

УДК 614.8

№ держреєстрації 0120U000004

Інв. № \_\_\_\_\_

Державна служба України з надзвичайних ситуацій  
Національний університет цивільного захисту України  
61023, м. Харків, вул. Чернишевська, 94, тел. (057) 707-34-20

ЗАТВЕРДЖУЮ

Ректор НУЦЗ України,

доктор наук з державного управління,  
професор

Володимир САДКОВИЙ

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ КІЛЬКІСНОГО СКЛАДУ ТА ДОВЖИНИ ШЛЕЙФІВ  
СИСТЕМ ПОЖЕЖНОЇ СИГНАЛІЗАЦІЇ НА ЕТАПІ ПРОЕКТУВАННЯ

Керівник НДР

Доцент кафедри автоматичних систем безпеки

та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент

Олександр ДЕРЕВ'ЯНКО

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

2022

Рукопис закінчено 20 червня 2022 р.

Результати роботи розглянуто

Вченою радою НУЦЗ України, протокол

№ \_\_ від «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

## СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР

доцент кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент

Олександр ДЕРЕВ'ЯНКО

(вступ, розділи 1, 2, 3, 4)

20.06.22

Відповідальний виконавець

викладач кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент

Олексій АНТОШКІН

(розділи 3, 4, 5)

20.06.22

Виконавці:

доцент кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент

Михайло МУРІН

(розділи 1, 2)

20.06.22

доцент кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент

Сергій БОНДАРЕНКО

(розділи 1, 2)

20.06.22

доцент кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій

кандидат технічних наук, доцент

Вячеслав ДУРЄЄВ

(розділи 2, 3)

20.06.22

доцент кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій  
доктор технічних наук, доцент

Олександр ЛИТВЯК  
(розділи 1, 2, 4)  
20.06.22

заступник начальника кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій  
кандидат технічних наук, доцент

Валерій ХРИСТИЧ  
(розділи 1, 2, 5)  
20.06.22

доцент кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій  
кандидат технічних наук, доцент

Мурат МАЛЯРОВ  
(розділи 3, 5)  
20.06.22

викладач кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій

Любов ГУСЕВА  
(розділи 2, 5)  
20.06.22

викладач кафедри автоматичних систем безпеки  
та інформаційних технологій

Олена ПАНІНА  
(розділи 5)  
20.06.22

## РЕФЕРАТ

Звіт про НДР : 152 с., 1 табл., 57 рис., 1 дод., 249 джерел.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ОПТИМІЗАЦІЙНА ЗАДАЧА ПОКРИТТЯ, РОЗМІЩЕННЯ ПОЖЕЖНИХ СПОВІЩУВАЧІВ, ТРАСУВАННЯ ШЛЕЙФІВ.

**Об'єкт дослідження** – процес математичного моделювання та оптимізації складу та довжини шлейфів систем пожежної сигналізації.

**Предмет дослідження** - математичні моделі і методи оптимізації покриття приміщень довільної форми зонами контролю пожежних сповіщувачів та довжини шлейфів з урахуванням технологічних обмежень.

**Методи дослідження** базуються на використанні елементів функціонального аналізу для моделювання сенсорних зон пожежних сповіщувачів; методу  $\phi$ -функцій для формалізації відношень між геометричними об'єктами в задачах покриття; аналітичної геометрії для формалізації критерію покриття та побудови функцій належності; методів геометричного проектування для побудови математичних моделей оптимізаційних задач кругового покриття і методів нелінійної та недиференційованої оптимізації для їх розв'язання..

Результати науково-дослідної роботи представлені у вигляді:

- функцій опису відношень покриття між колами рівного радіуса та функцій належності для опису відношень між колами, що беруть участь в покритті, і довільною областю покриття при проектуванні шлейфів пожежної сигналізації;

- узагальненої математичної моделі оптимізаційної задачі покриття, удосконаленої стратегії розв'язання оптимізаційної задачі покриття області довільної форми колами рівного радіуса шляхом додання нового етапу генерації системи обмежень та функції цілі;

- засобів математичного моделювання зон контролю пожежних сповіщувачів в системах пожежної сигналізації для перетворювання фізичної

інформації про зони контролю сповіщувачів в геометричну для подальшого використання в процесі побудови математичних моделей задач покриття.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробці й реалізації комплексу програм для розв'язання оптимізаційної задачі покриття області довільної просторової форми колами рівного радіуса, центри яких зв'язані мережею (у тому числі з урахуванням похибок вихідних даних) та ряду практичних задач, серед яких коригування неприпустимих покриттів, мінімізація радіуса покривних кіл, оптимізація якості покриттів та ін. Створений програмний комплекс «Веста» може бути безпосередньо застосований під час проектування систем пожежної сигналізації, проведенні експертизи проектів для оцінки запропонованих проектних рішень.

Обчислювальні експерименти, що проведені в роботі, переконливо підтвердили конструктивність розроблених математичних інструментів моделювання та показали адекватність побудованої математичної моделі та ефективність запропонованих алгоритмів та методів.

## ПЕРЕДМОВА

Проведені дослідження за темою НДР «МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ КІЛЬКІСНОГО СКЛАДУ ТА ДОВЖИНИ ШЛЕЙФІВ СИСТЕМ ПОЖЕЖНОЇ СИГНАЛІЗАЦІЇ НА ЕТАПІ ПРОЕКТУВАННЯ»

Замовник – НУЦЗУ

Виконавець – кафедра автоматичних систем безпеки та інформаційних технологій НУЦЗ України

Термін початку роботи – січень 2020 року, термін закінчення роботи – грудень 2022 року.

Підставою для виконання є програма НДР.

Звіт розглянуто та схвалено на засіданні кафедри «Автоматичних систем безпеки та інформаційних технологій», протокол № 21 від 20.06.2022 р.

Звіт затверджено на засіданні вченої ради НУЦЗ України, протокол № від 2022 р.

## ЗМІСТ

Вступ .....	9
РОЗДІЛ 1 Огляд літератури й вибір напрямів досліджень .....	12
1.1 Опис предметної області .....	12
1.2 Аналіз літературних даних і постановка задачі .....	18
Висновки по розділу 1 .....	32
РОЗДІЛ 2 Формалізація відношень між об'єктами для задачі покриття довільної області сенсорними зонами датчиків .....	34
2.1 Моделювання сенсорної зони датчика .....	34
2.2 Формалізація умов розміщення датчиків .....	37
2.2.1 Основні визначення й властивості $\phi$ -функцій .....	39
2.2.2 Моделювання геометричних відношень між сенсорами й областями заборони .....	42
2.2.2.1 Допоміжні $\phi$ -функції для кола .....	42
2.2.2.2 $\Phi$ -функції для кола й базових об'єктів .....	43
2.2.3 Моделювання геометричних відношень між сенсорами й областю покриття .....	46
2.3 Моделювання відношень покриття .....	46
2.4 Функції належності .....	55
Висновки по розділу 2 .....	57
РОЗДІЛ 3 Математична модель задачі покриття та метод її розв'язання .....	59
3.1 Побудова математичної моделі .....	59
3.1.1 Моделювання задачі оптимізації довжини провідної мережі .....	62
3.1.2 Моделювання задачі мінімізації радіуса покривних кіл .....	63
3.1.3 Моделювання задачі мінімізації кількості кіл, що покриваються .....	64
3.1.4 Моделювання задачі коригування неприпустимого розміщення сенсорів .....	65
3.1.5 Моделювання задачі оптимізації щільності покриття .....	66

3.2 Дослідження властивостей побудованої моделі .....	67
3.3. Метод розв'язання задачі .....	69
3.4 Засоби оптимізації .....	75
Висновки по розділу 3 .....	78
РОЗДІЛ 4 Побудова стартової точки з області припустимих розв'язків .....	80
4.1 Розв'язання задачі нерегулярного покриття області довільної просторової форми .....	80
4.2 Розв'язання задачі регулярного покриття прямокутної області ...	89
Висновки по розділу 4 .....	98
РОЗДІЛ 5 Розв'язання задач сенсорного дротового покриття складних областей з використанням програмного комплексу «Веста» .....	99
5.1 Програмний комплекс «Веста» .....	99
5. 2 Результати обчислювальних експериментів .....	104
5.2.1 Оцінка адекватності отриманих результатів і ефективності використання модуля нерегулярного розміщення пожежних сповіщувачів .....	105
5.2.2 Оцінка ефективності використання модуля регулярного розміщення пожежних сповіщувачів .....	106
5.2.3 Оптимізація характеристик покриття .....	107
5.2.4 Оптимізація довжини траси в задачі покриття .....	109
Висновки по розділу 5 .....	110
Висновки по роботі .....	112
Список використаних джерел .....	113
Додаток А. Ілюстрації до розв'язання задач сенсорного дротового покриття складних областей з використанням програмного комплексу «Веста»..	135



## ВСТУП

Актуальність теми. Одним з основних шляхів прискорення науково-технічного прогресу є автоматизація проектно-конструкторських робіт на базі широкого застосування програмних засобів моделювання в поєднанні з сучасними пакетами розв'язання оптимізаційних задач (т. зв. Solver-Mi). Розв'язуючи багато задач проектування, важливо враховувати їхні геометричні особливості, що дозволяє виділити ці задачі в окремий клас задач геометричного проектування [57].

До даного класу відносяться, зокрема, задачі оптимального покриття геометричних об'єктів, що виникають під час планування міської забудови, систем бездротового радіозв'язку, під час проектування систем акустичної діагностики й контролю корпусів і обладнання, радіолокаційних систем регулювання й керування повітряним рухом, систем виявлення рухомих цілей і інших систем виявлення, діагностики й контролю й т. ін. Задачі покриття є предметом дослідження обчислювальної геометрії, а методи їхнього розв'язання – новим напрямом теорії дослідження операцій.

На сучасному етапі стрімко зростає інтерес до ефективного розв'язання задач кругового покриття. Це пояснюється різноманіттям практичних додатків і надзвичайною складністю математичних моделей і методів їхнього розв'язання.

Одна з основних областей застосування задач кругового покриття – сенсорні мережі – є відносно новою областю, де технології швидко розвиваються в останні роки і використовуються для розв'язання задач у самих різних областях, які варіюються від безпеки музеїв до задач захисту дикої природи. Останнім часом у зв'язку з розвитком різного виду сенсорних мереж цей напрям стає все більш перспективним [228]. Саме до таких задач належить задача проектування систем пожежної сигналізації.

Незважаючи на досить активний розвиток теорії сенсорних мереж, практично всі роботи присвячені дослідженню бездротових мереж. У даній роботі розглядається клас задач побудови оптимальних дротових сенсорних

мереж для областей складної форми, що становлять інтерес під час забезпечення протипожежного захисту приміщень.

Сучасна практика використання пакетів програм для розв'язання оптимізаційних задач найчастіше припускає, що математична модель задачі побудована й залишається тільки подати її в певному форматі. Таким чином, наявні програмні засоби залишають неавтоматизованим етап побудови моделі, що робить актуальним пошук нових комп'ютерних технологій моделювання постановок оптимізаційних задач у різних предметних областях. Отже, розробка сучасних інформаційних систем для розв'язання задач покриття вимагає автоматичної побудови математичних моделей. Однак етап побудови моделі, будучи одним із найбільш складних і відповідальних етапів операційного дослідження, дотепер погано формалізований і залишається в значній мірі мистецтвом.

Задачі оптимального кругового покриття областей складної форми належать до класу NP-складних, для розв'язання яких використовуються, як правило, евристичні алгоритми. Для розробки ефективних алгоритмів, що ґрунтуються на застосуванні методів локальної й глобальної оптимізації, потрібна побудова адекватних математичних моделей, що ґрунтуються на аналітичному описі відношень між об'єктами в задачі покриття.

Різноманітність початкових даних, що включають інформацію про форми, розміри геометричних об'єктів, технологічні обмеження і функції мети, породжує безліч оптимізаційних задач покриття. Але, незважаючи на це, усі вони можуть бути сформульовані в такий спосіб: необхідно деяку область, яка називається областю покриття, повністю покрити деякими об'єктами, які називаються покривними, таким чином, щоб функція мети досягала екстремального значення і при цьому дотримувалися технологічні обмеження.

Одним із варіантів технологічних обмежень можуть бути обмеження на мінімально й максимально припустимі відстані між центрами покривних об'єктів і межею області покриття та між центрами "сусідніх" покривних об'єктів.

Розв'язання задач оптимального покриття було зорієнтовано, в основному, на використання ідеалізованих математичних моделей матеріальних об'єктів і їхніх взаємодій без урахування похибки задання вихідних даних. Оскільки ж мова йде про оптимізаційні задачі, актуальною стає проблема точності й вірогідності отриманих результатів.

Потреба в розв'язанні зазначеної проблеми породила необхідність створення нового математичного апарата. Ним став новий додаток інтервального аналізу в геометричному проектуванні – інтервальна геометрія, який з початку 90-х років почав розробляти член-кореспондент НАН України Ю.Г. Стоян.

Ця робота присвячена побудові адекватних математичних моделей і розробці методів розв'язання оптимізаційних сенсорних задач покриття області довільної просторової форми колами рівного радіуса, які пов'язані мережею, з урахуванням додаткових обмежень і похибок вихідних даних.

# РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ Й ВИБІР НАПРЯМІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

## 1.1 Опис предметної області

У процесі забезпечення життєдіяльності суспільства виникає необхідність створення систем спостереження й контролю, у яких функція мети визначається не тільки як безпосереднє оцінювання характеристик і стану об'єкта, але й за якоюсь додатковою (наприклад, сигнальною) інформацією. Фізична модель, що зв'язує характеристики об'єкта й спостережувальну інформацію, повинна бути побудована таким чином, щоб була можливість здійснити контроль і діагностування властивостей об'єкта.

Вартість і складність системи контролю й спостереження за дотримання вимог до ймовірності виявлення сигналів залежать, в основному, від розмірів контрольованої площі або поверхні. Основні вимоги, що ставляться до систем спостереження й контролю, такі:

- система повинна виявляти джерела сигналів у будь-якій точці об'єкта, що контролюється; контроль за кожною такою точкою області, що контролюється, повинен бути здійснений за мінімального числа контролюючих об'єктів (датчиків, приймачів і т.п.);

- вплив зовнішніх шумів, перешкод і дублювання фіксацій сигналів різними приймачами має бути мінімальним або повністю виключеним (тобто зони перекриття покривних об'єктів повинні бути мінімально можливими);

- вартість прокладки й експлуатації мереж (живильних, сигнальних і т.п.) повинна бути мінімальною за умови виконання двох попередніх пунктів.

У системах контролю й спостереження задачу можна обмежити виявленням зони виникнення сигналу, що не входить у діапазон припустимих параметрів. Реальні будівельні об'єкти, що мають складні конструкції, вимагають під час створення таких систем розробки схем розміщення датчиків або приймачів сигналів. При цьому кожна точка області, що контролюється,

повинна перебувати в зоні дії хоча б одного приймача (датчика). Це пов'язано з тим, що область, яку контролює датчик, звичайно, подають у вигляді кола, тоді як адекватну моделі систем контролю й спостережень можна розглядати як кругове покриття (покриття колами) області  $R^2$  з додатковими обмеженнями, що виникають із фізичних характеристик застосовуваної апаратури.

До числа таких систем спостереження належать й системи автоматичного протипожежного захисту об'єктів, які можуть складатися з декількох підсистем: системи пожежної сигналізації; системи автоматичного пожежогасіння; системи оповіщення про пожежу й керування евакуацією.

Розглянемо більш докладно задачу проектування систем пожежної сигналізації.

Задача розміщення пожежних сповіщувачів. У першу чергу визначимо поняття системи пожежної сигналізації як сукупності технічних засобів, установлених на об'єкті, що захищається, для виявлення пожежі, обробки, подання в заданому вигляді інформації про пожежу, оповіщення про пожежу й видачі команд на включення автоматичних систем пожежогасіння й інших технічних пристроїв. Чутливим елементом СПС, що дозволяє виявити факт виникнення пожежі, є пожежний сповіщувач (ПС). “Якість” роботи СПС багато в чому залежить від “якості” розміщення ПС у приміщенні, що захищається.

З усього різноманіття існуючих ПС доцільно виділити велику групу автоматичних точкових ПС (рис. 1.1). Точковий ПС, як правило, розміщується на стелі приміщення, що захищається, і зона, яка контролюється таким приладом, являє собою коло деякого радіуса  $r$ , обумовленого висотою приміщення, технічними характеристиками ПС і вимогами нормативних документів. При цьому максимальна чутливість ПС досягається в центрі кола й зменшується в міру віддалення від нього до меж області.

Таким чином, подавши приміщення, що захищається, у вигляді довільної області покриття, а зони, що контролюються ПС, у вигляді покривних кіл, можна сформулювати дану задачу як задачу покриття.

При цьому слід зазначити, що в математичній моделі задачі будуть присутні додаткові обмеження, які можна розділити на дві групи – нормативного й технологічного характеру.



а)



б)

Рисунок 1.1 – Пожежні сповіщувачі: а) – тепловий точковий сповіщувач ИП-103.6; б) – димовий точковий сповіщувач ИПК-4

Обмеження нормативного характеру – це обмеження, які сформульовані в нормативних документах. Основними документами, що регламентують процедуру проектування систем пожежної сигналізації, є [50, 51]. У них визначаються максимально припустимі відстані між «сусідніми» пожежними сповіщувачами й від «граничних» сповіщувачів до стін.

Тут під «граничними» маються на увазі кола, в яких є непусте перетинання з межею області, а «сусідніми» – кола з непустим взаємним перетинанням.

До обмежень технологічного характеру відносять мінімальні відстані між сповіщувачами й від сповіщувачів до стін. Вони визначаються габаритними розмірами корпусу самого приладу.

На розміщення ПС може вплинути конфігурація стелі й наявність великогабаритного устаткування в приміщенні. У зв'язку з цим з'являються додаткові обмеження на розміщення ПС або так звані «області заборони».

Згідно з [50] за наявності на стелі виступних конструкцій (балок, ребер плит і т. ін.) (рис. 1.2), висота яких перевищує 5% від загальної висоти приміщення, повинні виконуватися такі умови:  $D > 0.25 \cdot (H - h)$  – ПС необхідно встановлювати в кожному відсіку;  $D < 0.25 \cdot (H - h)$  – ПС необхідно встановлювати в кожному другому відсіку;  $D < 0.13 \cdot (H - h)$  – ПС необхідно встановлювати в кожному третьому відсіку, де  $D$  – відстань між балками, що виміряна від їхніх зовнішніх сторін,  $H$  – висота приміщення,  $h$  – висота балки. На рис. 1.2 наведений приклад розміщення пожежних сповіщувачів у відсіку, утвореному балками.

Також за наявності в приміщенні великогабаритного устаткування (стелажі, штабелі й т.д.), відстань від верхнього краю яких до стелі менш за 0.3 м, ПС необхідно розміщати в кожному відсіку, утвореному таким устаткуванням.

За наявності в приміщенні балконів, оглядових площадок, вентиляційних коробів і т.д., габарити яких попадають у діапазони, що зазначені в таблиці 7.5 [50], під цими конструкціями треба передбачати додаткове встановлення ПС.

Під час вибору місць розміщення ПС можуть бути «мертві зони», у яких їх установлювати не можна – світильники, вентиляційні отвори в підвісній стелі, колони й т. ін. (рис. 1.3).



