї площини

$$x = a.$$

Отже, рівняння кривої, утвореної в перерізі *JPK*, буде

$$z = f(a,\ y),$$

якщо *EF* розглядати як вісь *z*, а *EH*- як вісь *y*. У цій площині $\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$ означає те саме, що $\frac{\partial z}{\partial y}$, а тому $\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{tg}\,\angle MTP$.

Отже, **частинна похідна** $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ **дорівнює тангенсу кута нахилу до осі *y*, дотичної до перерізу *JK* у точці *P***.

Аналогічно, якщо провести площину *BCD* через *P* паралельно площині *x*0*z*, її рівняння буде

$$y = b\,,$$

і в площині перерізу *DPI* частинна похідна $\dfrac{\partial f\,(x,\ y)}{\partial x}$ означатиме те саме, що й $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Звідси $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{tg}\,\angle MSP.$

Отже, **частинна похідна** $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **дорівнює тангенсу кута нахилу до осі *x*,дотичної до перерізу *DJ* в точці *P***.

Для **повного диференціала** формула (2.3)узагальнюється на випадок диференційовної функції *n* змінних $f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\,. \qquad (2.4)$$

Знайти df, якщо $f = x + \dfrac{z}{x^3 + y^3}$.

Розв’язування. Знайдемо спочатку $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + z\left(-\frac{1}{\left(x^3 + y^3\right)^2}\right)3x^2\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z\left(-\frac{1}{\left(x^3 + y^3\right)^2}\right)3y^2\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{x^3 + y^3}\,.$$

Звідси дістанемо:

$$dx = \left(1 - \frac{3x^2 z}{\left(x^3 + y^3\right)^2}\right)dx - \frac{3y^2 z}{\left(x^3 + y^3\right)^2}dy + \frac{1}{x^3 + y^3}dz.$$

Властивості повного диференціала.

Для будь-яких диференційованих функцій $u\left(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\right)$, $v\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ справджуються рівності:

$$d\left(\alpha u + \beta v\right) = \alpha du + \beta dv\,, \text{ де } \alpha,\ \beta\text{- сталі;} \qquad (2.5)$$

$$d\left(uv\right) = vdu + udv\,;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}\,,\ v \neq 0\,.$$

Властивість інваріантності форми повного диференціала: Формула (2.4) виконується не лише тоді, коли x та y- незалежні змінні, а й тоді, коли x і y є диференційованими функціями будь-яких змінних.

2.5. Достатня умова диференційованості функції двох змінних у точці.

Для функції однієї змінної диференційованість та існування похідної є рівносильними твердженнями. У разі функції багатьох змінних маємо інше: існування частинних похідних - необхідна, але не достатня умова диференційовності функції в точці. Наприклад, для функції

$$z = f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,\ y) \neq (0,\ 0); \\ 0, & (x,\ y) = (0,\ 0) \end{cases}$$

у точці $(0,\ 0)$ маємо: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Проте ця функція розривна в точці $(0,\ 0)$, а тому вона не може бути диференційовною в цій точці. Отже, для диференційовності функції $z = f(x,\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ не достатньо самого лише існування частинних похідних. Для диференційовності доводиться додатково вимагати неперервності частинних похідних, як це випливає з поданої далі теореми.

Теорема. Якщо функція $z = f(x,\ y)$ у деякому околі точки $(x_0,\ y_0)$ має неперервні частинні похідні, то вона диференційовна в цій точці.

Доведення. Розглянемо в координатній площині $x0y$ точки $P(x_0,\ y_0)$, $Q(x_0 + \Delta x,\ y_0)$ і $R(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ (рис. 4.12).

Нехай частинні похідні визначені в деякому ε-околі точки P і точка R належить даному околу. Оскільки ε-окіл точки P- це круг радіусом ε із центром у точці P, то відрізки PQ і QR цілком належать цьому околу. Отже, функція $f(x,\ y)$ визначена на відрізках PQ і QR.

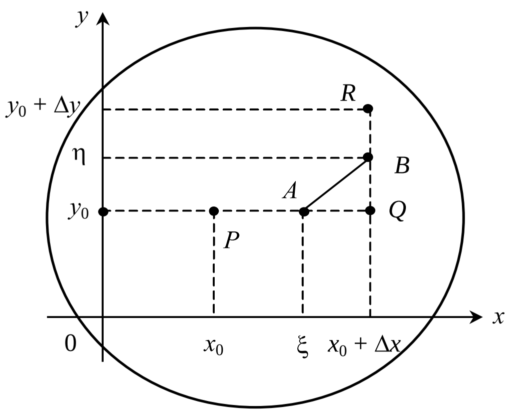


Рис. 12

Подамо повний приріст функції $z = f(x,\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ у вигляді

$$\begin{gathered}\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) = \\ = \big(f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x,\ y_0)\big) + \big(f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)\big).\end{gathered} \tag{2.6}$$

На відрізку PQ змінна y має стале значення $y = y_0$, тому функція $f(x,\ y)$ на цьому відрізку є функцією однієї змінної x. Застосовуючи формулу Лагранжа про середнє значення, дістаємо:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)=f'_x(\xi,\ y_0)\Delta x \qquad (2.7)$$

для деякого значення ξ з інтервалу $(x_0,\ x_0+\Delta x)$. Аналогічно, на відрізку *QR* функція $f(x,\ y)$ залежить лише від *y*. Тому на проміжку $(y_0,\ y_0+\Delta y)$ знайдеться точка η, для якої

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,\ y_0)=f'_y(\Delta x+x_0,\ \eta)\Delta y \qquad (2.8)$$

Згідно з (2.7) і (2.8) запишемо формулу (6.13) у вигляді:

$$\Delta z=f'_x(\xi,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0+\Delta x,\ \eta)\Delta y\,.$$

Звідси

$$\begin{aligned}\Delta z&=\left(f'_x(x_0,\ y_0)+f'_x(\xi,\ y_0)-f'_x(x_0,\ y_0)\right)\Delta x+\\&+\left(f'_y(x_0,\ y_0)+f'_y(x_0+\Delta x,\ \eta)-f'_y(x_0,\ y_0)\right)\Delta y=\\&=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y=dz+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,\end{aligned}$$

де $\alpha=f'_x(\xi,\ y_0)-f'_x(x_0,\ y_0)$, $\beta=f'_y(\Delta x+x_0,\ \eta)-f'_y(x_0,\ y_0)$.

Очевидно, що при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$ точки *A* і *B* прямують до точки *P*. Частинні похідні неперервні, тому $\alpha\to 0,\ \beta\to 0,$ коли $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0.$

Разом з α та β прямує до нуля і величина

$$\varepsilon=\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\,.$$

Тому з рівності

$$\Delta z=dz+\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=dz+\varepsilon\rho$$

випливає диференційовність функції $z=f(x,\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$.

2.6. Диференціювання складеної функції.

Теорема. Нехай на множині *D* визначено складену функцію $z=f(u,\ v)$, де $u=u(x,\ y)$, $v=v(x,\ y)$, і нехай функції $u(x,\ y), v(x,\ y)$ мають у деякому околі точки $(x_0,\ y_0)\in D$ неперервні частинні похідні, а функція $f(u,\ v)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(u_0,\ v_0)$, де $u_0=u(x_0,\ y_0), v_0=v(x_0,\ y_0)$. Тоді складена функція $z=f(u(x,\ y),\ v(x,\ y))$ диференційовна в точці $(x_0,\ y_0)$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (2.10)$$

Доведення. За умовою теореми функції $u=u(x,\ y)$ і $v=v(x,\ y)$ мають неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(x_0,\ y_0)$. Тому за теоремою вони диференційовні в точці $(x_0,\ y_0)$:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\beta_1\Delta y,$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_2\Delta x+\beta_2\Delta y,$$

де $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2 \to$ при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Надавши приростів лише аргументу *x*, дістанемо

$$\begin{aligned} \Delta_x u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x, \\ \Delta_x v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \alpha_2 \Delta x, \end{aligned} \qquad (2.11)$$

де $\alpha_1,\ \alpha_2 \to 0$ при $\Delta x,\ \Delta y \to 0.$

Знайдемо приріст функції $z = f(x,\ y)$ за *x*. За умовою теореми функція $z = f(u,\ v)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки $(u_0,\ v_0)$, а тому вона диференційовна в цій точці:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha \Delta_x u + \beta \Delta_x v. \qquad (4.12)$$

Підставляючи у (4.19) рівності (4.18), дістаємо:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \alpha_2 \Delta x\right) + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x\right) +$$

$$+ \beta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \alpha_2 \Delta x\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \gamma \Delta x,$$

де

$$\gamma = \frac{\partial z}{\partial u}\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial v}\alpha_2 + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\alpha_1 + \beta\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\alpha_2 \text{ -}$$

нескінченно мала величина при $\Delta x \to 0$.

Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta z} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Диференційовність функції $z = f(u(x,\ y),\ v(x,\ y))$ випливає з неперервності частинних похідних $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

: Знайти f'_x і f'_y для функції $f(u,\ v)$, якщо $u = xy,\ v = \dfrac{x}{y}.$

Розв'язування. За формулами (2.9) і (2.10) маємо:

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u (xy)'_x + f'_v\left(\frac{x}{y}\right)'_x = f'_u y + f'_v \frac{1}{y};$$

$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u (xy)'_y + f'_v\left(\frac{x}{y}\right)'_y = f'_u x + f'_v x\left(-\frac{1}{y^2}\right).$$

: Знайти повний диференціал функції φ, якщо $\varphi = f(u,\ v), u = y/(x+y)$, $v = x^2 - y^2$.

Розв'язування. Дістаємо:

$$d\varphi = f'_u du + f'_v dv = f'_u d\left(\frac{y}{x+y}\right) + f'_v d\left(x^2 - y^2\right) = f'_u\frac{(x+y)dy - yd(x+y)}{(x+y)^2} + f'_v \cdot \left(dx^2 - dy^2\right) =$$

$$= f'_u \frac{xdy - ydx}{(x+y)^2} + f'_v \cdot (2xdx - 2ydy).$$

2.7. Похідна за напрямом. Градієнт.

Означення. Нехай функція $z = f(x,\ y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0,\ y_0)$; l- деякий промінь з початком у точці $(x_0,\ y_0)$; $P(x,\ y)$ - точка на цьому промені, яка належить околу точки $(x_0,\ y_0)$ (рис. 13); Δl - довжина відрізка P_0P. Якщо існує $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{f(x,\ y) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta l}$, то ця границя називається *похідною функції* $z = f(x,\ y)$ *за напрямом l у точці* $P_0(x_0,\ y_0)$ і позначається $\frac{\partial z}{\partial l}$.

Зокрема, $\frac{\partial z}{\partial x}$ - похідна функції $z = f(x,\ y)$ за додатним напрямом осі *x*, а $\frac{\partial z}{\partial y}$ - похідна функції $z = f(x,\ y)$ за додатним напрямом осі *y*.

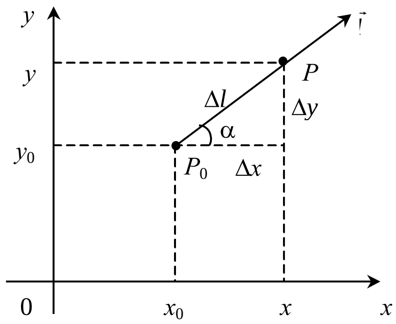


Рис. 13

Похідна за напрямом $\frac{\partial z}{\partial l}$ характеризує швидкість зміни функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P_0(x_0,\ y_0)$ за напрямом *l*.

Теорема. Якщо функція $z = f(x,\ y)$ має в точці $P_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні, то в цій точці існує похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ за будь-яким напрямом $l = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta, \qquad (2.13)$$

де $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$ і $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$ - значення частинних похідних у точці $P_0(x_0,\ y_0)$.

Доведення. За умовою теореми функція $z = f(x,\ y)$ має в точці (x_0, y_0) неперервні частинні похідні, тому вона диференційовна в цій точці:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

де γ_1, γ_2 - нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0.$ Тоді

$$\frac{\Delta z}{\Delta l}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l}+\gamma_1\frac{\Delta x}{\Delta l}+\gamma_2\frac{\Delta x}{\Delta l}.$$

Із трикутника P_0PK (рис. 4.13) маємо:

$$\frac{\Delta x}{\Delta l}=\cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\Delta l}=\sin\alpha=\cos\beta.$$

Звідси

$$\frac{\Delta z}{\Delta l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta+\gamma_1\cos\alpha+\gamma_2\cos\beta.$$

Якщо $\Delta l\to 0$, то $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, а отже $\gamma_1\to 0, \gamma_2\to 0.$ Звідси

$$\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta l}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\cos\beta.$$

: Знайти похідну функції $u=x\sin(x+y)$ у точці $M(1,\ 1)$ за напрямом $l=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Розв'язування. Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці $(1, 1)$ функції $u=x\sin(x+y)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,\ 1)}=\left.(\sin(x+y)+x\cos(x+y))\right|_{(1,\ 1)}=\sin 2+\cos 2;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,\ 1)}=\left.(x\cos(x+y))\right|_{(1,\ 1)}=\cos 2.$$

Тоді, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=(\sin 2+\cos 2)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cos 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sin 2}{\sqrt{2}}.$$

Означення. Вектор з координатами $\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z=f(x,\ y)$ в точці $P_0(x_0,\ y_0)$, називається *градієнтом функції* $z=f(x,\ y)$ у цій точці і позначається **grad z**:

$$grad\ z=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}i+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}j, \qquad (2.14)$$

де i, j- одиничні орти.

: Знайти градієнт функції $f=yx^y$ у точці $M(2,\ 1)$.

Розв'язування. Запишемо та обчислимо частинні похідні в точці $M(2,\ 1)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M=\left.y\ yx^{y-1}\right|_M=2^0=1;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = \left(x^y + y\,x^y \ln x\right)\Big|_M = 2 + 2\ln 2.$$

Тоді згідно з (5.2.14) $grad\ \ f = 1i + \left(2 + 2\ln 2\right) j$, або $grad\ \ f = \left(1,\ 2 + 2\ln 2\right)$.

Аналогічно для диференційовної функції $z = f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ у точці $P_0\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$*похідна за напрямом довільного одиничного вектора* $\mathbf{l} = \left(\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \ldots,\ \cos\alpha_n\right)$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\alpha_k = 1$ подається так:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{P_0} \cos\alpha_k .$$

Означення. *Градієнтом диференційовної функції* $f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$у точці $P_0\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ називають вектор $grad\ \ f = \sum\limits_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{P_0} i_k,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n,$ де i_k - одиничні орти, а значення частинних похідних $\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{P_0}$ обчислені в точці $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$.

Властивості:

1. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = grad\ \ f \cdot l$.
2. $\max\limits_{\mathbf{l}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \left|grad\ \ f\right|$.
3. Якщо $grad\ \ f \neq 0$, то похідна $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ досягає найбільшого значення при $\mathbf{l} = \frac{grad\ \ f}{\left|grad\ \ f\right|}$.

2.8. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

Нехай функція $z = f\left(x,\ y\right)$ має частинні похідні в усіх точках множини *D*. Візьмемо будь-яку точку $\left(x,\ y\right) \in D$. Якщо в цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вони залежать від *x* і *y*, тобто вони є функціями двох змінних. Отже, можна ставити питання про відшукання їх частинних похідних. Якщо вони існують, їх називають *частинними похідними другого порядку* і позначають відповідно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (читаємо: «де два зет по де ікс квадрат») або z''_{xx}, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ або z^2_{yy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ або z''_{xy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ або z''_{yx}. Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків.

Нехай функція $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ в околі точки $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ має частинну похідну першого порядку $\frac{\partial u}{\partial x_k}$.

Означення. Частинну похідну функції $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ за змінною x_l називають *частинною похідною другого порядку за змінними* x_l *і* x_k і позначають $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}$ або $f''_{x_l x_k}$.

Отже, за означенням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right).$$

Якщо $l = k$, похідну $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}$ позначають $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$.

Означення. *Частинною похідною порядку* $m \in N$ називають частинну похідну першого порядку за будь-якою змінною від будь-якої похідної ($m-1$)-го порядку.

Частинні похідні за різними змінними називають *мішаними частинними похідними*.

Теорема. Якщо дві мішані похідні порядку *m*, що відрізняються лише порядком диференціювання, неперервні в деякій точці, то їх значення в цій точці збігаються.

Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = x^3 y^4$.

Розв'язування. Маємо: $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\left(3x^2 y^4\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(12x^2 y^3\right) = 36x^2 y^2.$$

Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \cos\left(x^2 + y^2\right)$.

Розв'язування.
$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -2x\sin\left(x^2 + y^2\right), & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\cos\left(x^2 + y^2\right) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2x\sin\left(x^2 + y^2\right), & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\cos\left(x^2 + y^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Означення. *Диференціалом другого порядку функції* $z = f(x, y)$ називається диференціал її повного диференціала:

$$d^2 z = d(dz).$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків:

$$d^3 z = d\left(d^2 z\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$
$$d^m z = d\left(d^{m-1} z\right)$$

Для диференціала порядку *m* справджується залежність:

$$d^m u = \sum_{k=1}^{m} C_m^k \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k} dy^k. \tag{2.15}$$

У частинному випадку при $m = 2$ формула (2.15) набирає вигляду:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \qquad (2.16)$$

Зауваження. Для складеної функції $\omega = f(x,\ y)$, де $x = x(u,\ v)$, $y = y(u,\ v)$, другий її диференціал, загалом, не подається через dx і dy згідно з формулою (2.16). Отже, **для порядку $m \geq 2$ не виконується властивість інваріантності форми диференціала щодо вибору змінних**.

У разі функції n змінних $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ формула (2.15) набирає вигляду:

$$d^m u = \sum C_m^{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \ldots\ \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1}\ \ldots dx_n^{\alpha_n},\ \text{де}\quad C_m^{\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n} = \frac{m!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \ldots \alpha_n!}, \qquad (2.17)$$

де підсумовування виконується за всіма цілими невід'ємними α_i, такими що $\sum_{k=1}^{m}\alpha_k = m$.

При $m = 2$ формула (2.17) подається так:

$$d^2u = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}dx_k^2 + 2\sum_{\substack{i,\ k=1 \\ i<k}}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}dx_i dx_k.$$

: Знайти d^2z, якщо $z = \cos x\,\mathrm{tg}y$.

Розв'язування. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin x\,\mathrm{tg}\,y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x\frac{1}{\cos^2 y}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos x\,\mathrm{tg}\,y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin x\ \frac{1}{\cos^2 y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \cos x\left(\frac{2\sin y}{\cos^3 y}\right)$.

Маємо:

$$d^2z = -\cos x\,\mathrm{tg}\,y dx^2 - 2\sin x\frac{1}{\cos^2 y}dxdy + \frac{2\cos x \sin y}{\cos^3 y}dy^2.$$

2.9. Диференціювання неявної функції.

І. Функція двох змінних. Функція $f(x,\ y) = 0$ визначає одну зі змінних x або y як неявну функцію іншої змінної. Поданий вираз - це деяке рівняння, що містить x та y і всі члени якого перенесені в ліву частину. Нехай $u = f(x,\ y)$. Тоді $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$. Проте оскільки $f(x,\ y) = 0$, то $u = 0$ і $\frac{du}{dx} = 0$. Звідси

$$\frac{\partial f}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (2.18)$$

Розв'язавши рівняння (2.18) відносно $\frac{dy}{dx}$ (вважаючи, що $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ існують), знайдемо залежність

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right). \qquad (2.19)$$

Це так звана **формула диференціювання неявної функції**.

Нею подаються відносні швидкості зміни значень x щодо значень y, чим забезпечується незмінність $f(x,y)$. Геометрично це означає, що точка (x, y) рухається вздовж кривої, рівняння якої є $u = f(x, y)$, а (2.19) визначає для будь-якого моменту напрям її руху.

Для функції $x^2y^4 + \sin y = 0$ знайти $\dfrac{dy}{dx}$.

Розв'язування. Нехай

$$f(x,\ y) = x^2y^4 + \sin y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3 + \cos y.$$

З рівняння (4.26) знаходимо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^4}{4x^2y^3 + \cos y}.$$

Відомо, що змінна x, проходячи через значення $x = 3$ дм, зростає зі швидкістю 2 дм/с. З'ясуємо, з якою швидкістю має змінюватись y при $y = 1$ дм, щоб функція $2xy^2 - 3x^2y$ лишалася сталою.

Розв'язування. Нехай

$$f(x,\ y) = 2xy^2 - 3x^2y;$$

знаходимо частинні похідні цієї функції за x і за y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 3x^2.$$

Підставляючи в (2.19), маємо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2}, \quad \text{або} \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2}.$$

За умовою $x = 3$, $y = 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 2$, звідки $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{32}{15}$ (дм/с).

Знайти похідні від функцій:

1. $$\begin{aligned} &u = z^2 + y^3 + zy, \\ &z = \sin x,\ y = e^x. \end{aligned}$$

Розв'язування. $\dfrac{du}{dx} = 3e^{3x} + e^x(\sin x + \cos x) + \sin 2x.$

2. $u = \operatorname{arctg}(xy),\ y = e^x.$

Розв'язування. $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{e^x(1+x)}{1 + x^2e^{2x}}.$

3. $u = \ln(a^2 - \rho^2),\ \rho = a\sin\theta.$

Розв'язування. $\dfrac{du}{d\theta} = -2\operatorname{tg}\theta.$

4. $u = v^3 + vy,\ v = \ln s,\ y = e^s.$

Розв'язування. $\frac{du}{ds}=\frac{3v^2+y}{s}+ve^s.$

5. $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1},$

$y=a\sin x,\ z=\cos x.$

Розв'язування. $\frac{du}{dx}=e^{ax}\sin x.$

II. Функція трьох змінних. Нехай $P\ (x, y, z)$ - точка на поверхні, заданій рівнянням:

$$u=F(x,\ y,\ z)=0 \tag{2.20}$$

і, нехай,PC і AP - перерізи, що утворюються площинами, проведеними через точку P паралельно площинам $y0z$ і $x0z$ (рис. 14). Для точок кривої AP змінна y лишається сталою. Отже, згідно з (2.20) z є неявною функцією лише x, а на підставі (2.17) виконується рівність:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{2.21}$$

Геометрична інтерпретація. Формула (2.21) визначає тангенс кута нахилу кривої AP у точці P до осі $0x$.

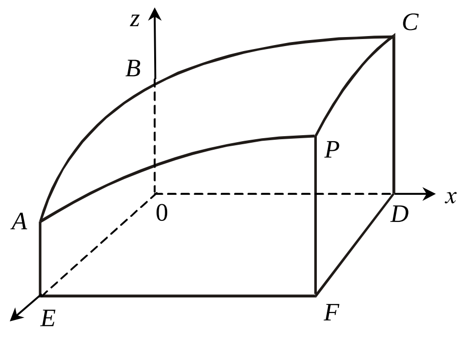


Рис. 14

У лівій її частині замість $\frac{dz}{dx}$ записано $\frac{\partial z}{\partial x}$, оскільки згідно з (2.20) змінна z була спочатку неявною функцією x і y (формулу (2.21) виведено за припущення, що величина y лишається сталою).

Аналогічно нахил кривої PC до осі $0y$ у точці P задається рівнянням:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{2.22}$$

Знайти в точці (1, 1) частинні похідні функції $u = f(x, y)$, заданої неявно: $u^3-5u^2x+uxy-5=0$.

Розв'язування. Маємо $F(x, y, u) = u^3-5u^2x+uxy-5$. З умови знайдемо значення функції u в точці (1, 1):

$$u^3 - 5u^3 + u - 5 = 0,$$
$$u^2(u-5) + u - 5 = 0,$$
$$(u-5)(u^2+1) = 0 \Rightarrow u = 5.$$

Функція $F(x, y, u)$ дорівнює 0 в точці (1, 1, 5) і неперервна в її околі, а частинні похідні цієї функції

$$F'_x = -5u^2 + uy, \quad F'_y = ux, \; F'_u = 3u^2 - 10ux + xy$$

також неперервні.

Отже, частинні похідні неявної функції можна знайти за формулами (2.21) і (2.22). Частинні похідні функції $F = (x, \; y)$ у точці (1, 1, 5) такі: $F'_x = -70$, $F'_y = 5$, $F'_u = 75 - 50 + 1 = 26$.