Рисунок 1.2 – Приклад розміщення пожежних сповіщувачів у відсіку, утвореному балками



Рисунок 1.3 – Приклади розміщення пожежних сповіщувачів за наявності на стелі світильників

Проектування систем пожежної сигналізації не закінчується етапом розміщення ПС. Після розміщення ПС їх поєднують у шлейфи дротяними лініями й підключають до приймально-контрольного приладу, що виконує функції «головного мозку», приймаючи й обробляючи інформацію від периферійних пристроїв, контролюючи працездатність системи, передаючи інформацію на пульт централізованого спостереження та інші функції.

Задача формування шлейфів системи пожежної сигналізації може бути сформульована за допомогою введення ряду додаткових обмежень у розглянутій задачі покриття, а саме: покривні кола мають бути розташовані таким чином, щоб траса, яка з'єднує їхні центри, повинна мати мінімальну довжину, при цьому виконується ряд нормативних і технологічних обмежень.

До нормативних обмежень, які варто враховувати під час формування шлейфів, ставиться вимога [50] про те, що за несправностей (обриви, короткі замикання) у шлейфі, з ладу повинно виходити не більше 32 ПС. Для безадресних систем пожежної сигналізації з єдиною можливою топологією шлейфів у вигляді променів (променева, радіальна) це означає, що в один шлейф можна включати не більше 32 ПС. Для адресних СПС, крім радіальної топології, можлива ще й кільцева. Тому компанії-виробники устаткування для збільшення кількості ПС, що обслуговуються одним приймально-контрольним приладом, випускають так звані розмикачі. Їх установлюють на початку



шлейфа, наприкінці й через 32 ПС. З появою неполадок у шлейфі пара розмикачів блокує фрагмент шлейфа з місцем обриву або короткого замикання, після чого я інша частина системи функціонує без змін.

У випадку з кільцевою топологією шлейфів на перше місце виходять обмеження технічного характеру. Кожний приймально-контрольний прилад характеризується опором і струмоспоживанням у шлейфі. Сумарне значення опору складається з опорів, підключених у шлейф ПС, й опору з'єднувальних дротів.

При об'єднанні в один шлейф ПС, що розташовані в різних приміщеннях (за наявності технічної можливості), варто враховувати обмеження нормативного характеру з [50], а саме:

а) площа, що захищається одним шлейфом у межах одного поверху, не повинна перевищувати  $1600 \text{ м}^2$ ;

б) одним шлейфом можна захищати більше 5 приміщень або у випадку використання адресних СПС, або за наявності над входом у кожне приміщення зовнішнього світлового пристрою (включеного в той же шлейф), який сповіщає про спрацьовування ПС саме в цьому приміщенні;

в) одним шлейфом можна захищати приміщення в межах різних поверхів за умови:

1) загальна площа поверху не більше  $300 \text{ м}^2$ ;

2) захисту сходових кліток, ліфтових шахт, кабельних тунелів, розташованих на різних поверхах, але в межах одного протипожежного відсіку.

На підставі перерахованого вище можна сформулювати базову оптимізаційну задачу (ВОСР).

Нехай  $\Omega$  – багатозв'язна область, яка обмежена відрізками прямих і дугами окружностей (у загальному випадку гладких кривих),  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  – кола заданих радіусів. Необхідно покрити область  $\Omega$  колами  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  так, щоб кількість об'єктів, що покривають, була мінімальна. При цьому повинен виконуватися ряд спеціальних обмежень, а довжина ламаної, яка з'єднує центри кіл, має бути мінімальною.

## 1.2 Аналіз літературних даних і постановка задачі

Клас задач проектування, пов'язаний з відображенням геометричної інформації, отримав назву задач геометричного проектування [57]. Задачі покриття належать до задач геометричного проектування й досить широко досліджені в літературі.

У рамках теорії геометричного проектування задачі покриття досліджуються в роботах Стояна Ю.Г. і його учнів [57, 84, 69, 85, 79, 37, 46, 30, 53, 27, 28, 30].

У монографії [57] наведена загальна характеристика й формальна постановка задач покриття. Авторами приділена увага формалізації умов розміщення й покриття з використанням апарату  $\rho$ -функцій,  $\omega$ -функцій і структур лінійних нерівностей. Також розглянуте застосування методу послідовного аналізу варіантів до розв'язання задач покриття. Використовуваний у роботі апарат  $\rho$ -функцій уперше введений у [67]. Також з цього питання слід зазначити публікації [214, 215.].

$\rho$ -функції стали продовженням досліджень, які проводилися в Інституті проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України в області формалізації задач геометричного проектування й вибору ефективних методів їхнього розв'язання. Початок зазначеним роботам поклала теорія  $R$ -функцій [41-43]. Цей апарат дозволив аналітично описувати складні геометричні об'єкти, будувати й досліджувати умови їхніх взаємовідношень.

Дослідження  $R$ -функцій показало принципову можливість їхнього застосування для математичної постановки задач геометричного проектування, однак безпосереднє використання цієї теорії для задач розміщення й покриття можливо лише в порівняно простих випадках. Тому подальші дослідження в цьому напрямку привели до створення апарату  $\rho$ -функцій.

Незважаючи на те, що задачі покриття й розміщення аналогічні за своєю постановкою (у тому розумінні, що в них необхідно знайти параметри

розміщення об'єктів щодо області за деяких додаткових обмежень), розробці математичних моделей і методів розв'язання задач розміщення приділялося значно більше уваги, ніж задачам покриття. Це пояснюється, у тому числі, більшою складністю процесу формалізації критеріїв повноти й надмірності покриття, ніж критеріїв допустимості в задачах розміщення.

До однієї з найбільш ранніх робіт з дослідження проблеми покриття можна віднести роботу [154] про розмір радіуса кола, що покриває будь-яку точкову множину заданого діаметра. До ранніх робіт також належить стаття [159] про гексагональне решітчасте покриття колами.

Напрямок досліджень, що розглядається, почав активно розвиватися в 50-і, 60-і роки ХХ ст. у трьох наукових школах: угорської, яку очолював Л. Фейеш Тот (Fejes Toth L.), московської, на чолі з Б.Н. Делоне, і англійської К.А. Роджерса (Rogers C.A.).

Найбільш значною роботою, що присвячена вивченню теорії розташувань, частиною яких є задачі покриття, є монографія [75]. У неї розглядаються задачі побудови найрідших покриттів в евклідовій площині; наведено поняття щільності системи покривних фігур; отримані оцінки покриття площини й опуклої області рівними колами. Одним з важливих результатів цієї роботи є той факт, що щільність покриття площини рівними центрально-симетричними опуклими фігурами не може бути менше щільності найрідшого решітчастого покриття.

У багатьох роботах велика увага приділяється задачам покриття площини опуклими множинами. Fejes Toth L. [128] удалося довести, що для щільності покриття  $\chi(K)$  площини множинами  $K$  виконується нерівність  $\chi(K) \geq \mu(K)/h(K)$ , де  $\mu(K)$  – площа множини  $K$ ,  $h(K)$  – площа найбільшого шестикутника, який вписаний в  $K$ . Згідно з [126], щільність покриття площини трансляціями конгруентних опуклих множин  $K$ , що не перетинаються, менше, ніж  $\mu(K)/h(K)$ .

Особлива увага на той час приділялась решітчастим покриттям. Серед робіт цього періоду слід зазначити [125], де автор зосереджує увагу на дво- і

тривимірних задачах, як базис для решітки використовуючи правильні шестикутники й трикутники, а покривні об'єкти, кулі (причому не обов'язково рівного радіуса), еліпси, правильні трикутники. У роботі [94] автор довів, що у двовимірному просторі єдиний мінімум під час покриття площини колами дає решітчасте покриття на правильних трикутниках, для тривимірного випадку при покритті кулями оптимальний розв'язок дають також решітки. Крім того, слід зазначити роботи того періоду, у яких досліджується решітчасте покриття простору колами [136, 124, 205].

Faru вивчав решітчасті покриття площини опуклими (не обов'язково симетричними) множинами  $K$  [122]. З його результатів випливає, що для кожної такої множини щільність решітчастого покриття  $\chi_L(K) \geq \mu(K)/h_s(K)$ , де  $h_s(K)$  дорівнює найбільшій площі центрально-симетричного шестикутника, що міститься в  $K$ . Він довів також, що для плоских опуклих множин  $K$  виконується нерівність  $\chi_L(K) \leq 1,5$ , причому рівність досягається тільки в тому випадку, коли  $K$  – трикутник. У [128] показано, що  $\chi_L(K) \geq \chi(K)$ . Тоді для симетричної множини  $K$ , через те, що  $h(K) = h_s(K)$ , має місце рівність  $\chi_L(K) = \chi(K) = \mu(K)/h_s(K)$ . У [233, 93] наведені ще деякі цікаві результати в цьому напрямку. Дослідження решітчастих покриттів колами набуло подальшого розвитку у роботі. [123]

Багато робіт присвячено дослідженню й вирішенню проблеми знаходження найрідших покриттів рівними кулями просторів  $R^n$  при  $n$  більше трьох [129, 42, 92, 134, 127, 206, 121, 19, 49, 48, 114].

Задача покриття опуклого тіла гомотетичними йому тілами розглянуто в [76, 16, 8, 83].

З більш пізніх робіт з досліджуваної проблеми можна назвати [32]. Автор розглядає область покриття багатозв'язну багатокутну область, а як покривні об'єкти – прямокутники із заданої множини. При цьому в роботі вводяться додаткові обмеження (межа області двічі не перекривається, за винятком

окремих точок, у яких допускається багаторазове перекриття, і розміри прямокутників лежать у заданих межах).

Робота [55] присвячена розв'язанню задачі про покриття й освітлення необмеженого опуклого тіла розмірності  $n$  меншими гомотетичними тілами. Продовженням роботи кишинівської школи стала монографія [9], у якій автори приводять формулювання задачі покриття в загальному вигляді, не роблячи прив'язки до конкретної області знань: для заданої множини  $M$  діаметра  $d$  знайти найменше натуральне  $m$ , для якого існують підмножини  $K_1, K_2, \dots, K_m$ , кожна з яких має діаметр, менший  $d$ , і які утворюють покриття множини  $M$ .

Проблема визначення гарних покриттів довільної області за допомогою кіл недостатньо вивчена в літературі порівняно із проблемами покриття площини. Алгоритми для знаходження оптимальних одноразових покриттів колами обмеженої частини площини будувалися різними авторами. У роботах [39, 10, 222, 145, 180, 181, 193] виявлені екстремальні або передбачувані розташування  $N$  кіл, що забезпечують одноразове покриття для окремих фігур (квадрата, трикутника, кола).

Значну кількість результатів, пов'язаних з покриттями геометричних фігур колами можна віднести до проблеми покриття кола колами [211, 183, 207].

Найперші обчислювальні результати для кругових покриттів областей були отримані Neville в [191], де було побудоване покриття кола п'ятьма рівними колами й стверджувалося, що воно оптимальне. Однак цей доказ не зберігся й був отриманий в [101], де також визначене найрідше покриття кола шістьма рівними колами. Задача покриття колами заданого кола в роботі [240] розв'язується ітераційною розбивкою покривного кола на частини й фіксуванням радіусів покривних кіл.

У [39] запропоновано використовувати області Вороного й наведено можливі оптимальні покриття одиничного квадрата  $N$  колами для  $N \leq 10$ , а в [10] – для  $N \leq 15$ .

У [79] визначено найрідше покриття кола рівними колами для  $n=3, 4$  і  $7$  кіл.

У 1995 році Tarnai і Gaspar опублікували перші обчислювальні результати з покриттів квадрата не більш ніж  $10$  колами [222]. Локально оптимальне покриття було знайдено шляхом імітації системи, що складається з усадочних, натяжних стрижнів і штирових з'єднань.

Lengyel і Veres [168] поширили результати роботи [222] і побудували покриття квадрата за допомогою  $23$  кіл.

Інші результати включають покриття прямокутника не більш ніж  $7$  колами [145] та [181], покриття рівностороннього трикутника (з доказами оптимальності в найменшому випадку) [180] та [195]. Огляд щодо кругових покриттів можна знайти в розділі 3 [183].

Nurmela і Ostergard [194] запропонували алгоритм пошуку гарних покриттів квадрата колами на основі методу числового визначення структури покриття. Використовуючи ці алгоритми, вони поліпшили попередні покриття квадрата з  $12-21$  колами [168] і навели нові покриття з  $24-30$  колами. Nurmela і Ostergard також одержали покриття трикутника з не більш ніж  $36$  колами [195].

У [151] для розв'язання задачі пропонується використовувати квазідиференційовність цільової функції.

Для розв'язання задачі однокраового покриття  $N$  колами обмеженої частини площини запропоновані різні евристичні алгоритми й алгоритми з використанням областей Вороного при різних метриках (див., наприклад, [119] і бібліографію в ній). Використання багаторазових областей Вороного й згладжування цільової функції запропоноване в [11]. У [193] максимізується площа частини області, що покривається  $N$  колами фіксованого радіуса. Там же наведені передбачувані оптимальні покриття квадрата й трикутника  $N$  колами найменшого радіуса для  $N \leq 30$  й  $N \leq 36$  відповідно. Всі зазначені вище алгоритми дозволяють знаходити покриття, у яких радіус покривних кіл, можливо, досягає локального мінімуму.

Розглянемо основні відомі в літературі методи й алгоритми, які використовуються для формалізації обмежень, постановки задач і їхнього розв'язання.

Один з підходів до побудови кругових покриттів – розміщення датчиків у детермінованих вузлах. При цьому будується базовий шаблон розміщення, що включає кілька вузлів, і може замостити площину. Така регулярна розбивка на багатокутники ще називається тесселяцією. Якщо шаблон повністю покритий зонами датчиків, розташованих у його вершинах, то вся площина може бути повністю покрита тесселяцією таких багатокутників. Наприклад, на рис. 8 показані три канонічні тесселяції правильними трикутниками, правильними квадратами, і правильними шестикутниками.

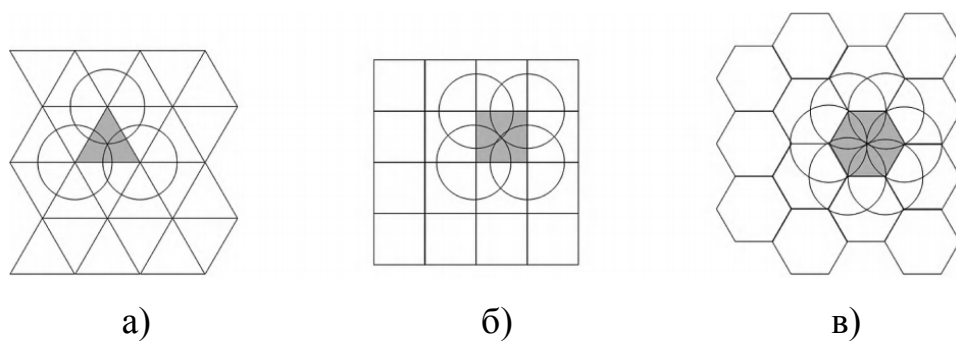


Рисунок 1.4 – Тесселяція на основі: а) – правильних трикутників; б) – правильних квадратів; в) – правильних шестикутників

Доведено [159], що правильна трикутна тесселяція є оптимальною з погляду мінімальної кількості вузлів, необхідних для повного покриття колами області. Припустимо, що трикутна тесселяція використовується в дуже великому полі. Тоді співвідношення між загальною площею всіх дисків і площею всього поля прямує до граничного значення для кругового покриття площини, що дорівнює  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$ .

Деякі автори (Kar and Banerjee 2003; Lyengar et al. 2005; Wang et al. 2005 c; Bai et al. 2006; Han et al. 2008) досліджують використання шаблону у вигляді смуги кіл (рис. 1.5).

Ефективним варіантом такого підходу є запропонований і досліджений у роботах [38, 37] метод секційно-регулярного покриття прямокутної області.

Другий підхід ґрунтується на випадковому розміщенні сенсорних датчиків у області, що покривається [137].

У літературі описано два основних способи генерації випадкового покриття області колами. Один з них [137, 242] ґрунтується на використанні спеціальних точок. Як спеціальні точки використовуються точки перетинання окружностей, що обмежують зони чутливості сенсорів, між собою, а також точки перетинання межі зони спрацьовування сенсора із межею області. У роботах [229] метод, що ґрунтується на використанні точок перетинання, був розширений для генерації  $k$ -покриттів. Тут круговим  $k$ -покриттям області називається таке покриття, з якого кожна із точок області належить зонам детектування як мінімум  $k$  сенсорів.

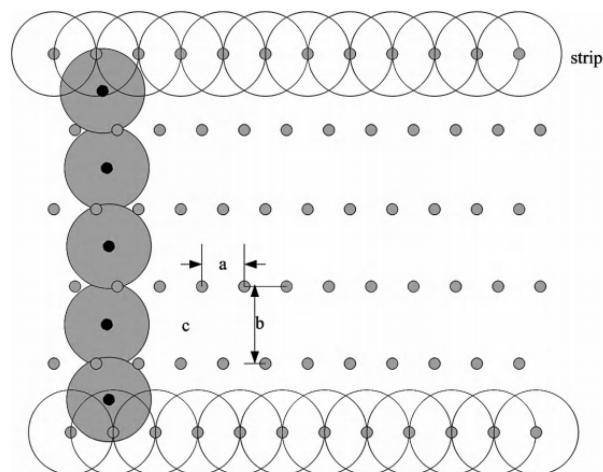


Рисунок 1.5 – Шаблон розміщення на основі смуги для багаторазового покриття

При  $k$ -покритті найпростіший підхід – розміщати датчики в тому самому місці. Іншим, також простим підходом, є  $k$ -шарна тесселяція, де кожний шар



тесселяції забезпечує повне 1-покриття. Останній спосіб розміщення є більш переважним, оскільки датчики в різних місцях навряд чи вийдуть із ладу (наприклад, через зміни навколишнього середовища) одночасно. По суті, бажано розміщати датчики не занадто близько один до одного (вимога на мінімально припустимі відстані) для більш високого ступеня надійності [160, 161].

Автори робіт [167, 171, 198] оцінюють імовірність побудови покриття обмеженої замкнутої області  $R^2$  заданим числом кіл.

Ряд авторів [85, 18, 186, 231] досліджують методи, що ґрунтуються на використанні інших моделей сенсорів. Зокрема, у роботі [186] використовується сенсор зі змінним (залежно від середовища) радіусом детектування. У роботі [231] побудована межа оцінок якості  $k$ -покриття для попередньої моделі.

При цьому в ході стохастичної побудови покриття виникають дві підзадачі: видалити т.зв. надлишкові датчики, усунення яких не приводить до порушення умови покриття області, і визначити, що покриття побудоване.

Простим методом перевірки надмірності сенсора є використання сіткового підходу, при якому кожному датчику відповідає список точок сітки в межах його області детектування, як показано на рис. 1.6. Якщо всі такі точки покриваються областями детектування сусідніх датчиків, то датчик є надлишковим. Наприклад, на рис 1.3 всі точки сітки із зони детектування датчика  $s_1$  також покриваються хоча б однією із зон сусідніх сенсорів  $s_2, s_3, s_4, s_5$ . Отже,  $s_1$  є надлишковим, якщо його сусіди  $s_2, s_3, s_4$  і  $s_5$  активні. Метод сітки – простий метод для програмної реалізації, однак його використання може спричинити значні витрати обчислювальних ресурсів при малому кроці сітки. А при великому кроці сітки зростає вірогідність похибок.

У методах перевірки надмірності сітковий підхід також може використовуватися в плануванні активності датчиків для одержання диференційованого покриття, де кожна точка сітки може знадобитися для покриття різними кількостями датчиків [237, 120].

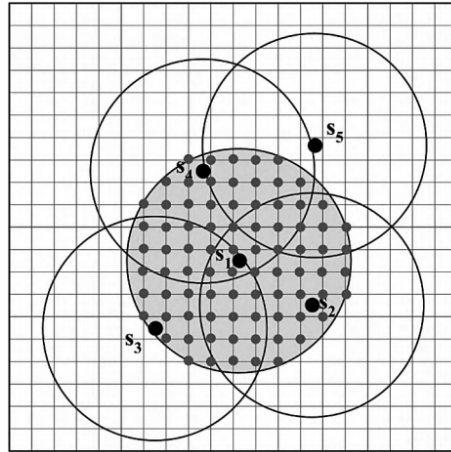
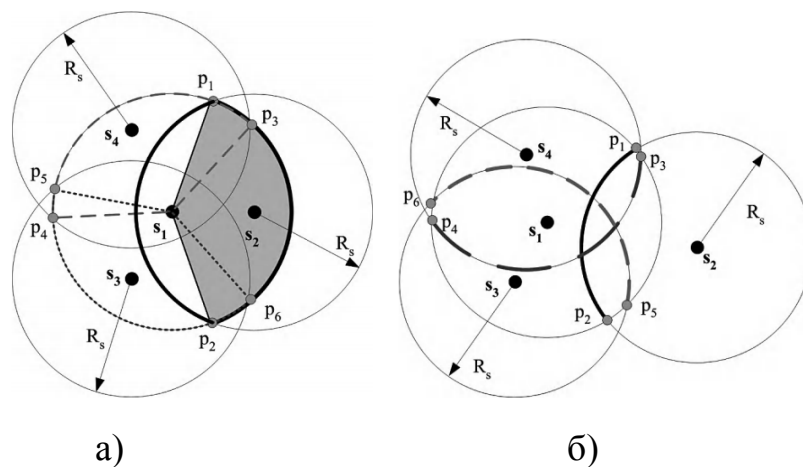


Рисунок 1.6 – Ілюстрація використання сітки для перевірки надмірності

Нижче стисло наведено основні методи для визначення надмірності кіл у покриттях, побудовані на аналізі геометричних властивостей кругових покриттів.

У роботі [224] пропонують для аналізу надмірності покриття концепцію "сенсора, що спонсується". Так, сенсор  $s_2$  називається спонсором сенсора  $s_1$ , якщо їхні сенсорні зони перетинаються. Як показано на рис. 1.7 а, область, що обмежена жирними дугами, являє собою перетинання двох відповідних зон детектування.



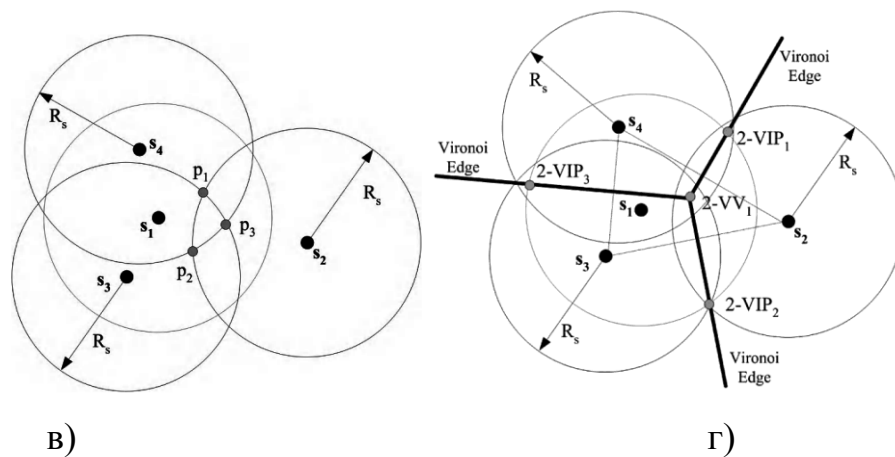


Рисунок 1.7 – Перевірка надмірності різними методами: а) – сектора, що спонсується; б) – покриттям периметра; в) – покриттям перетинання г) – за допомогою діаграми Вороного

Площа виділеної сірим кольором області може бути визначена з елементарних геометричних міркувань. Правило визначення надлишкових датчиків виглядає в такий спосіб: якщо зона чутливості датчика  $s$  може бути покрита секторами, що спонсуються, такий датчик  $s \in$  надлишковим і може бути вилучений.

У роботі [146] автори запропонували для перевірки надмірності сенсора визначати покриття окружності (межі його сенсорної зони) (Рис. 1.7 б). Якщо зони детектування датчиків перетинаються, такі датчики називаються сусідніми. На рис. 1.7 б у сенсора  $s_1$  три сусідніх сенсори –  $s_2, s_3$  і  $s_4$ . Правило визначення надлишкових датчиків виглядає в такий спосіб: якщо кожна з дуг, утворена перетинанням межі зони детектування сенсора (дуги  $p_1p_2, p_2p_3$  і  $p_4p_5$  на рисунку) належать іншим сусіднім сенсорам ( $s_3$  і  $s_4, s_2$  і  $s_4, s_3$  і  $s_4$  відповідно), то сенсор  $s_1 \in$  надлишковим і може бути вилучений.

У роботі [236] для визначення надмірності сенсора використовується правило, яке ґрунтується на аналізі перетинань. Якщо дві зони чутливості датчиків перетинаються одна з одною, то на їхніх межах з'являються точки перетинання (рис. 1.7 в). Надалі під час аналізу точки на межі чутливості датчика не вважаються покритими цим датчиком. Правило визначення

надмірності наступне: якщо всі точки перетинання на межі сенсорних зон покриті датчиком  $s$ , то  $s$  є надлишковим і може бути вилучений.

У роботі [105] пропонується для визначення надмірності використовувати діаграму Вороного. Діаграмою Вороного (див., наприклад, [90]) для  $N$  сенсорів  $s_1, s_2, \dots, s_N$  на площині визначається розбивка площини на  $N$  комірок, що містять датчики, при якому відстань між будь-якою точкою в комірці й датчиком, що їй належить, менше, ніж відстань між цією точкою й іншими датчиками. Датчики називаються сусідніми, якщо вони розташовані в комірках діаграми, що мають загальне ребро. При аналізі сенсора  $s$  на надмірність спочатку будується діаграма Вороного при вилученому  $s$ . Так, на рис. 1.7. г жирними лініями зображені ребра діаграми Вороного при вилученому  $s_1$ . Вершина діаграми, зіставлена сенсорю  $s_1$ , позначена 2-VV<sub>1</sub>. Точки перетинання межі сенсорної зони  $s_1$  з ребрами побудованої діаграми позначені 2-VIP<sub>1</sub>, 2-VIP<sub>2</sub> і 2-VIP відповідно. Правило визначення надмірності на основі аналізу вершин і перетинань діаграми Вороного виглядає в такий спосіб: якщо всі точки 2-VV і 2-VIP датчика  $s$  покриті сусідніми сенсорами, то  $s$  є надлишковим і може бути вилучений. На рис. 1.7. г як точка 2-VV<sub>1</sub>, так і точка 2-VIP<sub>1,2,3</sub> покриті сусідніми сенсорними зонами, і, отже, датчик  $s_1$  є надлишковим.

Існують також деякі розширення або варіанти чотирьох підходів перевірки надмірності, описаних вище, таких як розширений підхід в області, що спонсується, [152, 104], розширений підхід до покриття периметра [200, 201], розширений підхід, що ґрунтується на аналізі перетинань [146, 132] і розширений підхід, що ґрунтується на аналізі діаграм Вороного [103]. Автори зазначених робіт розширили базові методи перевірки надмірності, щоб запланувати меншу кількість активних датчиків, зменшити складність обчислень або впоратися з датчиками з різними діапазонами чутливості. Деякі дослідники пропонують використовувати оцінені відстані між сусідніми вузлами, а не їхні координати, для аналізу активності датчика [235, 239]. Наприклад, основна ідея Wu and Ssu полягає в тому, щоб гарантувати, що всі

точки в трикутнику покриваються трьома активними датчиками, розташованими у вершинах трикутника.

Для визначення повноти покриття (чи досягнуте покриття області сенсорними зонами датчиків) у літературі були використані два підходи. Один з них ґрунтується на використанні сіткового методу [164, 165]. Другий використовує запропонований в [137] критерій покриття, що ґрунтується на аналізі належності точок перетинання окружностей між собою та з межею області сенсорним зонам інших датчиків. Якщо кожна з таких точок належить зоні обслуговування хоча б одного з інших датчиків, то покриття побудоване. У роботі [229] метод аналізу повноти 1-покриття з [137] був розширений для аналізу повноти  $k$ -покриттів.

На основі цього критерію в [162] розроблені засоби аналітичного опису геометричних відношень між об'єктами для задач покриття довільного багатокутника колами різних радіусів, побудована математична модель задачі у вигляді задачі нелінійного програмування й запропонований метод розв'язання задачі негладкої оптимізації, що виникає. У моделі вводяться по дві допоміжні змінні для пар сусідніх кіл і кіл, що перетинаються із межею.

У роботі [70] пропонується оригінальний стохастичний алгоритм генерації покриттів багатокутної області однаковими колами, що ґрунтується на перетвореннях гомотетії. На першому етапі в області випадково розміщається  $n$  точок (центрів кіл), причому їхні радіуси покладаються рівними 0, після чого радіуси збільшуються доти, поки область не буде покрита. На другому етапі здійснюється мінімізація радіусів кіл при збереженні покриття. При цьому використовується математична модель задачі, яка побудована на основі діаграм Вороного. Однак метод, запропонований в [70], можна застосовувати тільки до покриття багатокутників однаковими кулями.

У [222] запропонований підхід до покриття квадрата одиничними колами, що ґрунтується на теорії температурних розширень і стисків стрижневих структур.

Основна ідея запропонованого в [10] алгоритму полягає в тому, що для області по початковій системі центрів будується покриття Діріхле-Вороного. Вибирається центр, який можна поліпшити, і замінюється центром, для якого це неможливе. Після цього відбувається перехід на нову ітерацію. Робота алгоритму закінчена в тому випадку, якщо всі центри стають такими, які неможна поліпшити. Результати розв'язання задачі знаходження оптимального покриття кулями мінімального радіуса наведені лише для одиничного квадрата, і реалізація алгоритму істотно залежить від форми області, що покривається.

У роботі [151] розглядається неперервна задача покриття множини як задача квазідиференційованої оптимізації в  $R^n$  і наводиться алгоритм її розв'язання для випадку  $R^2$ . Показано, що задача про кінцеве кульове покриття може бути розглянута як задача квазідиференційованої оптимізації й досліджені властивості цієї задачі. Слід зазначити, що запропонований в [151] алгоритм знаходить стаціонарні точки. Як і в [10], коло його дії обмежене формою множини, яка покривається, що робить практично неможливим розробку універсального програмного забезпечення, призначеного для розв'язання задач щодо покриття довільної множини.

Для неперервної задачі оптимального кульового покриття компактної множини в [26] запропонований і обґрунтований алгоритм, що ґрунтується на використанні теорії оптимальної розбивки множин і застосуванні  $r$ -алгоритму Шора [81] для розв'язання отриманої задачі оптимізації функції, яку не можна диференціювати.

У роботі [73] запропоновані числові методи побудови покриттів, що базуються на розбивці множини на області Діріхле й пошуку так званих характерних точок. Одним із ключових елементів методів є побудова чебишевського центра компактної опуклої множини. Запропоновані в роботі алгоритми базуються на використанні конструкцій субдиференціалу й субградієнтних методів. Особливістю наведеної модифікації методу є можливість розв'язання задачі покриття для довільних областей із криволінійною межею.

У роботі [3] пропонується математична модель задачі покриття опуклої багатокутної області колами з урахуванням похибок вихідних даних в інтервальному вигляді з використанням класу інтервальних функцій, але поки не пропонується метод її розв'язання.

Однак під час розв'язання зазначеного класу задач, як правило, використовуються ідеалізовані математичні моделі матеріальних об'єктів і їхніх взаємодій, коли похибки задання вихідних даних не враховуються. А оскільки ж йдеться про оптимізаційні задачі, виникає проблема стійкості, точності й вірогідності одержуваних результатів.

Спроби вирішення цієї проблеми за допомогою чисельної геометрії зроблені в роботах [82, 217, 52]. Але, через складність математичних моделей задач геометричного проектування у подальшому виникла необхідність залучення до її розв'язання перспективного напрямку обчислювальної математики, що активно почав розвиватися з початку 60-х років – інтервального аналізу [187, 158, 23, 1].

З аналізу літературних джерел можна зробити висновок, що переважна більшість робіт, що мають відношення до задач кругового покриття, присвячено дослідженню евристичних методів їхнього розв'язання. Оптимізаційні задачі покриття, що враховують важливу характеристику довжини мережі з'єднань, яка зв'язує датчики, не формалізовані через відсутність відповідних засобів моделювання відношень між об'єктами. Існуючі аналітичні моделі й методи розв'язання мають, як правило, недоліки з обмеженою областю застосування, що не дозволяє використовувати їх для розв'язання задач кругового покриття складних областей  $R^2$ , тим більше використовувати їх в задачі побудови оптимальної провідної сенсорної мережі, якій і присвячене дане дослідження.

Нечисленність задач покриття, для яких отримано розв'язки, очевидно, пов'язана зі складностями побудови їхніх математичних моделей, недостатньою гнучкістю існуючого математичного апарату й оптимізаційних методів розв'язання зазначеного класу задач.

Часто під час математичного моделювання й розв'язання прикладних задач покриття виникає необхідність урахувати обмеження на мінімальну й максимальну відстань між покривними об'єктами, між об'єктами й межею області покриття, наявність яких обумовлена, наприклад, фізичними особливостями задач. Крім того, не завжди є можливість визначити вихідні дані точно, а лише з деякою похибкою, що також варто враховувати під час моделювання й розв'язання задач покриття. Результати проведеного літературного аналізу дозволяють стверджувати, що на цей час задачі у такому формулюванні не ставилися й не розв'язувалися.

У даній роботі на основі використання понять і методів теорії геометричного проектування запропоновані нові засоби для моделювання відношень покриття між геометричними об'єктами, побудована математична модель і розроблений метод розв'язання прикладної оптимізаційної задачі розміщення пожежних сповіщувачів та формування шлейфів пожежної сигналізації, що зводиться до задачі покриття області довільної просторової форми колами рівного радіуса з урахуванням похибок вихідних даних.

## **Висновки по розділу 1**

Аналіз наукової літератури за темою роботи показав, що більшість дослідників у даній області знань не використовують адекватні математичні моделі, що призводить до неможливості застосування сучасних оптимізаційних методів і, як наслідок, до втрати оптимальних розв'язків.

Найменш вивченим є практично значимий клас задач покриття колами об'єктів складної форми з урахуванням спеціальних обмежень, зокрема обмежень на мінімально й максимально припустимі відстані між геометричними об'єктами.

Таким чином, для практичних задач покриття немає аналітичного опису постановок, що унеможлиблює застосування для їхнього розв'язання сучасних ефективних методів локальної й глобальної оптимізації.



Через це виникла об'єктивна необхідність у розробці конструктивних засобів математичного й комп'ютерного моделювання з метою побудови адекватних математичних моделей і розробки ефективних методів розв'язання задач покриття, що й визначило мету даної дисертаційної роботи.

## РОЗДІЛ 2 ФОРМАЛІЗАЦІЯ ВІДНОШЕНЬ МІЖ ОБ'ЄКТАМИ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОКРИТТЯ ДОВІЛЬНОЇ ОБЛАСТІ СЕНСОРНИМИ ЗОНАМИ ДАТЧИКІВ

### 2.1 Моделювання сенсорної зони датчика

Перш ніж перейти до формалізації аналітичного опису відношень між геометричними об'єктами для задачі кругового покриття довільної області сенсорними зонами датчиків, необхідно вказати спосіб визначення радіуса таких зон (радіуса чутливості датчика).

Під час задання зазначеного радіуса можна використовувати підхід, що застосовувався раніше: для всіх приміщень, що мають однакові розміри, приймалася однакова площа відповідно до нормативної літератури [18] і відповідно однаковий радіус. За такого підходу не враховуються особливості розвитку пожежі в приміщенні, що захищається. Якщо вибираючи радіус – враховувати пожежне навантаження приміщення, що захищається, характер виникнення й розвитку пожежі та інші особливості, то ця величина для кожного окремого об'єкта, що захищається, може мати своє значення, навіть для приладів однієї марки. Тобто площа, що захищається пожежним сповіщувачем (ПС), це величина, що обчислюється в ході розв'язання задачі і залежить від величин, що характеризують осередок загоряння, які і є дійсно вихідними даними.

Зазвичай передбачається, що різні типи датчиків мають різні діапазони чутливості. Деякі дослідники навіть стверджують, що один сенсорний блок може мати різні діапазони чутливості [106, 232, 244]. Зазвичай вважається, що датчик споживає більше енергії, коли він використовує більший діапазон чутливості. Контрольована точка може бути розташована усередині більш ніж однієї сенсорної зони. Тому деякі дослідники вводять змінний параметр чутливості  $z$  й враховують міру покриття точки щодо кожного окремого датчика. У літературі відомо три основних моделі сенсорної області (рис. 2.1).

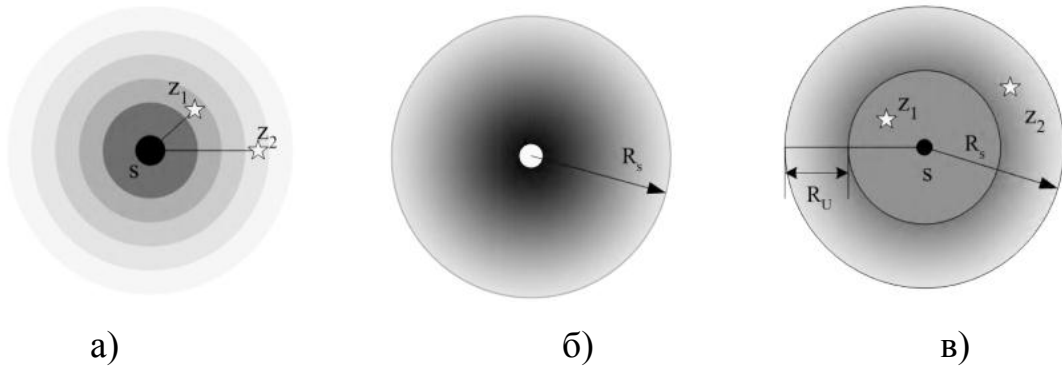


Рисунок 2.1 – Ілюстрація моделей сенсорних зон з чутливістю: а) – дискретно загасаючою; б) – гладко загасаючою; в) – комбінованою

На підставі робіт [78, 20, 36] були отримані вирази для визначення радіуса, що захищається димовими й тепловими ПС

– для теплових

$$R_{контр} = Q \cdot V_M \cdot \eta \cdot S_{гор} \cdot \left( \frac{5,38}{(T_{max} - T_{ном}) \cdot H_{II}} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.1)$$

– для димових

$$R_{контр} = 2,9 \cdot \frac{\left[ \left( \frac{\sqrt{S_{доп}}}{\sqrt{2,5 \cdot V_{II}^2}} - \frac{\tau_{IC}}{4} \right) / \left( 2,1 \cdot \left( \frac{H_{II}^4}{q} \right)^{0,2} \right) \right]^2}{\left[ -\lambda \cdot \ln \left( 1 - \frac{m_{пор}(\%)}{100} \right) \right] / \left( 11,2 \cdot \frac{D_M}{Q} \cdot \left( \frac{q}{H_{II}^3} \right)^{0,2} \right)^2}, \quad (2.2)$$

де  $Q$  – теплота згоряння матеріалів,

$V_M$  – об'єм, де відбувається горіння,

$\eta$  – коефіцієнт недопалу,

$S_{\text{ГОР}}$  – площа горіння,  
 $S_{\text{доп}}$  – нормативна площа захисту сповіщувача,  
 $V_M$  – масова швидкість розповсюдження пожежі,  
 $T_{\text{max}}$  – максимальна температура,  
 $T_{\text{ПОМ}}$  – температура в приміщенні,  
 $H_{\text{П}}$  – висота приміщення,  
 $\tau_{\text{ПС}}$  – інерційність сповіщувача,  
 $D_m$  – оптична щільність середовища,  
 $m_{\text{ПОР}}$  – поріг спрацювання сповіщувача,  
 $q$  – коефіцієнт теплоутворення,  
 $\lambda$  – коефіцієнт теплопередачі середовища.