Тоді частинні похідні функції $u = f(x, y)$ у цій точці такі: $f'_x = \frac{70}{26}$, $f'_y = -\frac{5}{26}$.

2.10. Формула Тейлора для функції двох змінних.

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) має неперервні похідні всіх порядків до m включно. Тоді в цьому околі справджується рівність:

$$f(x;\, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0;\, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + O(\rho^m), \tag{2.23}$$

де $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Означення. Многочлен

$$P_m(x;\, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0;\, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i$$

називають *многочленом Тейлора m-го порядку* функції $f(x, y)$, а функцію

$$r_m(x,\, y) = f(x,\, y) - P_m(x,\, y) \text{ -}$$

залишковим членом m-го порядку формули Тейлора.

Формулу (2.23) називають *формулою Тейлора m-го порядку функції f(x, y) в околі точки (x_0, y_0) із залишковим членом у формулі Пеано*. Зокрема, при $x_0 = y_0 = 0$ формулу (2.23) називають *формулою Маклорена*.

Якщо функція $f(x, y)$ має в околі точки (x_0, y_0) неперервні похідні до $(m+1)$-го порядку включно, то для будь-якої точки (x, y) із цього околу знайдеться точка $(\xi, \eta) = (x_0 + \theta(x - x_0), \;\; y_0 + \theta(y - y_0))$, $0 < \theta < 1$, така що

$$f(x, y) = P_m(x, y) + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i=0}^{m+1} C_{m+1}^i \frac{\partial^{m+1} f(\xi; \eta)}{\partial x^{m+1-i} \partial y^i} (x - x_0)^{m+1-i} (y - y_0)^i, \tag{2.24}$$

де $P_m(x, y)$ - многочлен Тейлора.

Формулу (2.24) називають *формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа*. Якщо функція $f(x, y)$ подається у вигляді (2.23), (2.24), то говорять, що вона розкладена *за формулою Тейлора в околі точки (x_0, y_0).*

Для функцій трьох і більшої кількості змінних формула Тейлора виводиться аналогічно.

Наприклад, для функції $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ у точці $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ формула (2.23) набирає вигляду

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}\sum\frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}\frac{\partial^k f(x_1^0;\,x_2^0;\,...;\,x_n^0)}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}(x_1-x_1^0)^{\alpha_1}...(x_n-x_n^0)^{\alpha_n}+\mathrm{o}(\rho^m)\,,$$

де $\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_1-x_i^0)^2}$, $x_i\to x_i^0$ $i=1,2,\ldots,n$ і підсумовування виконується за всіма цілими невід'ємними α_i, такими що $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=k$.

2.11. Визначник Якобі (якобіан).

Важливим формальним засобом дослідження функцій є визначники, утворені з частинних похідних.

Нехай дано *n* функцій *n* змінних:

$$\begin{aligned} y_1&=f_1(x_1;\,x_2;\,...;\,x_n)\\ y_2&=f_2(x_1;\,x_2;\,...;\,x_n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n&=f_n(x_1;x_2;...;x_n)\end{aligned} \tag{2.25}$$

які визначені в деякій *n*-вимірній області *D* і мають у ній неперервні похідні за всіма змінними. Складемо із цих похідних визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix} \tag{2.26}$$

Визначник (2.26) називають *функціональним визначником Якобі*, або *якобіаном,* системи функцій (2.25) за ім'ям німецького математика Якобі, який уперше вивчив його властивості.

Позначають якобіан символом

$$\frac{D(y_1,\,y_2,\,..,\,y_n)}{D(x_1,\,x_2,\,...,\,x_n)}.$$

Якобіан має властивості, які подібні до властивостей звичайної похідної. Глибша аналогія між похідними та якобіанами розкривається в теорії неявних функцій, особливо коли йдеться про заміну змінних у кратних інтегралах.

3. Дослідження функцій багатьох змінних.

3.1. Поняття екстремуму функцій багатьох змінних.

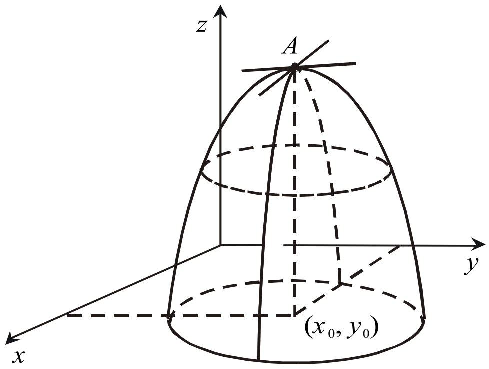
Означення. Точка $\left(x_1^0,\,x_2^0,\ldots,\,x_n^0\right)$ називається *точкою максимуму функції* $z=f\left(x_1,\;x_2,\;\ldots,\;x_n\right)$, якщо існує окіл точки $\left(x_1^0,\;x_2^0,\;\ldots,\;x_n^0\right)$, для всіх точок якого виконується нерівність

$$f\left(x_1,\;x_2,\;\ldots,\;x_n\right)\le f\left(x_1^0,\;x_2^0,\;\ldots,\;x_n^0\right).$$

Означення. Точка $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ називається *точкою мінімуму функції* $z = f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$, якщо існує окіл точки $\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$, для всіх точок якого виконується нерівність $f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right) \geq f\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$.

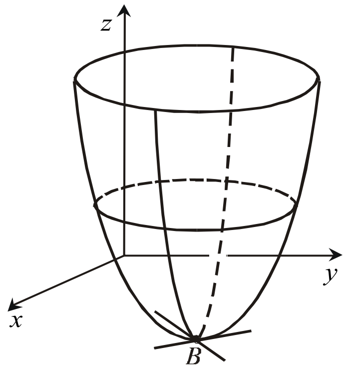
Точки максимуму і мінімуму називаються *точками екстремуму.*

Графічна інтерпретація.



Точка *A*- точка максимуму

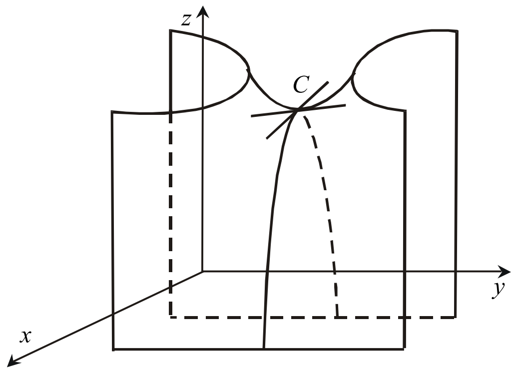
Рис. 15



Точка *B*- точка мінімуму

Рис..16

Можливий ще й такий варіант екстремальної точки: так звана *сідлова точка* (рис. 17).



Точка C - сідлова точка

Рис..17

3.2. Необхідні умови існування екстремуму.

Теорема. Для точки екстремуму $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ функції $z = f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)$ частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)$ $\left(i = 1,\ \ldots,\ n\right)$ або дорівнюють нулю, або не існують.

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi\left(x_1\right) = f\left(x_1,\ \ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ однієї змінної, визначеної умовами теореми в деякому околі точки x_1^0 дійсної осі. У точці x_1^0 функція $\varphi\left(x_1\right)$ має екстремум. Тоді, оскільки $\varphi'(x_1^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, то або $\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right) = 0$, або $\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right)$ не існує (за теоремою для функції однієї змінної).

Аналогічно доводимо випадки $i = 2,\ \ldots,\ n$.

Означення. Точки, в яких функція визначена, а її частинні похідні дорівнюють нулю або не існують, називають *критичними точками*цієї функції.

Для функції $z = |y|$ усі точки осі x є критичними, бо в кожній такій точці функція визначена, $f'_x = 0$, а f'_y не існує. Точки екстремуму функції слід шукати лише серед її критичних точок.

Вправи для самостійного розв’язування

Знайти повний диференціал функцій (1–5).

1. $\omega = x^2 y \sin z + e^y \ln z.$

2. $f(s,\ t) = \ln\left(\dfrac{s}{t} + \dfrac{t}{s}\right).$

3. $\varphi(x,\ y) = x^y + y^x.$

4. $F(u,\ v,\ \omega) = \mathrm{tg}(3u - v) + 5^{v+\omega}.$

5. $\psi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = x_2^{x_3 - x_1} \sin x_4.$

6. Показати, що правила диференціювання для функцій u і v однієї змінної

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = udv + vdu,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

виконуються, коли u і v – функції багатьох (наприклад, трьох) змінних (d- символ повного диференціала).

Знайти повний диференціал функцій (7–10).

7. $v = (x-y)(y-z)(x+z).$

8. $f(x,\ y) = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^3.$

9. $f(x,\ y,\ z) = \dfrac{4xz}{2y - 3z}.$

10. $\phi(r,\ s) = \dfrac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}.$

11. Довести, що коли f - функція однієї змінної, а φ- трьох змінних, то повний диференціал складеної функції $u = f(\varphi(x,\ y,\ z))$,подається так:

$$du = f'(\varphi(x,\ y,\ z))\, d\varphi(x,\ y,\ z).$$

Знайти повний диференціал функцій (12–15).

12. $\omega = \sin(ax + by + cz).$

13. $\psi(t,\ r,\ s) = e^{\frac{r-s}{t}}.$

14. $u = \arcsin\dfrac{x}{y}.$

15. $z = \ln\mathrm{tg}\dfrac{y}{2x}.$

16. У зрізаному конусі радіуси основ R=30 см, r=20 см, висота h=40 см. Як зміниться об’єм конуса, якщо збільшити R на 3мм, r – на 4мм, h- на 2 мм? Яку частку початкового об’єму конуса становить цей приріст до його об’єму?

17. Відомі сторони прямокутника a=10 см, b=24см. Як зміниться його діагональ, якщо сторону a збільшити на 4мм, а b зменшити на 1 мм? Знайти наближене значення зміни і порівняти з її точним значенням.

18. Центральний кут кругового сектора, що дорівнює 80°, потрібно зменшити на 15′. На скільки доведеться подовжити радіус, який дорівнює 30 см, щоб компенсувати зміну площі?

19. Щоб знайти густину ρ тіла, вимірюють його масу (у грамах) у повітрі (результат -p) та у воді (результат -q) й визначають

$$\rho = \frac{p}{p-q}.$$

Який вплив на значення ρ мають невеликі похибки, що їх припускаються під час обох зважувань?

20. Площа S трикутника за відомими стороною a і кутами B, C подається формулою

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}.$$

Як позначаться на результаті обчислення невеликі відхилення даних від істинних значень a, B і C?

21. Показати, що в результаті обчислення періоду T коливання маятника за формулою $T = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ (l- довжина маятника; g- гравітаційна стала, або прискорення сили тяжіння) відносна похибка (у відсотках) може бути оцінена з надлишком півсумою відносних похибок, з якими було взято значення l і g (за припущення, що ці похибки достатньо малі).

Знайти повну похідну складної функції (22–25).

22. Знайти $\dfrac{du}{dt}$, якщо $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$.

23. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z = uvw$, $u = x^2 + 1$, $v = e^x$, $w = \cos x$.

24. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $y = (\sin x)^{\ln x}$, $\sin x = u$, $\ln x = v$.

25. Виразити $\dfrac{dw}{dx}$ через функції φ, ψ та їх похідні, якщо $w = \varphi(x)^{\psi(x)}$.

26. Дано $z = \ln(e^x + e^y)$; знайти: 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; 2) $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $y = x^3$.

27. Дано $f(t) = \mathrm{tg}(3t + 2x^2 - y)$, де $x = \dfrac{1}{t}$; $y = \sqrt{t}$; знайти $f'(t)$.

28. Дано $\varphi(x) = \arcsin\dfrac{x}{z}$, де $z = \sqrt{x^2+1}$; знайти $\varphi'(x)$.

29. Радіус r основи конуса зростає рівномірно зі швидкістю 2см/с; висота h- зі швидкістю 3см/с. З якою швидкістю зростають: 1) об'єм V, 2) повна поверхня S конуса в момент, коли r = 20 см, h = 12 см?

30. Дано $u = F(r)$, де r- відстань точки $M(x,\ y,\ z)$ від початку прямокутної системи координат. Якщо точка M рухається і має в момент t швидкість, складові якої за осями координат v_x, v_y і v_z, то яка в цей момент швидкість зміни величини u?

Знайти частинні похідні даних функцій (31–34).

31. $\dfrac{\partial z}{\partial u}$; $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 \ln y$, де $x = \dfrac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

32. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = F(x^2 - y^2,\ e^{xy})$.

33. $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$; $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$; $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$, якщо $\varphi(t,\ r,\ s)=F\left(\sqrt{t-r},\ \sin 2t,\ \frac{t}{r-s}\right)$.

34. $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial z}$, якщо $f(x,\ y,\ z)=\Phi\left(x,\ x^2yz^3,\ \frac{x}{z}\right)$.

35. Дано $u=\sin\varphi+F(\sin\psi-\sin\varphi)$. Довести, що $\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial\psi}+\cos\psi\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\cos\varphi\cos\psi$ для довільної функції *F*.

36. Дано $z=\frac{y}{f\left(x^2-y^2\right)}$. Довести, що $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ для довільної функції *f*.

Перевірити, чи правильно знайдені повні диференціали функцій (37-47).

Відповіді:

37. $u=by^2x+cx^2+gv^3+ex$. $\quad du=\left(by^2+2cx+e\right)dx+\left(2byx+3gy^2\right)dy.$

38. $u=\ln x^y$. $\quad du=\frac{y}{x}dx+\ln x dy.$

39. $u=y^{\sin x}$. $\quad du=y^{\sin x}\ln y\cos x dx+\frac{\sin x}{y^{1-\sin x}}dy.$

40. $u=x^{\ln y}$. $\quad du=u\left(\frac{\ln y}{x}x+\frac{\ln x}{y}dy\right).$

41. $u=\frac{s+t}{s-t}$. $\quad du=\frac{2(sdt-tds)}{(s-t)^2}.$

42. $u=\sin(pq)$. $\quad du=\cos(pq)[qdp+pdq].$

43. $u=x^{yz}$. $\quad du=x^{zy-1}(yzdx+zx\ln xdy+xy\ln xdz).$

44. $u=\mathrm{tg}^2\varphi\,\mathrm{tg}^2\theta\,\mathrm{tg}^2\psi$. $\quad du=4u\left(\frac{d\varphi}{\sin 2\varphi}+\frac{d\theta}{\sin 2\theta}+\frac{d\psi}{\sin 2\psi}\right).$

45. $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$. $\quad du=\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dz.$

46. $u=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}+\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$. $\quad du=0.$

47. $u=\arcsin\frac{x}{y}$. $\quad du=\frac{ydx-xdy}{y\sqrt{y^2-x^2}}.$

48. Рівняння $V_p=RT$характеризує ідеальний газ (*V*- об'єм газу; *p* - тиск; *T*- абсолютна температура; *R*- деяка стала). Знайти співвідношення між диференціалами *dV*, *dp* і *dT*.

Відповідь. $Vdp+pdV=RdT$.

49. Скориставшись результатом задачі 48, знайти, як змінюється *p* за таких умов: $t=300$ °С, $p=1000$ кг/м^2, $V=14{,}4$ м^3,коли відомо, що під час зміни *t* до 301 °С і *V* до 14,5 м^3 значення *p* змінюється рівномірно.

Відповідь. –3,25 кг/м^2.

50. Сторона трикутника завдовжки 2,4 м зростає зі швидкістю 10см/с, а друга його сторона завдовжки 1,5м зменшується зі швидкістю 5см/с. Кут між цими сторонами становить 60° і зростає зі швидкістю 2 /с. Як змінюється площа трикутника?

Відповідь. Зростає зі швидкістю 443 см^2/с.

51. Як змінюється третя сторона трикутника, заданого умовами попередньої задачі?

Відповідь. Зростає зі швидкістю 12,32 см/с.

52. Сторона прямокутника завдовжки 25 см зростає зі швидкістю 5см/с. Друга його сторона завдовжки 37,5см зменшується зі швидкістю 2,5см/с. Як змінюється площа прямокутника наприкінці другої секунди?

Відповідь. Зростає зі швидкістю 74,82см^2/с.

53. Ребра прямокутного паралелепіпеда завдовжки 7,5, 10 і 12,5см зростають з однаковою швидкістю 0,5см/с. Як змінюється об'єм паралелепіпеда?