Під час визначення похибки задання вихідних даних виникає ряд труднощів, пов'язаних з відсутністю достатньої кількості інформації, занадто приблизним визначенням цих величин на практиці. Для ряду величин були прийняті рекомендації з [78], а саме: коефіцієнт хімічного недопалу  $\eta$ , необхідний для визначення радіуса теплового ПС, і коефіцієнт поправки на дим  $\lambda$ , що як і  $\eta$  необхідний для обчислення  $m_{\text{ПОР}}$  при визначенні радіуса димового ПС. Ці коефіцієнти приймаються рівними 0,7 і 0,8 відповідно, причому вони мають таке значення як при визначенні верхньої, так і нижньої межі інтервалу радіуса. Під час визначення похибки задання нижньої теплоти згорання речовини  $Q$  й масової швидкості вигорання  $V_M$  використовувалися результати стандартних дослідів з [12-15] і були прийняті величини 4 і 5% відповідно.

Метричні характеристики області покриття також задаються з похибками. Але варто відзначити, що величина похибки виміру розмірів невелика й істотно не впливає на кінцевий результат.

Нормативними даними, які використовуються як вихідні, є залежність величини площі, що захищається ПС, від висоти приміщення. Результати розв'язання задачі не повинні перевищувати нормативні вимоги. В [18] ця залежність має дискретний вигляд, що знижує точність результатів. У ході

досліджень, за допомогою математичної системи Mathcad була проведена інтерполяція залежності площі, що захищається, від висоти приміщення. Результати роботи наведені на рис. 2.2, 2.3.

Отже у кожному конкретному випадку відповідно до формул (2.1) або (2.2) і значеннями похибок вихідних даних визначається інтервал зміни  $R_{\text{контр}}$  і, відповідно,  $S_{\text{контр}}$ . Потім отримані значення порівнюються зі значенням інтерпольованої функції для конкретного значення висоти приміщення. У випадку, якщо максимальне значення інтервалу не перевищує значення функції, то інтервал залишається незмінним, якщо перевищує, то за верхню оцінку приймається значення інтерпольованої функції. Якщо й нижня оцінка перевищує значення функції, то результат являє собою не інтервал, а абсолютне значення, що дорівнює значенню інтерпольованої функції.

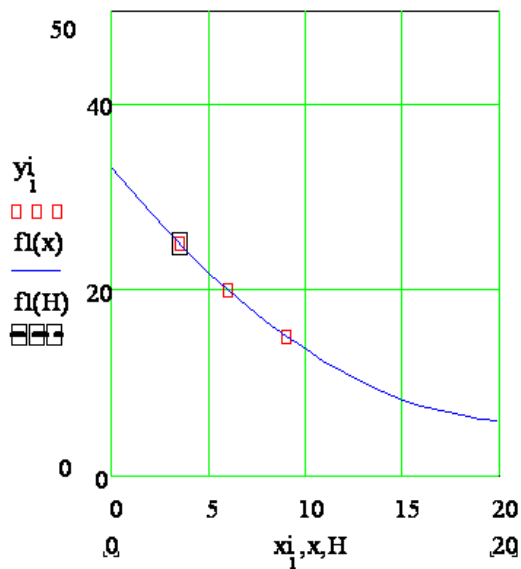
У такий спосіб закінчуючи етап підготовки вихідних даних для задачі розміщення ПС, маємо

- нормативну інформацію, що регламентує положення ПС один відносно одного й відносно стін приміщення, що захищається, яка необхідна для побудови області припустимих розв'язків;
- інтервал зміни радіуса області, що захищається ПС, узгоджений з вимогами [16].

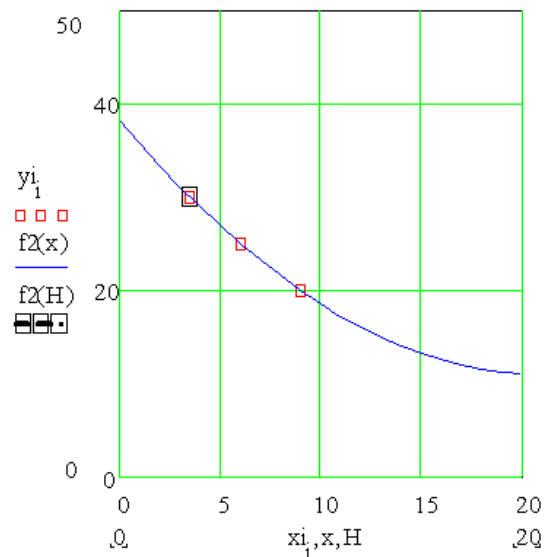
Одже можна переходити до етапу безпосереднього розміщення ПС, результат якого буде не тільки враховувати нормативні вимоги, а й особливості пожежного навантаження в приміщенні, розвитку пожежі, можливість задання вихідних даних з похибкою.

## **2.2 Формалізація умов розміщення датчиків**

На відміну від більшості розглянутих у літературі задач покриття, у задачі побудови мережі пожежної сигналізації, що розглядається, на можливе положення датчиків накладають додаткові умови технологічного характеру.

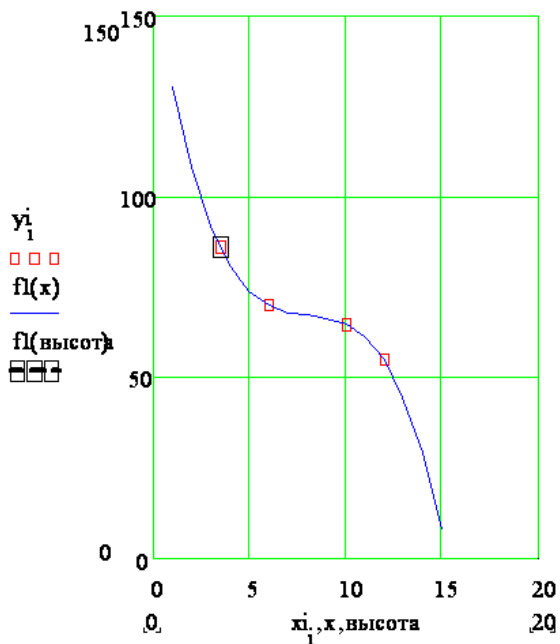


а)

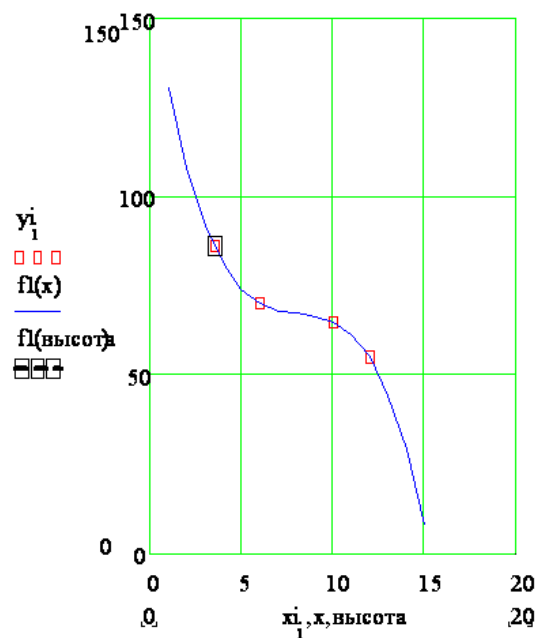


б)

Рисунок 2.2 – Інтерполяція залежності площі, що захищається, від висоти приміщення: а) – для теплових ПС при квадратичній схемі; б) – для теплових ПС при трикутній схемі



а)



б)

Рисунок 2.3 – Інтерполяція залежності площі, що захищається, від висоти приміщення: а) – для димових ПС при квадратичній схемі; б) – для димових ПС при трикутній схемі

Це пояснюється тим, що сенсори, як реальні тіла фізичного миру, повинні знаходитись в приміщенні й при цьому не перетинатися між собою й із зонами заборони (балками, плафонами освітлення, повітропроводами, колонами, декоративними елементами й т.п.).

Усього для задачі покриття області сенсорними зонами датчиків пожежної сигналізації є три типи технологічних відношень між геометричними об'єктами:

- умови взаємного попарного неперетинання (або розміщення не менш, ніж на мінімально припустимій відстані) датчиків між собою;
- умови належності датчиків області з урахуванням зон заборони;
- розміщення на максимально припустимій відстані «сусідніх» датчиків (сенсорні зони яких перетинаються).

Для формалізації обмежень зазначеного типу доцільно використовувати апарат  $\phi$ -функцій.

### 2.2.1 Основні визначення й властивості $\phi$ -функцій

У класі задач геометричного проектування, до якого належить розглянута задача, як математичні моделі двовимірних об'єктів використовуються  $\phi$ -об'єкти [67].  $\phi$ -об'єктом називається непуста точкова множина  $A \in R^2$ , що задовольняє такі вимоги:  $A$  – канонічно замкнута множина [34]; внутрішність і замикання множини  $A$  мають однаковий гомотопічний тип [33].

Об'єкт  $A$ , повернений на кут  $\theta_A$  і трансльований на вектор  $v_A = (x_A, y_A)$ , позначається як  $A(u_A)$ ,  $u_A = (v_A, \theta_A)$ . При цьому будь-якій точці  $p$  вихідного

об'єкта  $A(0, 0, 0)$  відповідає точка  $p' = v_A + p \cdot M(\theta_A)$ , де  $M(\theta_A) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$  –

матриця оператора повороту площини.

Неперервна, усюди визначена функція  $\Phi^{AB}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  називається  $\Phi$ -функцією об'єктів  $A(u_A)$  і  $B(u_B)$ , якщо вона задовольняє такі характеристичні властивості:  $\Phi^{AB}(u_A, u_B) < 0$ , якщо об'єкти мають спільні внутрішні точки;  $\Phi^{AB}(u_A, u_B) = 0$ , якщо об'єкти торкаються;  $\Phi^{AB}(u_A, u_B) > 0$ , якщо об'єкти  $A(u_A)$  і  $B(u_B)$  не мають спільних точок.

З метою врахування відстаней між геометричними об'єктами введено поняття нормалізованої  $\Phi$ -функції [65].

$\Phi$ -функція  $\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B)$  називається нормалізованою, якщо її значення дорівнюють евклідовим відстаням  $dist(A(u_A), B(u_B)) = \min_{x_A \in A, x_B \in B} dist(x_A, x_B)$

між об'єктами  $A(u_A)$  й  $B(u_B)$ , за умови, що об'єкти не перетинаються

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) &= dist(A(u_A), B(u_B)), \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset, \\ \tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) &< 0, \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Побудова нормалізованих  $\Phi$ -функцій для довільних  $\Phi$ -об'єктів досить складна процедура. Крім того, нормалізовані  $\Phi$ -функції неминуче містять радикали, що небажано для розв'язання оптимізаційних задач із застосуванням градієнтних методів оптимізації. Через це для моделювання припустимих відстаней між об'єктами переважніше використовувати вільні від радикалів псевдонормалізовані  $\Phi$ -функції.

*Визначення 2.1.* Неперервна всюди визначена функція  $\hat{\Phi}^{AB}$  називається псевдонормалізованою  $\Phi$ -функцією об'єктів  $A$  і  $B$ , якщо виконуються такі умови:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_-^{AB}(u_1, u_2) &< 0, \text{ якщо } dist(A, B) < \rho^-, \\ \hat{\Phi}_-^{AB}(u_1, u_2) &= 0, \text{ якщо } dist(A, B) = \rho^-, \end{aligned} \quad (2.4)$$



$$\widehat{\Phi}_-^{AB}(u_1, u_2) > 0, \text{ якщо } \text{dist}(A, B) > \rho^-.$$

Для моделювання максимально припустимих відстаней між об'єктами використовується функція  $\Phi_+^{AB}$ .

*Визначення 2.2.* Псевдонормалізованою phi-функцією  $\Phi_+^{AB}$  для phi-об'єктів  $A(u_A)$  і  $B(u_B)$  називається неперервна всюди визначена функція, для якої характерні такі властивості:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_+^{AB} &> 0 \text{ якщо } \text{dist}(A, B) < \rho^+, \\ \widehat{\Phi}_+^{AB} &= 0 \text{ якщо } \text{dist}(A, B) = \rho^+, \\ \widehat{\Phi}_+^{AB} &< 0 \text{ якщо } \text{dist}(A, B) > \rho^+. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Застосування квазі-phi-функцій дозволяє значно зменшити обчислювальну складність опису в аналітичному вигляді обмежень на розміщення об'єктів і розширює клас об'єктів, для яких умови взаємного неперетинання записуються у вигляді системи нерівностей.

*Визначення 2.3.* Квазі-phi-функцією  $\Phi'^{AB}$  для моделювання умов неперетинання phi-об'єктів  $A$  і  $B$  називається неперервна функція, для якої виконуються такі умови:

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u) &< 0, \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) \neq \emptyset, \\ \max_{u \in U} \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u) &= 0, \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset, \\ \text{fr}A(u_A) \cap \text{fr}B(u_B) &\neq \emptyset, \\ \max_{u \in U} \Phi'^{AB}(u_A, u_B, u) &> 0, \text{ якщо } A(u_A) \cap B(u_B) = \emptyset, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де вигляд множини  $U \subset R^t$  й розмірність  $t$  простору  $R^t$  залежать від форми

розміщуваних об'єктів і вигляду відношень, що моделюються.

Поняття квазі- $\rho$ -функцій може бути поширене на моделювання обмежень на припустимі відстані між об'єктами у вигляді класу так званих псевдонормалізованих квазі- $\rho$ -функцій.

*Визначення 2.4.* Псевдонормалізованою квазі- $\rho$ -функцією  $\widehat{\Phi}'_{-}{}^{AB}$  для опуклих  $\rho$ -об'єктів  $A(u_A)$  і  $B(u_B)$  називається неперервна функція, що задовольняє умови:

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} \widehat{\Phi}'_{-}{}^{AB}(u_A, u_B, u) &< 0, \text{ якщо } \text{dist}(A, B) < \rho^-, \\ \max_{u \in U} \widehat{\Phi}'_{-}{}^{AB}(u_A, u_B, u) &= 0, \text{ якщо } \text{dist}(A, B) = \rho^-, \\ \max_{u \in U} \widehat{\Phi}'_{-}{}^{AB}(u_A, u_B, u) &> 0, \text{ якщо } \text{dist}(A, B) > \rho^-, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де вигляд множини  $U \subset R^t$  й розмірність  $t$  простору  $R^t$  залежать від форми розміщуваних об'єктів і вигляду відношень, що моделюються.

Розглянемо тепер аналітичний опис за допомогою  $\rho$ -функцій умов належності сенсорів області  $\Omega$  з урахуванням зон заборони.

## 2.2.2 Моделювання геометричних відношень між сенсорами й областями заборони

### 2.2.2.1 Допоміжні $\rho$ -функції для кола

Об'єкти  $C$  і напівплощина  $P$ . Нехай  $p = (x_C, y_C)$  і  $r_C$  – центр і радіус кола, а  $\psi = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$  – рівняння прямої  $L_P$ , причому  $\psi \leq 0$  для всіх точок належать напівплощині  $P$ , тоді допоміжна  $\rho$ -функція об'єктів  $C$  і  $P$  може бути визначена так:

$$\Phi^{PC} = \Psi^{PP} - r_C = \alpha x + \beta y + \gamma - r_C. \quad (2.7)$$

Об'єкти  $C$  і  $P^*$ . За тих же позначень, що й для попереднього випадку,

$$\Phi^{P^*C} = -\Psi^{PP} - r_C = -\alpha x - \beta y - \gamma - r_C. \quad (2.8)$$

Об'єкти  $C$  і  $C^*$ . Нехай дано об'єкт  $C$  радіуса  $r$  й коло  $C'$  радіуса  $r'$  із центром у точці  $(x', y')$ , тоді допоміжна phi-функція об'єктів  $C$  і  $C'^* = R^2 \setminus \text{int } C'$  має вигляд

$$\Phi^{CC'^*} = (r' - r)^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2.$$

Об'єкти  $C$  і  $G$ . Нехай дано об'єкт  $G = P \cap C'^*$  (рис 2.5 а) і коло  $C$  радіуса  $r'$  із центром у точці  $(x', y')$ .

Phi-функція  $\Phi^{GC}$  має вигляд

$$\Phi^{GC} = \max\{\Phi^{PGC'}, \Phi^{C_G^*C'}, \varpi\}, \quad (2.9)$$

де  $\varpi = \min\{\omega_1, \psi_1, \omega_2, \psi_2\}$ ,  $\omega_i = (x_i - x')^2 + (y_i - y')^2 - (r')^2$ ;  $\psi_i = 0$  – рівняння прямих  $L_i$ , що проходять через точки  $t_{i1}$  й  $t_{i2}$ ,  $\psi_i(O_G) > 0$ ,  $i = 1, 2$ ;  $O_G$  – центр кола  $C_G$ .

При цьому відрізки  $t_i t_{i2}$ ,  $i = 1, 2$ , перпендикулярні прямій  $t_1 t_2$ , відрізки  $t_i t_{i2}$  перпендикулярні сторонам конусів  $I_i$  і  $\|t_i t_{ij}\| = r'$  для всіх  $i, j = 1, 2$ . (рис. 2.5 б).

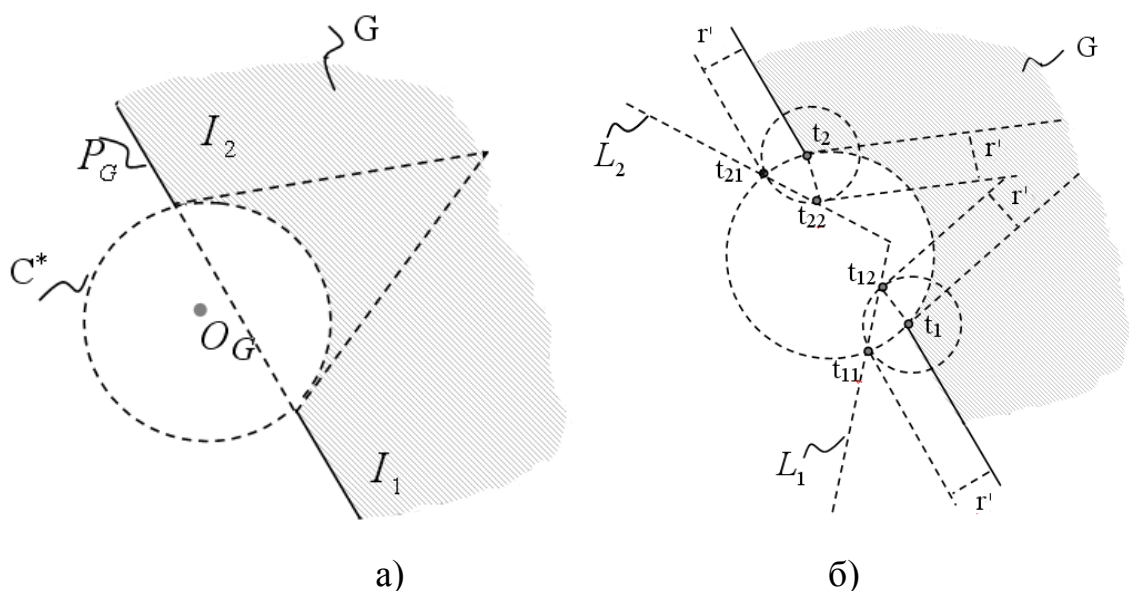


Рисунок 2.4 – Ілюстрація до визначення функції  $\Phi^{GC}$ : а) – об'єкт  $G$ ; б) – допоміжні геометричні побудови

### 2.2.2.2 Phi-функції для кола й базових об'єктів

Об'єкти  $C$  і  $K$ . Нехай  $K$  – опуклий багатокутник зі сторонами  $E_i$  і вершинами  $(x_i, y_i)$  для  $1 \leq i \leq m$ . Нехай  $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0$ ,  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$  – рівняння прямої, що містить сторону  $E_i$  і визначає напівплощину  $P_i$ , вершини й сторони багатокутника пронумеровані в напрямку обходу проти годинникової стрілки й  $i$ -а сторона з'єднує вершини з номерами  $i$  й  $i+1$ . Нехай  $C$  – окружність із центром  $(x_C, y_C)$  і радіусом  $r_C$ , тоді

$$\Phi^{CK} = \max\{\Phi^{P_i C}, i=1, 2, \dots, m, \psi_j, j=1, 2, \dots, m\} \quad (2.10)$$

де  $\Phi^{P_i C} = \chi_i = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i - r$ ;

$$\psi_i = \min\{\omega_i, \mu_i\};$$

$$\omega_i = (x_C - x_i)^2 + (y_C - y_i)^2 - r^2;$$

$$\mu_i = (\beta_{i-1} - \beta_i)(x_C - x_i) - (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(y_C - y_i) + r(\alpha_{i-1}\beta_i - \alpha_i\beta_{i-1}).$$

Об'єкти  $D$  і коло  $C$ . Нехай задані  $D = T \cap C'$  й довільний опуклий об'єкт  $E$ , тоді у випадку взаємного неперетинання об'єктів  $D$  і  $E$  можливі дві ситуації: або  $C$  не перетинається з  $T$ , або  $C$  не перетинається з  $C'$ . Таким чином,  $\phi$ -функцію  $\Phi^{DE}$  можна подати у вигляді максимуму  $\phi$ -функцій

$$\Phi^{CE} = \max\{\Phi^{CC'}, \Phi^{KC}\}.$$

Об'єкт  $H$  і коло  $C$ . Нехай  $H = K \cap G$ , тоді

$$\Phi^{HC} = \max\{\Phi^{GC}, \Phi^{KC}\}. \quad (2.11)$$

Однак під час побудови  $\phi$ -функцій об'єкт  $V$  може бути поданий у вигляді складного об'єкта двома способами:  $V = H \cap W$  (рис. 2.6 а) і  $V = W \cap G$  (рис. 2.6 б), де  $H$  належить множині базових об'єктів з кутовими розмірами дуг строго меншими  $180^\circ$ . При цьому об'єкти  $H$  й  $G$  дзеркально-симетричні, а об'єкт  $W$ , що відповідає  $V$  не є дзеркально-симетричним і визначає дзеркальну несиметричність  $V$ .

Оскільки  $\phi$ -функції будуються на основі  $\phi$ -функцій (2.9) і (2.10), форма запису яких збігається для  $W$  й  $W'$ , то вирази  $\phi$ -функцій для об'єктів  $V$  і  $V'$  збігаються.

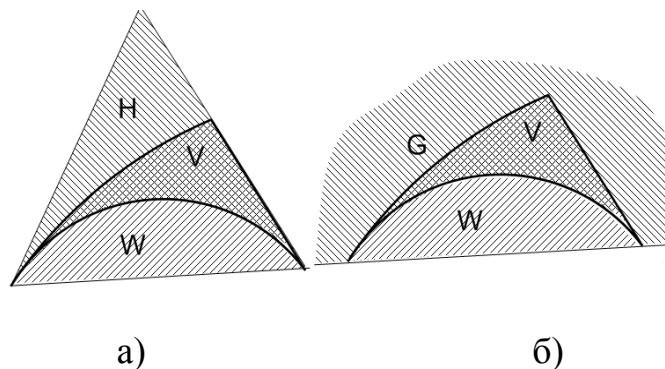


Рисунок 2.5 – Ілюстрація до визначення функції  $\Phi^{VC}$ : а) – співвідношення об'єктів  $W$ ,  $V$  і  $H$ ; б) – співвідношення об'єктів  $W$ ,  $V$  і  $G$

*Phi-Функції для  $V$  і опуклих об'єктів.* Нехай заданий об'єкт  $V = G \cap W$  і коло  $C$ , тоді

$$\Phi^{VC} = \max\{\Phi^{HC}, \Phi^{WC}\} = \max\{\Phi^{GC}, \Phi^{WC}\}. \quad (2.12)$$

### 2.2.3 Моделювання геометричних відношень між сенсорами й областю покриття

Умови належності кола  $C$  довільній області  $\Omega$  в еквівалентному вигляді можна записати як умови взаємного неперетинання  $C$  й області  $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}\Omega$ . Однак область  $\Omega^*$  не обмежена, так що неможливо подати її у вигляді об'єднання базових об'єктів з  $\mathfrak{R}$ , навіть якщо її межа описана набором відрізків прямих і дуг окружностей.

У цьому випадку пропонується використовувати такий універсальний підхід: взяти досить великий прямокутник  $\Pi$ , що містить область  $\Omega$ , і побудувати область  $\Omega^{**} = \Pi \setminus \text{int}\Omega = \Pi \cap \Omega^*$ , після чого розглядати задачу розміщення кіл у прямокутнику  $\Pi$ , а до областей заборони початкової задачі додати область  $\Omega^{**}$ . Оскільки область  $\Omega^{**}$  обмежена, можна для моделювання відношень з нею безпосередньо використовувати підхід, викладений у розділі 2.2.3.

## 2.3 Моделювання відношень покриття

Нехай задані замкнута обмежена множина  $\Omega$  і набір  $n$  кіл  $C_i$ ,  $i=1,2,\dots,I_n$ , радіусом  $r$  із центрами  $u_i = (x_i, y_i)$ . Уведемо вектор змінних  $u = (u_1, \dots, u_n)$  і побудуємо об'єкт  $Y(u) = \bigcup_{i \in I_n} C_i(u_i)$ . За визначенням  $Y(u)$  – покриття множини  $\Omega$ , якщо  $\Omega \subset Y(u) \Leftrightarrow Y^*(u) \cap \Omega = \emptyset$ ,

$$\Upsilon^*(u) = R^2 \setminus \Upsilon(u). \quad (2.13)$$

Таким чином, умову існування *кругового покриття* області  $\Omega$  можна записати у вигляді

$$\Upsilon^*(u) \cap \Omega = \emptyset. \quad (2.14)$$

У монографії [57] запропонований підхід до розв'язання задач покриття, моделювання яких ґрунтується на використанні  $\omega$ -функцій для опису області (2.14). Однак під час використання для  $\omega$ -функції потрібні трудомісткі обчислення площ так званих складених об'єктів, які в загальному випадку являють собою перетинання й об'єднання множин  $C_i$  і  $\Omega$ .

Так,  $\omega$ -функція, що є однією з найпростіших, а саме,  $\omega$ -функція двох кіл  $C_1(x_1, y_1)$  і  $C_2(x_2, y_2)$  з радіусами  $r_1$  і  $r_2$ ,  $r_1 > r_2$  має вигляд

$$\omega^{C_1 C_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \rho_{12} \geq r_1 + r_2, \\ \pi r_2^2, & \text{якщо } \rho_{12} \leq r_1 - r_2, \\ r_1^2 (\arccos \alpha_1 - \alpha_1 \sqrt{1 - \alpha_1^2}) + \\ r_2^2 (\arccos \alpha_2 - \alpha_2 \sqrt{1 - \alpha_2^2}), & \text{якщо } r_1 - r_2 \leq \rho_{12} \leq r_1 + r_2, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\text{де } \rho_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + \rho_{12}^2}{2r_1 \rho_{12}}, \quad \alpha_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + \rho_{12}^2}{2r_2 \rho_{12}}.$$

Крім того, слід зазначити, що функція (2.15) не є гладкою.

Як засіб для моделювання умов покриття можна використовувати метод  $\Phi$ -функцій і записати умову існування покриття як  $\Upsilon^* \cap P = \emptyset \Leftrightarrow \Phi^{\Upsilon^* \Omega} \geq 0$ , де  $\Phi^{\Upsilon^* \Omega}$  –  $\Phi$ -функція об'єктів  $\Upsilon^* = R^2 \setminus \text{int } \Upsilon$  і  $\Omega$ .

Так, у роботах [47, 45] на основі застосування методу  $\phi$ -функцій будуються математичні моделі оптимізаційних задач покриття опуклих

обмежених замкнених двовимірних областей конгруентними опуклими обмеженими замкненими двовимірними об'єктами. Як приклад наводиться аналітичний вигляд нормалізованих  $\phi$ -функцій, необхідних для побудови реалізацій вказаних математичних моделей для задачі покриття базової області (коло, прямокутник, правильний багатокутник, опуклий багатокутник) колами заданого радіуса.

У цих роботах наведені  $\phi$ -функції, які необхідні для побудованих математичних моделей задач покриття довільної області конгруентними колами, зокрема нормалізовані  $\phi$ -функції двох кіл, кола й доповнення до кола, прямокутника й кола й опуклого багатокутника й кола.

Як і у випадку  $\omega$ -функцій, побудова опису області (2.15) в аналітичному вигляді на основі нормалізованих  $\phi$ -функцій є досить складною теоретичною задачею і вимагає значних обчислювальних витрат. Так, наприклад, приведена нормалізована  $\phi$ -функція прямокутника фіксованої орієнтації  $R(x_1, y_1)$  розмірами  $2a \times 2b$  з колом  $C(x_2, y_2)$  з радіусом  $r$  з роботи [47] має вид

$$\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2) = \gamma(x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad (2.16)$$

де  $\gamma(x, y) = \min\{\varphi(x, y), \max\{\chi(x, y), \tilde{\chi}(x, y)\}\}$ ;

$$\varphi(x, y) = \min_{i=1, \dots, 4} \varphi_i(x, y);$$

$$\chi(x, y) = \max_{i=1, \dots, 4} \chi_i(x, y); \quad \tilde{\chi}(x, y) = \max_{i=1, \dots, 4} \tilde{\chi}_i(x, y);$$

$$\varphi_1(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} - r, \quad \varphi_2(x, y) = \sqrt{(x + a)^2 + (y - b)^2} - r;$$

$$\varphi_3(x, y) = \sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2} - r, \quad \varphi_4(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2} - r;$$

$$\chi_1(x, y) = x - A, \quad \chi_2(x, y) = y - B, \quad \chi_3(x, y) = -x - A, \quad \chi_4(x, y) = -y - B;$$

$$\tilde{\chi}_1(x, y) = x + y - s, \quad \tilde{\chi}_2(x, y) = -x + y - s;$$

$$\tilde{\chi}_3(x, y) = -x - y - s; \quad \tilde{\chi}_4(x, y) = x - y - s;$$

$$A = a + r, \quad B = b + r, \quad s = a + b + r, \quad x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1.$$



За рівності радіусів покривних кіл можна скористатися математичною моделлю, яка запропонована в роботі [70]. Модель ґрунтується на використанні діаграм Вороного [227].

Таким чином, побудова області вигляду (2.22) в аналітичному вигляді є нетривіальною задачею і вимагає значних обчислювальних витрат. Через це актуальним стає формулювання критерію покриття в більш зручному для формалізації вигляді.

Не порушуючи загальності виключимо надалі з розгляду покриття, у яких є надлишкові кола, тобто вважаємо, що  $\Omega \not\subset \bigcup C_i, \forall i \in I_n$ . Справді, надлишкові кола за визначенням завжди можуть бути вилучені з покриття без порушення умови покриття. Основні методи виявлення надлишкових кіл і деякі аспекти поліпшення якості кругових покриттів досить докладно висвітлені в роботах [236, 224, 105, 90].

Сформуємо множину точок перетинання окружностей і множину точок перетинання окружностей і межі. В [236] наводиться критерій покриття у такому вигляді: для того щоб множина була круговим покриттям множини, необхідно й досить, щоб будь-яка точка перетинання окружностей належала як мінімум трьом окружностям і кожна точка перетинання окружності і межі області належала як мінімум двом окружностям.

Так, на рис 2.8 а) точка перетинання  $q_1$  окружностей  $frC_1$  і  $frC_2$ , що належить області  $\Omega$ , також належить і колу  $C_2$ , а точка перетинання  $s_2$  окружності  $frC_1$  й межі  $fr\Omega$  належить колу  $C_2$ .

Запропоновані у роботі [162] критерії були перетворені до еквівалентних критеріїв належності спеціальним чином побудованих точок окружностей, що породжують точки перетинання. Так, для покриття, представленого на рис 2.8 б), система обмежень  $q_1 \in C_2, q_2 \in C_1, q_3 \in C_3$  заміняється на еквівалентну систему обмежень  $t_2 \in C_2, t_2 \in C_1, t_2 \in C_3$  а система обмежень  $s_1 \in C_1$  і  $s_2 \in C_2$  – на еквівалентну систему обмежень  $t_1 \in C_2, t_1 \in C_2, t_1 \in \Omega^*$  ( $t_1$  і  $t_2$  – точки зі змінними координатами). Останнє обмеження додане для того, щоб уникнути

можливого порушення повноти покриття в ході процесу оптимізації. У протилежному разі точка  $t_1$  може потрапити усередину області  $\Omega$  й у результаті порушиться умова покриття межі  $\Omega$  (рис. 2.9 а).

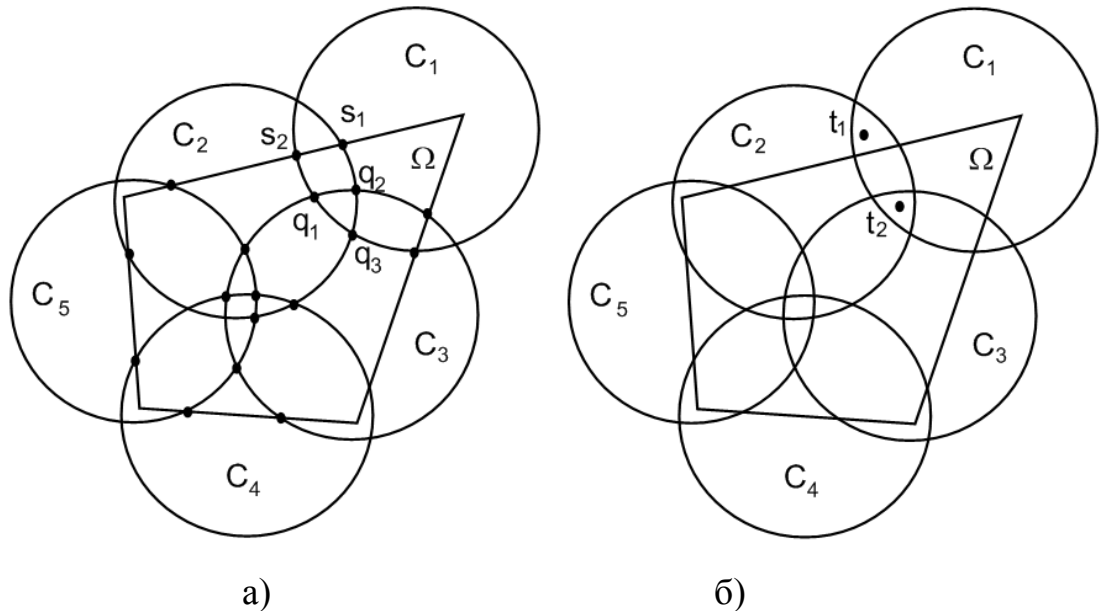


Рисунок 2.6 – Еквівалентні критерії покриття багатокутника колами, що запропоновані: а) – у роботі [235]; б) – у роботі [161]

Як показано в [162], наведена система із двох критеріїв достатня для аналізу статичного розміщення кіл, однак не гарантує збереження припустимості покриття в ході процесу оптимізації (рис. 2.7 б). Тому в [162] уведений третій критерій – належність вершин  $p_k$  межі області  $\Omega$  колам, що покривають область (рис. 2.7 б) .

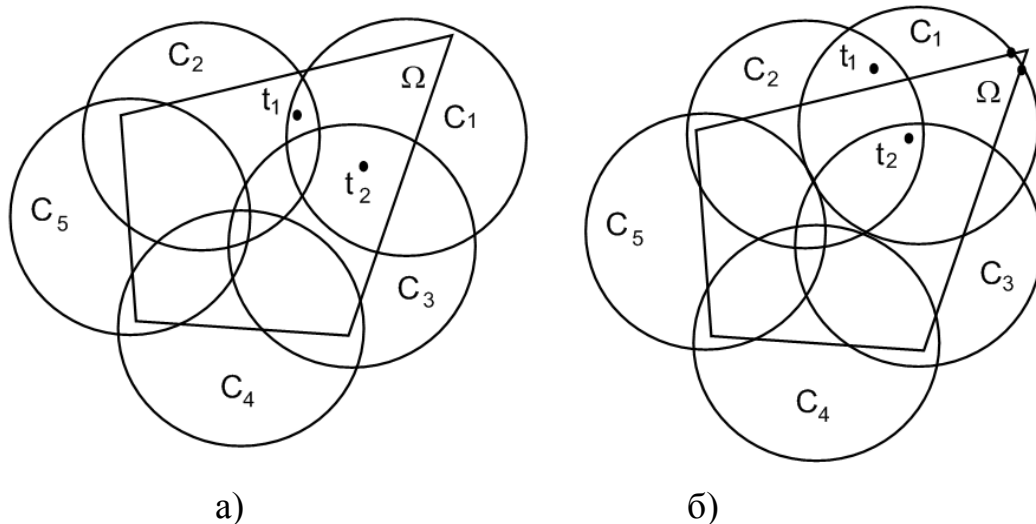


Рисунок 2.7 – Ілюстрація до недостатності критеріїв повноти покриття, наведених у роботі [236] для кіл зі змінними параметрами розміщення: а) – порушення повноти покриття межі  $\Omega$ ; б) – порушення повноти покриття у вершині  $\Omega$

Обмеження, що пропонується, записується у вигляді функції належності точки колу й перешкоджає порушенню повноти покриття та виникненню нових точок перетинання окружностей із межею  $\Omega$  в ході процесу оптимізації.

Проведене в [162] перетворення системи критеріїв дозволяє уникнути обчислення координат точок перетинання окружностей у ході розв'язання оптимізаційної задачі, що значно спрощує обчислення, особливо для випадку змінних радіусів, заданих, як у згаданій роботі, за допомогою сплайн-апроксимацій. Платою за спрощення є зростання розмірності задачі через уведення системи допоміжних точок.

У разі використання кіл однакового радіуса координати точок вигляду  $t_{ijk}$  можуть бути визначені аналітично на основі досить тривіальних геометричних міркувань, що й дозволило сформулювати математичну модель задачі без залучення додаткових змінних.