54. Повітряний змій переміщується горизонтально зі швидкістю 0,6м/с і піднімається вертикально вгору зі швидкістю 1,5м/с. З якою швидкістю розкручується мотузка, що його утримує?

Відповідь. 1,61 м/с.

55. Людина, яка стоїть на пристані, притягує човен за мотузку зі швидкістю 0,6 м/с. Руки її перебувають на висоті 1,8 м над носом човна. З якою швидкістю рухається човен у момент, коли відстань його від пристані дорівнює 2,4 м?

Відповідь. 0,75 м/с.

56. Об'єм і радіус циліндричного котла зростають відповідно зі швидкістю 27дм^3/хв і 0,003 дм/хв. Як змінюється довжина котла в момент, коли об'єм його становить 1,18 м^3, а радіус - 0,6 м?

Відповідь. 0,234 дм/хв.

57. Вода з конічного фільтра, висота якого 20см, а діаметр основи 15см, витікає зі швидкістю 0,0125 см^3/год. З якою швидкістю зменшується площа поверхні води, коли рівень води знижується на 10см?

58. Нехай x і y- координати деякої точки у прямокутній системі координат, а r і θ- полярні координати цієї точки. Довести, що

$$xdy - ydx = r^2 d\theta^2; \qquad dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

59. Закритий ящик, довжина якого 10, ширина 8 і висота 7см, зроблений із дощечок завтовшки $\frac{1}{2}$ см. Визначити наближено об'єм затраченого на ящик матеріалу.

Відповідь. 206 см^3.

60. Прискорення g обчислено за формулою $s = \frac{1}{2} g t^2$.Знайти похибку такого результату залежно від невеликих похибок, яких припустилися, вимірюючи s і t.

Відповідь. Абсолютна похибка $dg = \dfrac{2ds - 2gtdt}{t^2}$.

Знайти $\frac{dy}{dx}$ за відповідною формулою (61–65).

Відповіді:

61. $\left(x^2+y^2\right)^2-a^2\left(x^2-y^2\right)=0.$ $\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\cdot\frac{2\left(x^2+y^2\right)-a^2}{2\left(x^2+y^2\right)+a^2}.$

62. $e^y-e^x+xy=0.$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$

63. $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0.$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y\left(\cos(xy)-e^{xy}-2x\right)}{x\left(x+e^{xy}-\cos(xy)\right)}.$

64. $\sin x\sin y+\cos x\cos y-y=0.$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x-y)}{\sin(x-y)-1}.$

65. $y^x=x^y.$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{xy^{x-1}-x^y\ln x}.$

66. $f(x,\ y)-f(y,\ x)=0$. Показати, що похідна може бути виражена дробом, чисельник якого утворюється зі знаменника переставленням x і y.

67. Показати, що виконується рівність $\frac{1}{2}dv^2=x''dx+y''dy+z''dz,$ де $v=\frac{ds}{dt}$.

68. Знайти $\frac{du}{dx}$, якщо $u=ax^3-ab^2x+a^2b^2$, де a і b- сталі.

Відповідь. $\frac{du}{dx}=3ax^2-ab^2$.

69. Знайти $\frac{\partial u}{\partial x}$, якщо $u=yx^3-yz^2x+y^2z^2$. Порівняти з попередньою задачею.

Відповідь. $\frac{\partial u}{\partial x}=3yx^2-yz^2$.

Знайти зазначені частинні похідні даних функцій (70–81).

70. $z=2x^4+5x^3y-x^2y^2+4xy^3-y^4$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$.

71. $\omega=xyz$; $\frac{\partial w}{\partial x}$; $\frac{\partial w}{\partial y}$; $\frac{\partial w}{\partial z}$.

72. $f(x,\ y)=\left(5x^2y-y^3+7\right)^3$; $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$.

73. $\varphi(t,\ s)=t\sqrt{s}+\frac{s}{\sqrt[3]{t}}$; $\varphi'_t(t,\ s)$; $\varphi'_s(t,\ s)$.

74. $s=y(x-2)^3+y^2-y^3$; $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_{x=3,\ y=2}$.

75. $F(x,\ y,\ z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$; $F'_y(x,\ y,\ z)$; $F'_y(2,\ 1,\ 4)$.

76. $\psi(x,\ y)=\sqrt{ax^2-by^2}$; $\psi'_1(x,\ y)$; $\psi'_2(x,\ y)$.

77. $f(x,\ y,\ z)=\ln(5x-3y+4z);\ f_1'(1,\ 0,\ 2);\ f_2'(1,\ 0,\ 2);\ f_3'(1,\ 0,\ 2)$.

78. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sin ax+\cos^2 by\right)$ і $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sin ax+\cos^2 by\right)$.

79. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ;\ \dfrac{\partial r}{\partial x};\ \dfrac{\partial r}{\partial y}\left(\dfrac{1}{r}\right)$.

80. $v=\ln\left(t+\sqrt{t^2+s^2}\right);\ \dfrac{\partial v}{\partial t};\ \dfrac{\partial v}{\partial s}$.

81. $\varphi(x,\ y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y};\ \varphi_x'(x,\ y);\ \varphi_y'(x,\ y)$.

Дано функцію. Перевірити наведені далі рівності для її частинних похідних (82–93).

82. $u=\sqrt{xy+\dfrac{ax}{y}}$; $\qquad u\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=xy.$

83. $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$; $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1.$

84. $z=e^t\left(\dfrac{s^2}{2t^2}+\ln t\right)$; $\qquad \left(\dfrac{s}{t}-\dfrac{t}{s}\right)\dfrac{\partial z}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial t}=z.$

85. $\omega=\dfrac{x-y}{z-t}+\dfrac{t-x}{y-z}$; $\qquad \dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

86. $u=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$; $\qquad x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\dfrac{\partial u}{\partial x}.$

87. $u=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{3}}$; $\qquad 3x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+3y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

88. $u=y^2z^2e^{\frac{x}{2}}+z^2x^2e^{\frac{y}{2}}+x^2y^2e^{\frac{z}{2}}$; $\qquad \dfrac{\partial^6 y}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}=e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{y}{2}}+e^{\frac{z}{2}}.$

89. $u=\operatorname{tg}(y+ax)+(y-ax)^{\frac{3}{2}}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

90. $u=x^\alpha y^\beta z^\gamma$; $\qquad \dfrac{\partial^6 u}{\partial y\partial x^3\partial z^2}=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)\alpha\beta\gamma x^{\alpha-2}y^{\beta-1}z^{\gamma-2}.$

91. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$ і

$$\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}.$$

92. $v=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0.$

93. $f(x,\ y,\ z)=\varphi(r)$, де $r=\sqrt{x^2+y^2+r^2}$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2}{r}\varphi'(r)+\varphi''(r).$$

94. Дано рівняння $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + y^2$. Знайти його розв’язок $u(x;\ y)$, що задовольняє умову $u(x,\ x^2) = 0$.

95. Знайти похідну функції *f* за напрямком вектора ***l*** у точці *M*.

1) $f = 3x^2 + 5y^2$, $\mathbf{l} = (-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$, $M(1;\ 1)$;

2) $f = x\sin(x + y)$, $\mathbf{l} = (-1;\ 0)$, $M(\pi/4;\ \pi/4)$;

3) $f = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$, $\mathbf{l} = (2/3;\ 2/3;\ 1/3)$, $M(3;\ 3;\ 1)$;

4) $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\mathbf{l} = (-1/3;\ 2/3;\ 2/3)$, $M(1;\ 2;\ 1)$;

5) $f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$, $\mathbf{l} = (2/3;\ 1/3;\ 0;\ -2/3)$, $M(1;\ 3;\ 2;\ 1)$.

6) $f = \sum_{k=1}^{n} \arcsin x_k$, $\mathbf{l} = (1/\sqrt{n};\ 1/\sqrt{n};\ \ldots;\ 1/\sqrt{n})$, $M(1/4;\ 1/4;\ \ldots;\ 1/4)$.

96. Знайти градієнт функції *f* у точці *M*.

1) $f = 1 + x^2y^3$, $M(-1;\ 1)$;

2) $f = yx^y$, $M(2;\ 1)$;

3) $f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $M(1;\ 2;\ 3)$;

4) $f = \mathrm{arctg}(xy/z^2)$, $M(0;\ 1;\ 2)$;

5) $f = e^{x+xy+xyz}$, $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$;

6) $f = \ln(1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)$, $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 < 1$.