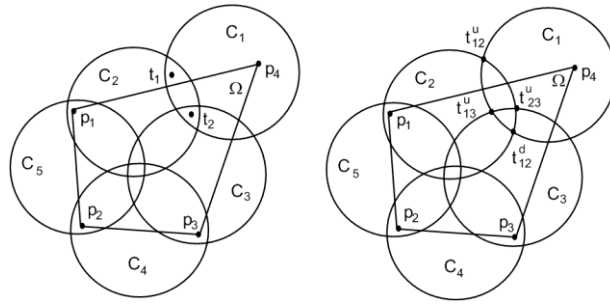


Рисунок 2.8 – Відповідність критеріїв повноти покриття, що були використані для: а) – роботи [161]; б) – даного дослідження

При цьому умови покриття вершин  $\Omega$  залишається незмінним; умови покриття межі виду  $t_1 \in C_2$ ,  $t_1 \in C_2$ ,  $t_1 \in \Omega^*$  зводяться до умови  $t_{12}^+ \in \Omega^*$ , а умови покриття внутрішньої частини області вигляду  $t_2 \in C_2$ ,  $t_2 \in C_1$ ,  $t_2 \in C_3$  пропонуються описувати в аналітичному вигляді за допомогою нової функції, що описує відношення покриття для трьох кіл

$$F_{ijs}^k(x_i, y_i, x_j, y_j, x_s, y_s) = j^{t_{ijk}^{C_s}}(x_i, y_i, x_j, y_j, x_s, y_s) \text{ і } 0, \text{ де}$$

$j^{t_{ijk}^{C_s}}(x_i, y_i, x_j, y_j, x_s, y_s)$  – функція належності точки  $t_{ijk}(x_i, y_i, x_j, y_j)$  колу  $C_s$

,

$t_{ijk}(x_i, y_i, x_j, y_j) = (x_{ijr}, y_{ijk}), k \in \{1, 2\}$  – точка перетинання окружностей  $C_i$  і

$C_j$ ,

$$\begin{aligned} x_{ij1} &= \frac{x_i + x_j}{2} + (y_j - y_i) \sqrt{\frac{r^2}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} - 0.25}, \\ y_{ij1} &= \frac{y_i + y_j}{2} - (x_j - x_i) \sqrt{\frac{r^2}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} - 0.25}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} x_{ij2} &= \frac{x_i + x_j}{2} - (y_j - y_i) \sqrt{\frac{r^2}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} - 0.25}, \\ y_{ij2} &= \frac{y_i + y_j}{2} + (x_j - x_i) \sqrt{\frac{r^2}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} - 0.25}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$j^{t_{ijk}C_s}$  – функції належності точки  $t_{ijk}$  колу  $C_s$ .

Таким чином,

$$F_{ijs}^1 = r^2 - \frac{x_i + x_j}{2} - x_s + (y_i - y_j) \sqrt{\frac{r^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - 0.25} - \frac{y_i + y_j}{2} - y_s - (x_j - x_i) \sqrt{\frac{r^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - 0.25} \quad (2.19)$$

$$F_{ijs}^2 = r^2 - \frac{x_i + x_j}{2} - x_s - (y_i - y_j) \sqrt{\frac{r^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - 0.25} - \frac{y_i + y_j}{2} - y_s + (x_j - x_i) \sqrt{\frac{r^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - 0.25} \quad (2.20)$$

Наведений опис кругового покриття довільного багатокутника може бути узагальнений на випадок покриття довільної області  $\Omega$ .

Сформуємо множину  $P$  точок  $p_k$  межі області  $\Omega$ , у яких порушується гладкість її межі. Позначимо через  $K$  потужність множини  $P$ .

Надалі вважаємо, що кривизна межі в будь-якій її точці, крім точок з  $P$ , менше кривизни кіл з множини  $C$ . У протилежному разі наведених трьох обмежень може виявитися недостатньо, і покриття межі порушиться в процесі оптимізації (рис 2.9). Для ділянок межі з порушенням цієї умови будується зовнішня апроксимація фрагментами кривих меншої кривизни.

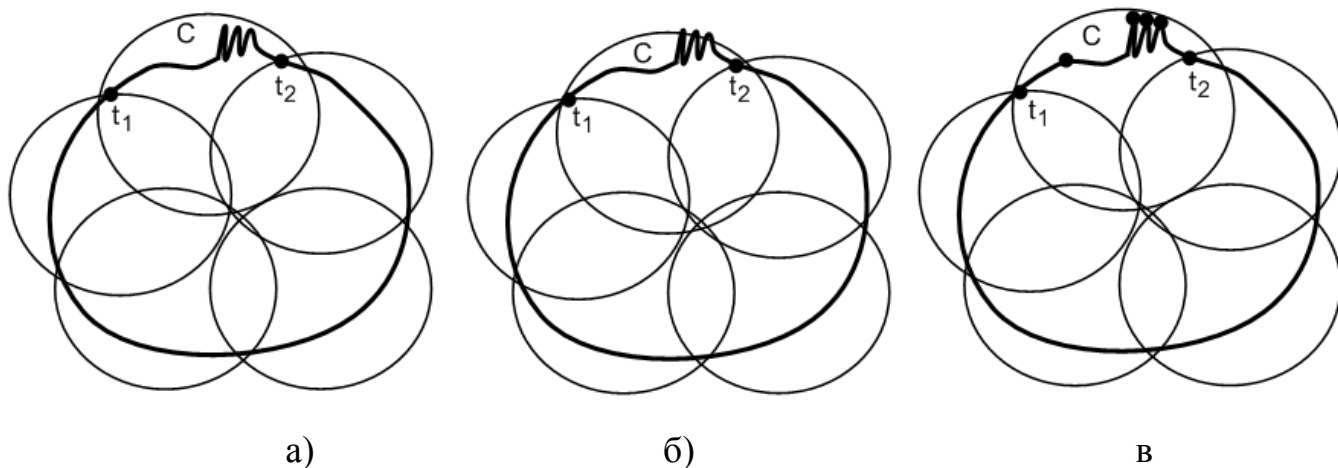


Рисунок 2.9 – Співвідношення кривизни межі й покривного кола: а) – порушення обмеження на кривизну; б) – можливе порушення умови покриття межі; в) – спосіб подолання обмеження на співвідношення кривизни об'єктів

Назвемо кругове покриття невиродженим, якщо ніякі із трьох меж об'єктів (включаючи межу  $\Omega$ ) не перетинаються в одній точці.

Слід зазначити, що для виродженого покриття  $\hat{Y}$  завжди можна побудувати еквівалентне невироджене покриття  $Y$ , збільшивши радіус кожного з кіл, що формують покриття, на досить малу строго позитивну величину  $\varepsilon$ . Тут під еквівалентністю розуміється те, що математична модель, яка описує покриття  $Y$ , адекватна також для покриття  $\hat{Y}$ . Через це надалі будемо розглядати тільки невироджені покриття.

**Критерій покриття.** Для того, щоб множина  $Y = \bigcup_{i=1}^n C_i$  була невиродженим круговим покриттям множини  $\Omega$ , необхідно й досить, щоб

- кожна точка  $p_k \in P$  належала хоча б одному об'єкту  $\text{int } C_i, i \in I_n$ ;
- кожна точка  $t \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } \Omega, i \in I_n$ , належала хоча б одному об'єкту  $\text{int } C_j, j \in I_n, i \neq j$ ;
- кожна точка  $t \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } C_j, i, j \in I_n, i \neq j$ , що належить  $\text{int } \Omega$ , належала хоча б одному об'єкту  $\text{int } C_s, s \in I_n, s \neq i, s \neq j$ .

Оскільки за формалізації умов покриття інтенсивно використовуються функції належності, вони будуть розглянуті в наступному параграфі.

## 2.4 Функції належності

Слід зазначити, що існують ефективні методи визначення належності точки об'єкта, що ґрунтуються в основному на варіаціях двох основних методів: трасування променя [130] і підсумовування кутів [156]. Однак істотним недоліком цих методів є неможливість одержання опису умови належності точки об'єкта в аналітичному вигляді, що робить їх непридатними для використання під час розв'язання класичних задач математичного програмування.

Візьмемо  $\phi$ -функцію  $\Phi^{CA}$  кола  $C$  з радіусом  $r$  із центром у точці  $t$  й довільного об'єкта  $A$ . Тоді функцію належності  $\phi^{tA}$  точки  $t$  об'єкту  $A$  можна визначити як функцію  $\Phi^{CA^*}$ ,  $A^* = R^2 \setminus \text{int } A$  за умови  $r = 0$ . Слід зазначити, що побудована функція не є  $\phi$ -функцією, оскільки для одного з об'єктів (точки) порушуються вимоги збігу гомотопичних типів внутрішності й замикання.

Таким чином, функцією належності  $\phi^{tA}$  точки множини  $A$  називається функція, для якої виконується умови:  $\phi^{tA} < 0$ , якщо  $t \notin A$ ;  $\phi^{tA} = 0$ , якщо  $t \in \text{fr}A$ ;  $\phi^{tA} > 0$ , якщо  $t \in \text{int } A$ .

Наприклад, для кола  $C$  радіуса  $r$  із центром у точці  $(x_c, y_c)$  функція належності точки  $t = (x_t, y_t)$  може бути подана у вигляді

$$\phi^{tC} = r^2 - (x_c - x_t)^2 - (y_c - y_t)^2. \quad (2.21)$$

Позначимо  $\Omega^* = R^2 \setminus \text{int } \Omega$ . Із властивостей  $\phi$ -функції [98] безпосередньо випливає, що:

$$\text{якщо } \Omega = \bigcap_{i=1}^m \Omega_i, \text{ то } \phi^{t\Omega} = \min_{i=1, \dots, m} \phi^{t\Omega_i} \text{ й } \phi^{t\Omega^*} = \max_{i=1, \dots, m} \phi^{t\Omega_i^*}; \quad (2.22)$$

$$\text{якщо } \Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i, \text{ то } \phi^{t\Omega} = \max_{i=1, \dots, m} \phi^{t\Omega_i} \text{ й } \phi^{t\Omega^*} = \min_{i=1, \dots, m} \phi^{t\Omega_i^*}. \quad (2.23)$$

Введемо, за аналогією з  $\phi$ -функціями, нормалізовану функцію належності  $\bar{\phi}^{tA}$  для якої виконується:  $\bar{\phi}^{tA} = -\text{dist}(t, A)$ , якщо  $t \notin A$ ;  $\bar{\phi}^{tA} = \text{dist}(t, A^*)$ , якщо  $t \in A$ , і псевдонормалізовану, для якої справедливо

$$\phi_+^{tA} < 0, \text{ якщо } \text{dist}(t, A^*) < \rho,$$

$$\phi_+^{tA} = 0, \text{ якщо } \text{dist}(t, A^*) = \rho,$$

$$\phi_+^{tA} > 0, \text{ якщо } \text{dist}(t, A^*) > \rho,$$

де  $\rho > 0$  – мінімально припустима відстань,

$$\text{dist}(t, A) = \min_{p \in A} \text{dist}(t, p),$$

$$\text{dist}(t, A^*) = \min_{p \in A^*} \text{dist}(t, p),$$

$$\text{dist}(t, p) = \sqrt{(x_t - x_p)^2 + (y_t - y_p)^2}.$$

Прикладом нормалізованої функції належності може служити функція  $\bar{\phi}^{tC} = r - \sqrt{(x_C - x_t)^2 + (y_C - y_t)^2}$ , а псевдонормалізованої функції належності – функція  $\phi_+^{tA} = (r - \rho)^2 - (x_C - x_t)^2 - (y_C - y_t)^2$ .

Нормалізовані й псевдонормалізовані функції належності служать для моделювання умов знаходження точки  $t$  в області  $A$  на відстані до межі області не меншої заданої мінімально припустимої відстані  $\rho$ .

За аналогією з квазі $\phi$ -функціями уведемо також функцію квазіналежності  $\phi^{tA}$ , яка залежить від вектора додаткових змінних  $q \in R^s$  і має



таку властивість, що функція  $\max_{q \in R^g} \phi'^{tA}$  є функцією належності. Відповідно, нормалізованою функцією квазіналежності називається функція  $\bar{\phi}'^{tA}$ , для якої  $\max_{q \in R^g} \bar{\phi}'^{tA}$  є нормалізованою функцією належності, а псевдонормалізованою функцією квазіналежності називається функція  $\phi'_+$ , якщо  $\max_{q \in R^g} \phi'_+$  є псевдонормалізованою функцією належності.

Функції квазіналежності дозволяють переформулювати деякі функції належності без використання операцій максимуму, а також значно спростити запис інших функцій належності. Наслідком цього є зростання розмірності задачі.

Слід зазначити, що для всіх різновидів побудованих функцій залишаються справедливими умови вигляду (2.22)–(2.23).

## Висновки по розділу 2

З метою визначення можливої похибки задання вихідних даних виконано моделювання сенсорної зони пожежного сповіщувача з урахуванням пожежного навантаження у приміщенні та особливостей розвитку пожежі. Під час визначення радіуса зони дії пожежного сповіщувача проявляються похибки визначення радіуса сенсорної зони. Відповідно, значення радіуса задаються у вигляді інтервалу.

З метою подальшого розв'язання задачі сенсорного покриття було досліджено засоби математичного моделювання для формалізації геометричних відношень між сенсорами та засоби математичного моделювання для формалізації умов розміщення датчика в області складної форми із зонами заборони, досліджено існуючі засоби математичного моделювання для формалізації відношень покриття довільної області колами однакового радіуса. Як основний засіб математичного моделювання було використано математичний апарат  $\phi$ -функцій.

Запропоновано нові критерії повноти кругового покриття області складної форми.

Побудовано функцію для опису в аналітичному вигляді відношень покриття для трьох кіл однакового радіуса.

Запропоновано нові засоби математичного моделювання для опису в аналітичному вигляді відношень кіл й області складної покривної форми, що базуються на використанні функцій належності, для чого було уведено нові функції належності.

Для формулювання математичних моделей задач покриття множини конгруентними інтервальними колами (заданими з похибкою) було наведено необхідні поняття інтервальної геометрії та побудовано інтервальні  $\phi$ -функції.

## РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ПОКРИТТЯ ТА МЕТОД ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 3.1 Побудова математичної моделі

Нехай задана замкнута обмежена область  $\Omega \subset R^2$  із кусково-гладкою межею, яка сформована  $L$  фрагментами аналітично описаних кривих (наприклад, відрізками прямих і дугами окружностей), і множина кіл  $C = \{C_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Кількість фрагментів  $L$  може дорівнювати одиниці (а  $\Omega$  являти собою, наприклад, коло). Далі передбачається, що  $C_i = C_i(u_i) = C_i(x_i, y_i)$ , точка  $u_i$  збігається із центром  $C_i$ . Вектор  $u_i$  називається вектором трансляції, або вектором параметрів розміщення кола  $C_i$ . Нагадаємо, що об'єднання  $Y = \bigcup_{i=1}^n C_i$  називається круговим покриттям області  $\Omega$ , якщо  $\Omega \subseteq Y$ .

Постановка задачі. Знайти покриття  $Y$  області  $\Omega$ , що задовольняє системі технологічних обмежень, які накладаються на вектор параметрів розміщення кіл, є оптимальним відповідно до деякого критерію якості  $F(u), u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

З очевидних міркувань виключимо надалі з розгляду покриття, у яких є надлишкові кола, тобто вважаємо, що  $\Omega \not\subset Y \setminus C_i, \forall i \in I_n$ .

Також не порушуючи загальності для спрощення викладень не будемо розглядати покриття, для яких хоча б одна із меж компонентів зв'язності  $\Omega$  не має спільних точок із межами кіл з  $Y$ . Якщо така ситуація зустрічається, то або відповідна компонента зв'язності покрита одним колом і може бути виключена з розгляду, або умова покриття для даної компоненти не виконується.

Сформуємо множину  $P$  точок  $p_k$ , у яких порушується гладкість меж  $\Omega$ , і позначимо через  $K$  потужність множини  $P$ .

Надалі вважаємо, що кривизна межі області в будь-якій її точці, крім точок з  $P$ , менша за кривизну кіл з множини  $C$ . Для ділянок межі з

порушенням цієї умови будується зовнішня апроксимація фрагментами кривих меншої кривизни.

Перепишемо критерій повноти покриття, сформульований у попередньому розділі, у такому вигляді: для того щоб множина  $\Upsilon = \bigcup_{i=1}^n C_i$  була невідродженим круговим покриттям множини  $\Omega$ , необхідно й достатньо, щоб:

- для кожної точки  $p_k \in P$  знайшлося хоча б одне коло  $C_i, i \in I_n$ , таке, що  $p_k \in \text{int } C_i$ ;
- для будь-якої точки  $t_{ik}^* \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } \Omega, i \in I_n, k \in \{1, 2\}$  знайшлося хоча б одне коло  $C_{j_k}, j \in I_n, i \neq j$ , таке, що  $t_{ik}^* \in \text{int } C_{j_k}$  й, відповідно, точка  $t_{ijk} \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } C_j$  належить  $\Omega^*$ ;
- для будь-якої точки  $t_{ijk} \in \text{fr } C_i \cap \text{fr } C_j, i, j \in I_n, i \neq j, t_{ijk} \in \text{int } \Omega, k \in \{1, 2\}$ , існує  $C_{s_k}, s \neq i, s \neq j$ , таке що,  $t_{ijk} \in \text{int } C_{s_k}$ .

Використовуючи кола однакового радіуса, координати точок вигляду  $t_{ijk}$  можуть бути визначені аналітично на основі виразів вигляду (2.25)-(2.26), а відповідні функції належності переписані у вигляді (2.27)-(2.28).

Під час побудови математичної моделі виконання першого критерію забезпечується додаванням у систему обмежень задачі нерівностей вигляду  $\varphi^{p_k C_i} \geq 0$ , другого критерію – нерівностей вигляду  $\varphi^{t_{ik}^*} \geq 0$ , третього критерію – нерівностей вигляду  $\varphi^{t_{ijk}} \geq 0$ , де  $\varphi^{p_k C_i}, \varphi^{t_{ik}^*}$  – функції належності а  $\varphi^{t_{ijk}}$ , залежно від виду області  $\Omega^*$ , може бути функцією належності або квазіфункцією належності.

У [162] наводиться математична модель задачі покриття багатокутної множини колами різних радіусів для розв'язання задачі оптимізації протипожежного моніторингу лісових масивів з урахуванням рельєфу. При цьому радіуси й координати центрів кіл задаються за допомогою сплайнів для моделювання залежності радіуса від рельєфу місцевості зон виявлення сенсорів. Спираючись на ідею математичної моделі, сформульованої в [162],

побудуємо математичну модель покриття області  $\Omega$   $n$  круговими зонами однакового радіуса.

Нехай дано невироджене покриття  $\Upsilon$  області  $\Omega$  колами однакового радіуса й необхідно оптимізувати деякий критерій якості. Якщо  $\Upsilon$  не містить у собі  $\Omega$ , можна збільшувати радіус формуючих  $\Upsilon$  кіл доти, доки не буде вдоволеній критерій покриття.

Побудуємо для покриття  $\Upsilon$  такі індексні множини:

– множина  $\Xi_1$ , елементами якої є пари чисел, що складаються з номерів точок з множини  $P$  й номерів кіл, що задовольняють умови пункту 1 критерію покриття області колами;

– множина  $\Xi_2$ , елементами якої є трійки чисел, що складаються з номерів двох кіл, що перетинаються, і номерів точок перетинання кіл, що задовольняють умови пункту 2 критерію покриття області колами;

– множина  $\Xi_3$ , елементами якої є четвірки чисел, що складаються з номерів трійок кіл, що перетинаються, і номерів точок перетинання, що задовольняють умови пункту 3 критерію покриття області колами.