97. Знайти похідну функції *f* у точці M_0 за напрямом вектора $\overline{M_0M}$.

1) $f = 5x + 10x^2y + y^5$, $M_0(1;\ 2)$, $M(5;\ -1)$;

2) $f = xy^2z^3$, $M_0(3;\ 2;\ 1)$, $M(7;\ 5;\ 1)$;

3) $f = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $M_0(1;\ 1;\ 1)$, $M(1;\ 5;\ 4)$;

4) $f = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, $M_0(0;\ 1;\ 1;\ 0)$, $M(3;\ 2;\ 1;\ 0)$.

98. Знайти похідну функції *f* у точці *M* за даним напрямом.

1) $f = 3x^4 + y^3 + xy$, $M(1;\ 2)$, за напрямом променя, що утворює з віссю *x* кут 135°;

2) $f = \mathrm{arctg}(y/x)$, $M(1/2;\ \sqrt{3}/2)$, за напрямом зовнішньої нормалі до кола $x^2 + y^2 = 2x$ у точці *M*;

3) $f = x^2 - 3yz + 4$, $M = (1;\ 2;\ -1)$, за напрямом променя, що утворює однакові кути з усіма координатними осями;

4) $f = \ln(e^x + e^y + e^z)$, $M(0;\ 0;\ 0)$, за напрямом променя, що утворює з осями координат *x*, *y*, *z* кути, які дорівнюють $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/3$;

5) $f = \mathrm{tg}\, xz$, $M(\pi/4;\ \pi/4;\ 1)$, за напрямом градієнта функції $f_1 = \sin yz$ у точці *M*;

6) $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$, за напрямом градієнта функції *f* у точці *M*.

99. Знайти найбільше значення $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ у точці M.

1) $f = xy^2 - 3x^4y^5$, $M(1;\ 1)$;

2) $f = \dfrac{x+\sqrt{y}}{y}$, $M(2;\ 1)$;

3) $f = \ln xyz$, $M(1;\ -2;\ -3)$;

4) $f = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + 2z + \operatorname{ctg} z$, $M(\pi/4;\ \pi/3;\ \pi/2)$.

100. Знайти одиничний вектор **l**, за напрямом якого $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ у точці M досягає найбільшого значення.

1) $f = x^2 - xy + y^2$, $M(-1;\ 2)$;

2) $f = x - 3y + \sqrt{3xy}$, $M(3;\ 1)$;

3) $f = \arcsin xy + \arccos yz$, $M(1;\ 0{,}5;\ 0)$;

4) $f = xz^y$, $M(-3;\ 2;\ 1)$.

101. Знайти кут між градієнтами функції f у точках A і B.

1) $f = \ln|y/x|$, $A(1/2;\ 1/4)$, $B(1;\ -1)$;

2) $f = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$, $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 4)$;

3) $f = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $A(1;\ 2;\ 2)$, $B(-3;\ 1;\ 0)$;

4) $f = \sin(x^2+y^2-z^2)$, $A(a;\ -2a;\ a)$, $B(b;\ b;\ b)$, $a^2+b^2 \neq 0$.

102. Довести, що кут між градієнтами функцій $f_1 = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $f_2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4x + 5y + 6z$ у точці $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ прямує до нуля, якщо ця точка віддаляється в нескінченність.

103. Знайти в зазначеній точці частинні похідні функції $u(x;\ y)$, заданої неявно рівнянням.

1) $u^3 + 3xyu + 1 = 0$, $(0;\ 1)$;

2) $e^u - xyu - 2 = 0$, $(1;\ 0)$;

3) $u + \ln(x+y+u) = 0$, $(1;\ -1)$;

4) $\dfrac{u}{\sqrt{x^2-y^2}} - \operatorname{arctg}\dfrac{u}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1 = 0$, $(5;\ 4)$.

104. Знайти в зазначеній точці диференціал функції $u(x,\ y)$, заданої неявно рівнянням.

1) $x + y - u = e^{u-x-y}$, $(x_0,\ y_0)$; **2)** $x - u = u\ln(u/y)$, $(1;\ 1)$.

105. Знайти du в точці $(x,\ y)$, якщо $u = \dfrac{x+z(x,\ y)}{y+z(x,\ y)}$, $z(x,\ y)$- функція, задана неявно рівнянням $ze^z = xe^x + ye^y$.

106. Функція $z(x;\ y)$ визначається рівнянням $f(x-y,\ y-z,\ z-x) = 0$,де $f(u,\ v,\ w)$ – диференційовна функція. Знайти $dz(x,\ y)$.

107. Знайти частинні похідні другого порядку функції $f(x,\ y)$.

1) $f = xy(x^3 + y^3 - 3)$; **2)** $f = e^{xy}$;

3) $f = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; **4)** $f = x^y$.

108. Обчислити частинні похідні другого порядку функції $f(x,\ y)$ у заданій точці.

1) $f = \dfrac{x}{x+y}$, $(1;\ 0)$; **2)** $f = y^2(1-e^x)$, $(0;\ 1)$;

3) $f = \ln(x^2 + y)$, $(0;\ 1)$; **4)** $f = y\sin(y/x)$, $(2;\ \pi)$;

5) $f = \cos(xy - \cos y)$, $(0;\ \pi/2)$; **6)** $f = \operatorname{arctg}(x/y)$, $(1;\ 1)$;

7) $f = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(1;\ -1)$; **8)** $f = (xy)^{x+y}$, $(1;\ 1)$.

109. Знайти частинні похідні другого порядку функції $f(x,\ y,\ z)$.

1) $f = x(1 + y^2z^3)$.

2) $f = \sin(x + y + z)$.

110. Знайти частинну похідну $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$.

1) $f = \sqrt{xy^3z^5}$. **2)** $f = x^3\sin y + y^3\sin z + z^3\sin x$.

3) $f = e^{xyz}$. **4)** $f = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$.

111. Знайти частинну похідну $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3\partial x_4}$ функції $f = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2}}$.

112. Знайти другий диференціал функції $f(x,\ y)$.

1) $f = x(1+y)$; **2)** $f = x\sin^2 y$;

3) $f = \dfrac{1}{y}e^{xy}$; **4)** $f = y\ln x$;

5) $f = \ln(x^2 + y^2)$; **6)** $f = \arcsin xy$.

113. Знайти $d^3 f$.

1) $f = x^2y$; **2)** $f = x^3 + y^3 + 3xy(y - x)$.

3) $f = \sin(x^2 + y^2)$. **4)** $f = xyz$.

114. Знайти $d^4 f$.

1) $f = \cos(x + y)$; **2)** $f = \ln(x^x y^y z^z)$.

115. Нехай f – двічі диференційовна функція. Знайти другий диференціал функції φ.

1) $\varphi(x,\ y) = f(u)$, $u = x + y$;

2) $\varphi(x,\ y) = f(u)$, $u = \sqrt{x^2 + y^2}$;

3) $\varphi(x,\ y,\ z) = f(u)$, $u = xyz$;

4) $\varphi(x,\ y) = f(u, v,\ w)$, $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$, $w = 2xy$.

116.

1) Нехай f і g – двічі диференційовні функції. Довести, що функція $u(x,\ y)=f(x)+g(y)$ задовольняє рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0;$

2) знайти функцію $u(x;\ y)$, що задовольняє задані умови.

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$, $\dfrac{\partial u(x,\ x)}{\partial x}=x^2$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=x+y$, $u(x,\ 0)=\sin x$, $u(0,\ y)=0$.

117. Знайти другий диференціал функції $u(x,\ y)$, заданої неявно рівнянням.

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{u^2}{c^2}=1;$ **2)** $x+y+u=e^u$;

3) $u=\ln(yu-x);$ **4)** $\dfrac{u}{\sqrt{x^2-y^2}}=\operatorname{tg}\dfrac{u}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

118. Перетворити рівняння до полярних координат, узявши $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

2) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

3) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

119. Перетворити рівняння, узявши за нові незалежні змінні u, v, t.

1) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}+4\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$,

$u=x$, $2v=x+y+z$, $2t=3x+y-z$;

2) $4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$,

$u=\dfrac{x}{2}$, $v=\dfrac{x}{2}+y$, $t=-\dfrac{x}{2}-y+z$.

120. Перетворити рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ до сферичних координат, узявши $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=rin\psi$.

121. Розкласти за формулою Тейлора функцію $f(x,\ y)$ в околі заданої точки.

1) $f(x,\ y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$, $(-2;\ 1)$;

2) $f(x,\ y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y$, $(1;\ -2)$;

3) $f(x,\ y)=x^3-2y^3+3xy$, $(1;\ 2)$;

4) $f(x,\ y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y$, $(2;\ -1)$.

122. Розкласти за формулою Маклорена до $o(\rho^2)$, де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, функцію f.

1) $f(x,\ y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$; **2)** $f(x,\ y) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1+y}$;

3) $f(x,\ y) = \sqrt{\dfrac{(1+x)^{\alpha} + (1+y)^{\beta}}{2}}$, $\alpha,\ \beta \in R$.

Знайти другий диференціал функції *u*(*x, y*), заданої явно (123–128).

123.

1) $u = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$; **2)** $u = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$;

3) $u = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$; **4)** $u = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1$.

124.

1) $u = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$; **2)** $u = 3x^2 y + y^3 - 12x - 15y + 3$;

3) $u = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$; **4)** $u = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1$;

5) $u = x^3 + y^3 + 3axy$.

125.

1) $u = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$; **2)** $u = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$, $x > -1,\ y > -1$;

3) $u = 1 + x^2 + \sqrt[3]{(y+2)^2}$; **4)** $u = 1 + y^2 - \sqrt[5]{(x-2)^4}$;

5) $u = xy\sqrt{12 - 4x^2 - y^2}$; **6)** $u = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

126.

1) $u = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $x \in (0;\ \pi/2)$, $y \in (0;\ \pi/2)$;

2) $u = \sin x \sin y \sin(x + y)$, $x \in (0;\ \pi)$, $y \in (0;\ \pi)$;

3) $u = x + y + 4\sin x \sin y$;

4) $u = (1 + e^y)\cos x - ye^y$.

127.

1) $u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$; **2)** $u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$;

3) $u = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$; **4)** $u = x^3 + y^3 + z^2 + 6xy - 4z$;

5) $u = xyz(16 - x - y - 2z)$; **6)** $u = xy^2 z^3 (49 - x - 2y - 3z)$.

128.

1) $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$, $x,\ y,\ z \in (0;\ \pi)$;

2) $u = (x + 7z)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$;

3) $u = 2\ln x + 3\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

129. Дослідити на строгий екстремум неперервну диференційовну функцію $u = u(x,\ y)$, яка неявно задана рівнянням.

1) $x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0$;

2) $2x^2 + 2y^2 + u^2 + 8yu - u + 8 = 0$;

3) $x^3 - y^3 + u^2 - 3x + 4y + u - 8 = 0$;

4) $\left(x^2+y^2\right)^2+u^4-8\left(x^2+y^2\right)-10u^2+16=0.$

130. Знайти умовні екстремуми функції $u=f(x,\ y)$ відносно заданого рівняння зв'язку.

1) $u=xy,\ x+y-1=0;$ **2)** $u=x^2+y^2,\ 3x+2y-6=0;$

3) $u=x^2-y^2,\ 2x-y-3=0;$ **4)** $u=xy^2,\ x+2y-1=0;$

5) $u=\cos^2 x+\cos^2 y,\ x-y-\pi/4=0.$

131. Дослідити функцію $u=f(x,\ y)$ на умовний екстремум, якщо задано рівняння зв'язку (з'ясувати, чи застосовний тут метод Лагранжа).

1) $u=(x-1)^2+(y+1)^2;$

а) $x^2+y^2-2xy=0;$ **б)** $x-y=0;$

2) $u=x^4+y^4,\ (x-1)^3-y^2=0.$

Знайти умовні екстремуми функції $u=f(x,\ y,\ z)$, **якщо задано рівняння зв'язку (132-134**).

132.

1) $u=2x^2+3y^2+4z^2,\ x+y+z=13;$

2) $u=xy^2z^3,\ x+y+z=12,\ x>0,\ y=0,\ z>0;$

3) $u=x^2y^3z^4,\ 2x+3y+4z=8,\ x>0,\ y>0,\ z>0;$

4) $u=\sin x\sin y\sin z,\ x+y+z=\pi/2,\ x>0,\ y>0,\ z>0;$

5) $u=x-2y+2z,\ x^2+y^2+z^2=9;$

6) $u=x-y+2z,\ x^2+y^2+2z^2=16;$

7) $u=xyz,\ x^2+y^2+z^2=3;$

8) $u=xy+2xz+2yz,\ xyz=108;$

9) $u=x^2+y^2+z^2,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ a>b>c>0;$

10) $u=x+y+z,\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1,\ a>0,\ b>0,\ c>0.$

133.

1) $u=xy+x+y,\ -2\le x\le 2,\ -2\le y\le 4;$

2) $u=x^2-xy+y,\ |x|\le 2,\ |y|\le 3;$

3) $u=x^2+y^2-4x,\ -2\le x\le 1,\ -1\le y\le 3;$

4) $u=x^3+y^3-3xy,\ 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 2;$

5) $u=x^3+8y^3-6xy+1,\ 0\le x\le 2,\ |y|\le 1;$

6) $u=x+|x-y|,\ |x|\le 1,\ |y|\le 2;$

7) $u=x^2-xy+y^2,\ |x|+|y|\le 1;$

8) $u=(x+y)e^{xy},\ -2\le x+y\le 1.$

134.

1) $u = 1 + x + 2y$, $x + y \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

2) $u = x + 3y$, $x + y \le 6$, $x + 4y \ge 4$, $y \le 2$;

3) $u = x^2 - 2y + 3$, $y - x \le 1$, $x \le 0$, $y \ge 0$;

4) $u = x^2 + y^2 - xy - x - y$, $x + y \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

5) $u = xy(6 - x - y)$, $x + y \le 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

6) $u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$, $x + y \le 2\pi$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

135. Знайти найбільше M і найменше m значення функції u.

1) $u = (xy - 1)^2 + y^2$; **2)** $u = |x + y| - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

3) $u = (2x^2 + y^2)e^{1 - x^2 - y^2}$; **4)** $u = (x^2 + y^2 + z^2)e^{-(x^2 + 2y^2 + 3z^2)}$.

136. Знайти рівняння дотичної до еліпсоїда $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ площини і рівняння його нормалі в точці, де $x = 2$, $y = 1$, а z додатне.

137. Знайти рівняння нормалі до однопорожнинного гіперболоїда $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ у точці $(2,\ 2,\ 3)$.

138. Знайти рівняння площини, дотичної до двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

у точці $(x_1,\ y_1,\ z_1)$.

139. Знайти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до поверхні в зазначеній точці.

1) $2x^2 + 4y^2 - z = 0$; $(2,\ 1,\ 12)$; **2)** $3x^2 + y^2 - 2z = 0$; $x = 1$, $y = 1$;

3) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$; $(1,\ 2,\ -1)$; **4)** $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$; $x = 2$, $y = 1$;

5) $x^2 + y^2 + z^2 = 11$; $(3,\ 1,\ 1)$; **6)** $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$; $y = 1$, $z = 1$.

140. Знайти обвідну сім'ї прямих $y = 2mx + m^4$, де m- змінний параметр.

Відповідь. $x = -2m^3$, $y = -3m^4$; або $16y^3 + 27x^4 = 0$.

141. Знайти обвідну сім'ї парабол $y^2 = a(x - a)$, де a- змінний параметр.

Відповідь. $x = 2a$, $y = \pm a$; або $y = \pm\frac{1}{2}x$.

142. Знайти обвідну сім'ї кіл $x^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, де β- змінний параметр.

Відповідь. $x = \pm r$.

143. Знайти обвідну сім'ї кіл, діаметрами яких є подвійні ординати еліпса

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Відповідь. Еліпс $\dfrac{x^2}{a^2 + b^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

144. Круг рухається так, що центр його постійно міститься на параболі $y^2 = 4ax$, відповідне коло проходить через вершину параболи. Знайти рівняння обвідної утвореної сім'ї кривих.

145. Знайти обвідну сім'ї, що складається з усіх кіл, центри яких містяться на осі x, а радіуси однакові й дорівнюють R.