Тоді на підставі засобів моделювання відношень між об'єктами в задачах кругового покриття у вигляді  $\phi$ -функцій, квазі $\phi$ -функцій, функцій належності й квазіфункцій належності, що розглянуті у попередньому розділі, досить загальна математична модель задачі покриття може бути записана у вигляді

$$\underset{u \in W \subset R^\sigma}{extr} F(u), \quad (3.1)$$

$$W = \{u \in R^\sigma : \varphi^{t_{ijk}\Omega^*} \geq 0, \Phi_{-}^{C_i C_j} \geq 0 \forall (i, j, k) \in \Xi_1, \\ F_{ijs}^k \geq 0, \Phi_{-}^{C_i C_j} \geq 0 \forall (i, j, s, k) \in \Xi_2, \varphi^{p_k C_i} \geq 0 \forall (i, k) \in \Xi_3, \Psi \geq 0\}, \quad (3.2)$$

де  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n, t)$  – вектор змінних задачі;

$\sigma = 2n + l$  – розмірність задачі;  $l$  – кількість додаткових змінних

$u_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  – координати центру  $i$ -го кола;

$t$  – вектор допоміжних змінних задачі з розмірністю  $l$ ;

$F(u)$  – довільна гладка функція цілі, конкретний вигляд якої залежить від умов задачі;

$\varphi^{p_k C_i}$  – функції належності;

$\varphi^{t_{ik} \Omega^*}$  – функції (або квазіфункції) належності;

$F_{ijs}^k$  – функції виду (2.27)-(2.28), що моделюють відношення між покривними колами для внутрішньої частини області;

$\Phi_{-}^{C_i C_j} = 4r^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2$  – умови розміщення пари кіл на максимально припустимій відстані  $\rho = 0$ ;

$\Psi(u)$  – система для моделювання обмежень на розміщення датчиків як фізичних об'єктів.

Нижче виділені й досліджені важливі із практичної точки зору реалізації узагальненої моделі (3.1)-(3.2).

### 3.1.1 Моделювання задачі оптимізації довжини провідної мережі

Для моделювання задачі оптимізації провідної сенсорної мережі для системи пожежних сповіщувачів модель (3.1)–(3.2) змінюється так:

– у систему додаткових обмежень вносяться умови належності сенсорів області з урахуванням мінімально припустимих відстаней до межі області (у загальному випадку описуються за допомогою мінімакських  $\phi$ -функцій);

– у систему додаткових обмежень вносяться умови неналежності центрів сенсорів областям заборони (у загальному випадку описуються за допомогою мінімакських  $\phi$ -функцій);

– у систему додаткових обмежень задачі вносяться мінімально припустимі відстані між центрами сенсорів (описуються за допомогою всюди гладкої  $\phi$ -функції);

– мінімізується функція цілі, що являє собою довжину траси.

Відповідні послідовності кіл для кільцевого та радіального типів дровових з'єднань розраховуються шляхом розв'язання допоміжних задач комівояжера та задачі маршрутизації відповідно.

Для кільцевого типу дровових з'єднань функція цілі може бути записана у вигляді  $\rho(u_0, u_{m_1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho(u_{m_i}, u_{m_{i+1}}) + \rho(u_{m_n}, u_0)$ , де  $m_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  – номери кіл,  $m_i \neq m_j, i \neq j$ ;  $\sum_{i=1}^{n-1} \rho(u_{m_i}, u_{m_{i+1}})$  – сума відстаней між центрами кіл, взятих у певній послідовності  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ;  $\rho(u_0, u_{m_1})$  і  $\rho(u_{m_n}, u_0)$  – відстані від точки початку траси  $u_0$  до центра першого й останнього в обраній послідовності кола відповідно. Для радіального типу провідних з'єднань функція цілі може бути представлена у вигляді  $\sum_{q=1}^Q (\rho(u_0, u_{m_1^q}) + \sum_{i=1}^{n_q-1} \rho(u_{m_i^q}, u_{m_{i+1}^q}))$  де  $Q$  – кількість шлейфів;  $m_i^q \in \{1, 2, \dots, n\}$  – номери кіл,  $m_i^q \neq m_j^q, i \neq j, q = 1, 2, \dots, Q$ ,  $m_i^{q_1} \neq m_j^{q_2}, q_1 \neq q_2, q_1, q_2 = 1, 2, \dots, Q$ ,  $\sum_{q=1}^Q n_q = n$ ; доданок  $\sum_{i=1}^{n_q-1} \rho(u_{m_i^q}, u_{m_{i+1}^q})$  – сума відстаней між центрами кіл, узятих у певній  $q$ -й послідовності  $m_1^q, m_2^q, \dots, m_{n_f}^q$ ;  $\rho(u_0, u_{m_1^q})$  – відстань від точки початку траси  $u_0$  до центра першого в  $q$ -ій послідовності кола. Тут  $\rho(u_1, u_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  – відстань між точками  $u_1$  й  $u_2$ .

### 3.1.2 Моделювання задачі мінімізації радіуса покривних кіл

Задача мінімізації радіуса кіл у покритті виникають під час проектування сенсорних мереж у випадку, якщо необхідне коригування розміщення кіл, що не задовольняють критерій повноти покриття. Подібні ситуації можуть виникати під час розв'язання задачі формування покриття наближеними

методами або в інтерактивному режимі. Задача мінімізації радіуса покривних кіл має також самостійне значення, і її розв'язанню присвячена значна кількість робіт у світовій літературі.

У модель вигляду (3.1)–(3.2) вноситься дуже проста зміна – радіус кіл  $r$  оголошується змінним, розмірність задачі збільшується на 1 та мінімізується функція  $F(u) = r$ .

Для задач проектування сенсорних мереж можуть бути внесені зміни в систему додаткових обмежень, перераховані в пунктах 1-3 попереднього параграфа.

### 3.1.3 Моделювання задачі мінімізації кількості покривних кіл

Задача мінімізації кількості кіл заданого радіуса, що формують покриття області  $\Omega$ , має досить велику практичну значимість, тому що дуже часто виникає за оптимізації покриттів, побудованих наближеними методами або отриманих в інтерактивному режимі.

У рамках даного дослідження розглядався такий підхід: вибирається одне з кіл (абсолютно випадково, за оцінкою  $\omega$ -функції або оператором) і виконується спроба зменшення його радіуса до 0 зі збереженням покриття області множиною кіл. Якщо операція завершилася успішно, коло викреслюється з множини кіл, що формують покриття, і здійснюється перехід до оптимізації нового покриття. У протилежному разі здійснюється спроба видалити інше коло з покриття. Процедура повторюється певне число раз.

На перший погляд, модель вигляду (3.1)–(3.2) не можна застосовувати для розв'язання даної задачі, оскільки вона передбачає однакові радіуси для всіх кіл, що беруть участь у покритті. Проблема може бути розв'язана, якщо під час побудови математичної моделі виключити радіус обраного кола з розгляду.

Нехай здійснюється спроба видалити  $i$ -е коло. Спочатку для моделювання задачі мінімізації кількості кіл з індексних множин  $\Xi_1$ ,  $\Xi_2$  і  $\Xi_3$  віддаляються елементи, що містять номер кола  $i$ , Потім будується модель



вигляду (3.1)–(3.2) за винятком, хіба що, формування функції цілі (рис. 3.1 а). Після побудови із системи додаткових обмежень віддаляються всі обмеження на положення сенсора для обраного кола (таким чином, його центр може виходити за межі області або потрапляти в зони заборони). Формується функція цілі, що являє собою суму відстаней (або суму квадратів відстаней) від точки  $u_i$  до точок, на положення яких накладали обмеження у виключених з розгляду функціях належності (рис. 3.1 б), яку необхідно мінімізувати. Якщо в ході розв’язання задачі вдалося досягти глобального мінімуму функції цілі (значення 0), то  $i$ -е коло «схлопнулося» і може бути виключено з розгляду (рис. 3.1 в).

### **3.1.4 Моделювання задачі коригування неприпустимого розміщення сенсорів**

Дана задача також має велике практичне значення, тому що часто виникає під час розміщення сенсорів в області, що отримана наближеними методами або в інтерактивному режимі.

Для побудови математичної моделі для задачі коригування неприпустимого розміщення сенсорів уводиться додаткова змінна  $\lambda$ , після чого будується математична модель задачі вигляду (3.1)–(3.2). За генерації системи технологічних обмежень на положення сенсорів в області визначається, чи виконуються додаткові обмеження задачі вигляду  $\psi(u) \geq 0$  для стартової точки  $u = u^0$ . Якщо виконуються, то вони включаються в систему обмежень задачі, у противному разі в систему обмежень задачі включається обмеження вигляду  $\lambda \leq \psi(u)$ . Максимізується функція цілі  $F(u) = \lambda$  за умови  $\lambda \leq 0$ .

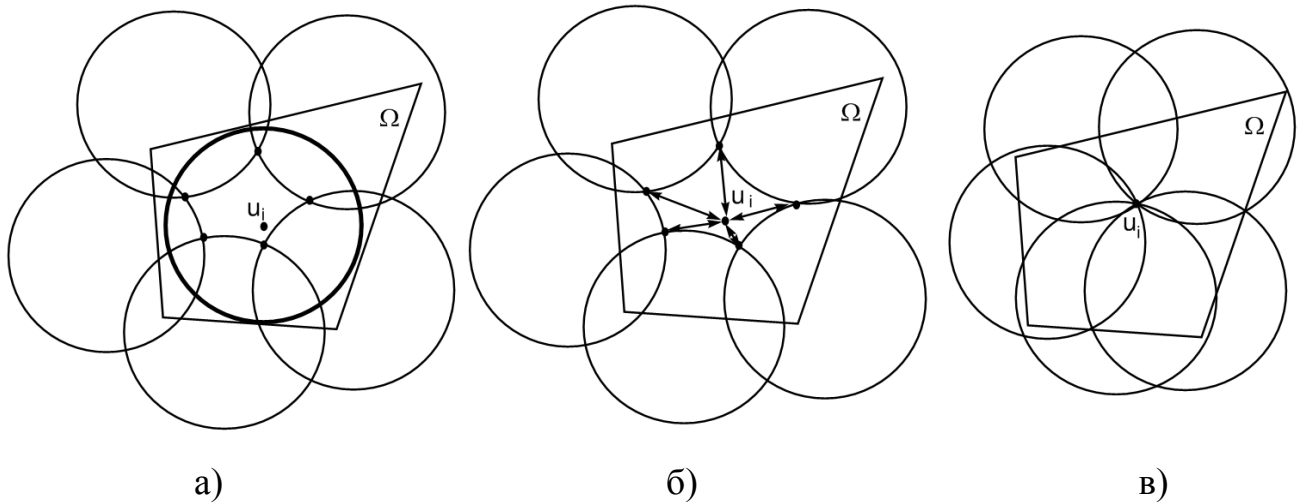


Рисунок 3.1 – Мінімізація числа покривних кіл: а) – виділені обране коло  $C_i$  й точки перетинання меж об'єктів, які повинні належати йому за критерієм повноти покриття; б) – вилучені умови покриття для розглянутого кола й сформульована функція цілі у вигляді суми відстаней; в) – у результаті оптимізації вдалося виключити коло без порушення умови покриття області  $\Omega$

Якщо додаткова змінна  $\lambda$  досягає 0, то отримана точка  $u^*$  є припустимою для вихідної задачі, оскільки всі обмеження у  $u^*$  виконуються. Відповідно її можна включати до переліку тих, що розглядаються під час розв'язання задачі сенсорного покриття довільної області колами, центри яких пов'язані мережею дротів.

### 3.1.5 Моделювання задачі оптимізації щільності покриття

Задача виникає за необхідності підвищити надійність системи. Здійснюється це за рахунок підсилення області взаємного перекриття сенсорних зон датчиків. Для даного випадку задачі будується стандартна система обмежень, що відповідає вимогам розглянутої задачі. У процесі розв'язання мінімізується максимальна з відстаней від крапок до центрів відповідних кіл, що визначаються індексними множинами  $\Xi_1$ ,  $\Xi_2$  і  $\Xi_3$ .

Зустрічаються також практичні задачі, у яких необхідно мінімізувати щільність покриття. Тоді під час розв'язання максимізується мінімальна з відстаней, від точок до центрів відповідних кіл, що визначаються індексними множинами  $\Xi_1$ ,  $\Xi_2$  і  $\Xi_3$ .

Для формалізації умов мінімаксної (максимінної) задачі використовується додаткова змінна.

### 3.2 Дослідження властивостей побудованої моделі

Досліджуємо отриману модель. У загальному випадку задача (3.1)–(3.2) являє собою задачу негладкої оптимізації. Це пояснюється тим, що принаймні одна з розглянутих в описі області припустимих розв'язків задачі функція, а саме функція  $\varphi^{t_{ijk}\Omega^*}$ , в загальному випадку є мінімаксною.

У деяких випадках (наприклад, коли кожна з компонентів зв'язності області  $\Omega$  описана одною аналітичною нерівністю) модель (3.1)–(3.2) описує класичну задачу нелінійного програмування.

В інших випадках (наприклад, коли всі компоненти  $\Omega$  є опуклими багатокутниками) модель (3.1)–(3.2) описує класичну задачу нелінійного програмування після заміни в (3.2) функції належності  $\varphi^{t_{ijk}\Omega^*}$  на функцію квазі-належності  $\varphi'^{t_{ijk}\Omega^*}$ . Наслідком цього є зростання розмірності задачі.

Якщо (з міркувань надійності) задані максимально припустимі відстані між сусідніми сенсорами, то в моделі (3.1)–(3.2) здійснюється додавання відповідних псевдонормалізованих функцій.

Помітимо, що умови вигляду  $\Phi_{-}^{C_i C_j} \geq 0$  забезпечують існування в ході розв'язання задачі точок перетинання обраних пар об'єктів.

Основні властивості побудованої математичної моделі.

1. Розмірність  $\sigma$  задачі без урахування додаткових змінних дорівнює  $2n$ .
2. Область припустимих розв'язків  $W$  у загальному випадку є незв'язною множиною. У найпростішому випадку незв'язність множини  $W$  виникає під час

розгляду незв'язної покривної області  $\Omega$ , за умови належності  $\Omega$  центрів кіл, що беруть участь у покритті.

3. Кожний компонент зв'язності  $W$  може бути багатозв'язним. У найпростішому випадку багатозв'язність  $W$  виникає за наявності областей заборони для центрів розміщуваних кіл.

4. Задача (3.1)–(3.2) у загальному випадку нестійка, тобто як завгодно мала зміна початкових даних може призвести до значної зміни функції цілі.

5. Оскільки у формули квазіфункцій належності входять тригонометричні функції, межа області  $W$  формується нелінійними поверхнями.

6. Оскільки область  $W$  незв'язна (пункт 2) і кожна компонента зв'язності може бути багатозв'язною (пункт 3) і неопуклою, то задача (3.1)–(3.2) у загальному випадку є багатоекстремальною.

7. За способом побудови область припустимих розв'язків  $W$  може бути подана у вигляді об'єднання підобластей вигляду

$$W = \bigcup_{k=1}^{\eta} W_k, \quad (3.3)$$

де  $W_k$  описується системою нерівностей.

Кількість підобластей  $\eta$  може досягати значних величин.

8. Подання (3.3) дозволяє звести розв'язання задачі (3.1)–(3.2) до розв'язання низки задач нелінійного програмування, а саме:

$$F(u) = \min\{F(u^{*1}), \dots, F(u^{*k}), \dots, F(u^{*\eta})\}, \quad (3.4)$$

$$F(u^{*k}) = \min_{u \in W_k \subset R^\sigma} F(u). \quad (3.5)$$

9. Кожна з  $\eta$  підзадач (3.5) у загальному випадку є багатоекстремальною.

З урахуванням особливостей математичної моделі задачі покриття пропонується використовувати стратегію розв'язання задачі, що складається з набору послідовних кроків, які наведені нижче.

Крок 1. Генерується набір стартових точок з області припустимих розв'язків задачі (3.1)-(3.2).

Крок 2. Для кожної зі стартових точок будується модель вигляду (3.1)-(3.2).

Крок 3. Шукається локальний мінімум функції цілі  $F(u)$  задачі (3.1)-(3.2), стартуючи із точок, що отримані на кроці 1, і застосовуючи процедуру локальної оптимізації з перетворенням області припустимих розв'язків, описану нижче.

Крок 4. Вибираємо кращий з отриманих на кроці 3 локальних розв'язків як наближення до глобального розв'язку задачі (3.1)-(3.2).

### **3.3. Метод розв'язання задачі**

Стратегія розв'язання задачі, що пропонується, ґрунтується на застосуванні методу мультистарту (multistart method) [115], який є основним методом випадкового пошуку глобального екстремуму багатовимірних функцій і полягає в такому:

– з використанням інтерактивних й/або евристичних методів будується множина  $n$  стартових точок. Слід зазначити, що під час використання для пошуку локальних екстремумів стартових точок з області припустимих розв'язків задачі досягається істотна економія обчислювальних ресурсів і підвищується збіжність використовуваних методів нелінійної оптимізації. Опису методів побудови стартових точок з області припустимих розв'язків задачі (3.1)–(3.2) присвячений наступний розділ;

– на основі аналізу інформації про кожну стартову точку генеруються системи нелінійних обмежень і функції цілі для однієї або послідовно для

декількох задач нелінійного програмування, описаних у параграфах 3.1.1–3.1.5, і виконується пошук локального екстремуму для кожної з них;

– кращий з отриманих локальних екстремумів вибирається як наближення до глобального екстремуму задачі.

Принципова схема пошуку локального мінімуму для оптимізаційної задачі другого етапу під час старту з довільної точки може бути записана у вигляді послідовності кроків, що наведені нижче.

1. Аналізуються умови покриття області колами, що описані в розділі 2. Якщо умови покриття порушуються, то виконується перехід до кроку 2, інакше – перехід до кроку 5.

2. Будується припустиме покриття на основі неприпустимого шляхом збільшення радіуса покривних кіл.

3. Генерується система обмежень і цільова функція задачі корекції неприпустимого покриття вигляду (3.1)–(3.2), що описана в параграфі 3.1.2. Технологічні обмеження на даному етапі ігноруються. Цільова функція – мінімізація радіуса покривних кіл до значення, заданого у вихідній постановці задачі.

4. Розв'язується задача, яка побудована на попередньому кроці. Якщо в результаті вдалося побудувати припустиме покриття, то побудована точка приймається як стартова й здійснюється перехід до кроку 5, інакше аварійне завершення роботи програми.

5. Аналізується виконання системи технологічних обмежень для задачі побудови системи пожежної сигналізації. Якщо технологічні обмеження порушуються, перехід до кроку 6, інакше перехід до кроку 8.

6. Генерується система обмежень і цільова функція для задачі корекції порушення технологічних обмежень вигляду (3.1)–(3.2), що описана в параграфі 3.1.4.

7. Розв'язується побудована на попередньому кроці задача нелінійного програмування. Якщо в результаті вдалося виправити порушення технологічних обмежень за збереження допустимості покриття, то побудована

точка приймається як стартова й здійснюється перехід до кроку 8, інакше аварійне завершення роботи програми.

8. Генерується система обмежень і цільова функція для однієї з оптимізаційних задач вигляду (3.1)–(3.2), описаних у параграфах 3.1.1, 3.1.3, 3.1.5. Конкретний вигляд моделі визначається постановкою вихідної практичної задачі.

9. Розв'язується побудована на попередньому кроці задача нелінійного програмування.

Огляд останніх досягнень у наближених методах розв'язання TSP, включаючи алгоритми апроксимації, методи нейронної мережі, метаевристику й гібридизацію метаевристики, дозволяє зробити висновок, що TSP метаевристичний підхід є конкурентним й ефективним. Метод розв'язання повинен ґрунтуватися на стратегіях диверсифікованості й інтенсифікації, адаптованій схемі пошуку в декількох сусідніх просторах, усуненні повернення до вже відвіданих розв'язків.

Існує кілька програмних пакетів з відкритим вихідним кодом для розв'язання задачі комівояжера (TSP). Вільно доступним і таким, що широко використовується, є пакет Concorde – точний рахувальник для TSP. Він здатний знайти оптимальні розв'язки для задач із майже 100 000 вузлів [112, 111]. Вихідний код C для Concorde був розроблений групою із семи авторів і може бути завантажений для академічних досліджень. Concorde також надає інтерактивний графічний інтерфейс для Windows. Код містить евристичні методи побудови маршруту й реалізує швидкі, спеціалізовані алгоритми лінійного й цілочислового програмування, щоб знайти доказово оптимальні розв'язки.

Другий код для розв'язання TSP – пакет Lin-Kernighan-Helsgaun (LKH), розроблений Helsgaun [155]. Автор забезпечує оптимізовану реалізацію оригінальної евристики Lin-Kernighan [208] і розширює її декількома способами. Хоча код LKH і не реалізує точні методи, за його допомогою отримані оптимальні тури для задач із до 85 000 вузлами. LKH відповідає за

поточне найвідоміше розв'язання для World TSP з майже двома мільйонами вузлів. Код LKH вільно доступний для академічних цілей. Користувачі можуть одержати вихідний код, а також попередньо скомпільований виконавчий файл Windows із сайту Helsgaun [155].

Задачу побудови радіального з'єднання можна подати у вигляді варіанта задачі маршрутизації (без повернення в стартову точку), якщо інтерпретувати центри кіл як пункти доставки з потребою в 1 одиницю вантажу й обмежити вантажопідйомність транспорту максимальною кількістю датчиків у шлейфі. Для цього досить під час постановки задачі використовувати несиметричну матрицю відстаней, у якій всі величини дорівнюють евклідовим відстаням між точками, крім єдиного нульового стовпця, що містить «відстані» від центрів кіл до точку початку трас.

Задачі такого типу були вперше уведені в 1959 р. Dantzig і Ramser [130], і за останні 59 років були опубліковані сотні робіт на цю тему. Точні методи розв'язання для VRP звичайно використовують цілочислове програмування або динамічне програмування [149, 212], і навіть із сучасними обчислювальними ресурсами ці методи звичайно не можуть розв'язати проблеми оптимальності з більш ніж 100 клієнтами. Оскільки реальні задачі VRP можуть мати кілька тисяч вузлів і містити в множину додаткових обмежень, які ще більше ускладнюють проблему, для розв'язання задачі використовуються метаевристичні методи, наприклад [109, 202, 197]. Існує велика кількість літературних джерел, які описують алгоритми для розв'язання VRP і її варіантів. Детальний огляд останніх робіт поданий у роботі [91].

Відомо про два вільні, некомерційні програмні пакети для розв'язання VRP. Перший – це VRP-Код Ralphs і ін. [221], що включений у пакет Symphony змішаного цілочисельного програмування з відкритим вихідним кодом.

Другий – це пакет VRPH [135, 150], бібліотека евристик з відкритим вихідним кодом для генерації розв'язків проблем маршрутизації транспортних засобів (VRP). Програмне забезпечення VRPH містить у собі: багато відомих евристик для створення й поліпшення можливих розв'язків для екземплярів



VRP (Clarke-Wright, two-opt, three-opt і т.ін). Використовує метаевристики, які звичайно можуть генерувати гарні розв'язки для великих задач, що містять сотні клієнтів, у лічені секунди. За результатами розв'язання добре вивчених тестових задач отримані програмою розв'язки звичайно знаходяться у межах одного або двох з найбільш відомих розв'язків. У такій реалізації на цей час використовується інтерфейс COIN Open Solver (OSI) і рахувальник GLPK. У програми модульна конструкція, що може бути розширена для обробки додаткових обмежень.

Пакет VRPH був розроблений як частина дисертації Криса Грея в Університеті штату Мериленд із консультантом Брюсом Голдом (<http://www.lib.umd.edu/drum/handle/1903/9011>), останній вихідний код може бути отриманий з <http://www.coin-or.org/projects/VRPH.xml>.

Для розв'язання задачі маршрутизації була використана бібліотека VRPH, що ретельно перевірена багатьма дослідниками на тестових задачах і в середньому повертає розв'язки в межах 3% від оптимального. Бібліотека VRPH легко модифікується для включення додаткових обмежень. Завдяки цьому вона широко застосовується під час розв'язання практичних і наукових задач. Так, у даній роботі була здійснена модифікація, яка дозволяє вибрати переважний напрям для трас, що дозволяє підвищити технологічність розв'язків.

Розглянемо тепер процес розв'язання задачі (3.1)-(3.2). Системи обмежень цієї задачі формуються за допомогою функцій належності (квазіфункцій належності) і  $\rho$ -функцій (квазі $\rho$ -функцій). Через негладкість (у загальному випадку)  $\rho$ -функцій і функцій належності для розв'язання задач (3.1)-(3.2) неможливо безпосередньо застосовувати жоден з відомих оптимізаційних методів. За способом побудови систем обмежень для кожної із задач визначена стартова точка з області припустимих розв'язків. Тому локальна оптимізація здійснюється шляхом зведення розв'язання вихідної задачі до розв'язання послідовності підзадач вигляду (3.5). При цьому на  $k$  ітерації область припустимих розв'язків  $W_k$  підзадачі генерується таким чином,

що вона містить  $k$  стартову точку, а локальний екстремум, що отриманий на  $k$ -й ітерації, використовується припустима стартова точка на  $k + 1$  ітерації.

Під час генерації підобластей  $W_k$  виконується виділення нерівностей з набору обмежень, що формують негладкі функції за допомогою підходу, описаного в [100].

Таким чином, пошук локального оптимуму на області  $W$  задачі (3.1)-(3.2) із припустимої стартової точки  $u_0 \in W$  здійснюється за схемою, що наведена на рис. 3.2.

З урахуванням особливостей математичної моделі задачі покриття принципова схема розв'язання задачі (3.1)-(3.2) з використанням припустимих стартових точок значно спрощується й може бути подана у вигляді послідовності кроків, що наведені нижче.

Крок 1. Генеруємо набір стартових точок з області припустимих розв'язків задачі (3.1)-(3.2).

Крок 2. Аналізуємо виродженість покриття для кожної зі стартових точок. Якщо покриття вироджене, здійснюємо перехід до кроку 3, інакше – перехід до кроку 4.

Крок 3. Здійснюємо побудову невиродженого покриття на основі виродженого.

Крок 4. На основі аналізу стартових точок будуємо модель вигляду (3.5), генеруючи з урахуванням особливості постановки задачі функцію цілі й системи нелінійних нерівностей, що описують область припустимих розв'язків задачі.

Крок 5. Шукаємо локальний мінімум функції цілі задачі (3.5) на згенерованій підобласті області припустимих розв'язків спуском з відповідних стартових точок. Якщо отримано поліпшення значення функції цілі, то призначаємо локальний екстремум новою стартовою точкою й здійснюємо перехід до другого кроку, у противному разі завершуємо роботу алгоритму локальної оптимізації (у цьому випадку точка локального екстремуму задачі (3.5) на підобласті збігається із точкою локального екстремуму вихідної задачі (3.1)–(3.2)).

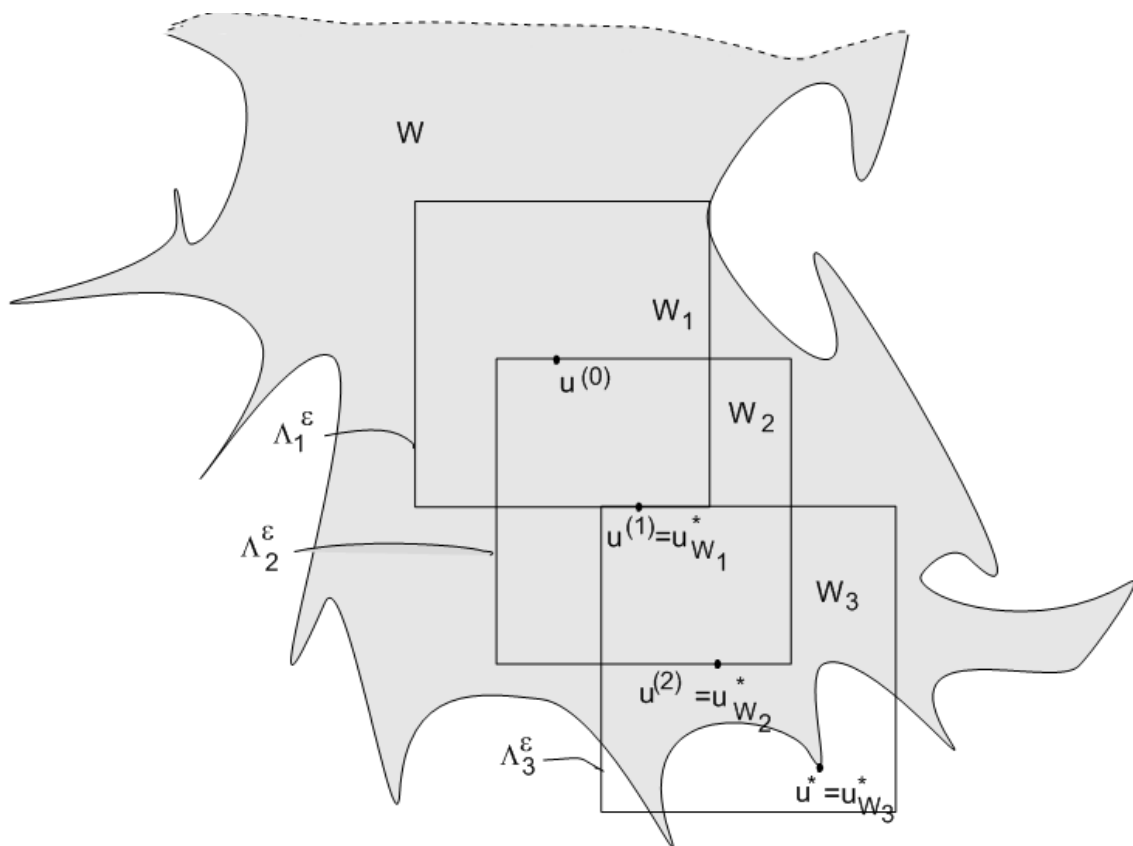


Рисунок 3.2 – Схема локальної оптимізації для задачі (3.1)-(3.2)

### 3.4 Засоби оптимізації

Розв'язання оптимізаційних задач здійснюється за допомогою пакета нелінійної оптимізації з відкритим вихідним кодом IPOPT (Interior Point OPTimizer) [228], офіційний сайт проекту <https://projects.coin-or.org/Ipropt>. IPOPT написаний на C++ і випущений з відкритим вихідним кодом під ліцензією EPL (Eclipse Public License) у рамках проекту COIN-OR (COmputational INfrastructure for Operations Research), офіційний сайт <http://www.coin-or.org/>. Проект COIN-OR являє собою ініціативу, покликану стимулювати розвиток програмного забезпечення з відкритим вихідним кодом для співтовариства дослідження операцій. У програмному продукті IPOPT реалізований метод внутрішньої точки.

Розглянемо задачу математичного програмування

$$f(x) \rightarrow \min, F(x) = 0, G(x) \leq 0,$$

де  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – гладка функція, а  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  й  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  – гладкі відображення.

Ідея методів внутрішньої точки полягає в тому, щоб замінити вихідну задачу послідовністю задач вигляду

$$\begin{aligned} f(x) + \sigma_k \psi(s) &\rightarrow \min, \\ F(x) = 0, \quad G(x) + s &= 0, \end{aligned}$$

де  $s \in \mathbb{R}^m$ ,  $\{\sigma_k\} \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  – монотонно спадаюча послідовність бар'єрних параметрів, яка прямує до нуля, а  $\psi: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$  – функція бар'єра, що необмежено зростає при наближенні до межі ненегативного ортанта  $\mathbb{R}_+^m$ . При цьому найчастіше використовується логарифмічний бар'єр  $\psi(s) = -\sum_{i=1}^m \log s_i$ .

Великий інтерес до методів даного класу пояснюється їх порівняно високою ефективністю, особливо на задачах великої розмірності (понад  $10^4$  змінних або обмежень). Цей метод лежить в основі добре відомого солвера IPOPT.

Для обчислення солвера необхідно надати callback-функції, що обчислюють такі величини:

- значення цільової функції  $f(x)$ ;
- градієнт цільової функції  $\nabla f(x)$ ;
- вектор значень вектор-функції обмежень  $G(x)$ ;
- яacobіан вектор-функції обмежень  $\nabla G(x)^T$ ;
- гессіан розширеної функції Лагранжа  $\sigma_f \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 G_i(x)$ .

На цей час створений великий парк програмного забезпечення для розв'язання оптимізаційних задач за допомогою високорівневих засобів оптимізаційного моделювання на основі трансляторів алгебраїчних мов

оптимізаційного моделювання, основними з яких є GAMS (аббревіатура від англ. «General Algebraic Modeling System» – «загальна система алгебраїчного моделювання») і AMPL (аббревіатура від англ. «A Modeling Language for Mathematical Programming» – «мова моделювання для математичного програмування»).

GAMS – високорівнева система моделювання для математичної оптимізації. GAMS розроблена для моделювання й розв’язання лінійних, нелінійних і змішано-цілочислових оптимізаційних задач. GAMS був першою мовою алгебраїчного моделювання й формально схожий на мови програмування четвертого покоління, які часто використовуються.

AMPL – мова програмування високого рівня, спочатку розроблена в Bell Laboratories для того, щоб описувати й розв’язувати складні задачі оптимізації й теорії розкладів. Як і GAMS, AMPL використовує декларативно-алгебраїчний стиль подання моделей математичного програмування, що є близьким до традиційної математичної термінології. Разом з тим AMPL дає можливість описати й складні моделі оптимізації з різними логічними умовами, з використанням складних систем індексації змінних і обмежень.

Обидві системи пов’язані із групою сторонніх оптимізаційних рахувальників. До найбільш відомих можна віднести BARON, COIN, CONOPT, CPLEX, DICOPT, GUROBI, MOSEK, SNOPT, XPRESS, IPOPT.

Вони полегшують користувачам реалізацію різних гібридних алгоритмів, допускаючи спільне застосування різних рахувальників. Моделі описані короткими алгебраїчними операторами, які легко читаються людьми й машинами. Застосування зазначених трансляторів значно скорочує трудомісткість етапів підготовки вихідних даних (для їхнього уведення в пакети оптимізації) і обробки результатів розв’язання.

Якщо для формулювання задачі використовувати мову програмування AMPL або GAMS, то вони надають функції під час одержання  $f(x)$  і  $g(x)$ . Але GAMS і AMPL є платними і досить дорогими для комерційного використання. Некомерційні, у тому числі демонстраційні або «студентські» версії

рахувальників, містять обмеження на розмірність і кількість обмежень задачі. Тому для розв'язання поставленої задачі був розроблений і реалізований програмний інтерфейс для роботи із солвером Ipropt безпосередньо, без використання AMPL або GAMS. Були написані відповідні callback-функції, згадані вище, для вузького спеціалізованого класу обмежень.

### **Висновки по розділу 3**

Побудовано й досліджено узагальнену математичну модель задачі оптимального розміщення і її основні реалізації. Незважаючи на різноманітність постановок задачі покриття, яка породжується науковою й практичною необхідністю, узагальнена математична модель (3.1)-(3.2) описує множину задач покриття областей складної форми з урахуванням спеціальних обмежень. Множина реалізацій узагальненої математичної моделі охоплює практично весь клас сучасних прикладних задач, що виникають у даній предметній області.

З метою застосування для розв'язання задачі (3.1)-(3.2) відомих методів локальної й глобальної оптимізації потрібен аналітичний опис області припустимих розв'язків  $W$  і, як наслідок, побудова функцій відношень між об'єктами, яка включає й побудову  $\rho$ -функцій, псевдонормалізованих  $\rho$ -функцій, квазі $\rho$ -функцій, псевдонормалізованих квазі $\rho$ -функцій, функцій належності, псевдонормалізованих функцій належності й квазіфункцій належності.

Досліджені властивості моделі (3.1)–(3.2), обрана стратегія її розв'язання й розроблений генератор простору розв'язків задачі на основі стартової точки, який включає генератор системи обмежень і генератор функції цілі.

Запропоновано схеми пошуку локального екстремуму під час старту із припустимої й неприпустимої точок. Розроблено процедуру локальної оптимізації для задачі покриття, яка ґрунтується на зведенні задачі негладкого програмування до послідовності задач нелінійного програмування виду (3.5).

Процес оптимізації завершується, якщо на черговому етапі не вдалося поліпшити функцію цілі, тобто отримана точка є локальним оптимумом для всіх опуклих підобластей, що її містять. При цьому отримана точка є також локальним екстремумом задачі (3.1)-(3.2).

Описано принципову схему генерації простору розв'язків задачі (3.1)-(3.2) та задачі (3.5) і докладно досліджена генерація функції цілі для задачі оптимізації довжини мережі з'єднань. Пошук локального екстремуму задачі (3.5) здійснюється за допомогою рахувальника задач нелінійного програмування IPOPT з використанням розробленого програмного інтерфейсу.

## **РОЗДІЛ 4 ПОБУДОВА СТАРТОВОЇ ТОЧКИ З ОБЛАСТІ ПРИПУСТИМИХ РОЗВ'ЯЗКІВ**

Відповідно до запропонованої стратегії розв'язання задачі побудова припустимого покриття є дуже важливим етапом, тому що:

- на основі аналізу припустимого розв'язання виконується побудова системи обмежень задачі;
- використання припустимої стартової точки істотно заощаджує обчислювальні ресурси, необхідні для розв'язання оптимізаційних задач нелінійного програмування, що виникають.

При цьому бажано використовувати тільки «гарні» стартові точки, тому що якість початкового розв'язку багато в чому визначає якість результату.

Для побудови стартового покриття застосовувалися методи регулярного покриття на основі решіток для задач покриття прямокутних областей і оптимізації по групах змінних, т. зв. "послідовно-одиначного покриття" для довільних областей. Під час застосування цього методу результат істотно залежить від використаного локального критерію якості покриття. Порівняно непогані результати виходять, якщо обчислюючи локальний критерій якості, враховується зв'язність області, що залишилася, і кількість кіл, необхідних для покриття частини області, що залишилася, поблизу розташованого кола. Варіація методу "послідовно-одиначного покриття" використовується також в інтерактивному режимі для генерації точки розміщення чергового кола «підказки» для оператора.

### **4.1 Розв'язання задачі нерегулярного покриття області довільної просторової форми**

Скориставшись  $\omega$ -функціями, подамо математичну модель поставленої задачі у вигляді



$$\min_{Z \in D \subset E^{2n}} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \omega_{ij}(u_i, u_j) + \sum_{i=1}^n \omega_i(u_i) \right), \quad (4.1)$$

де  $u_i = (x_i, y_i)$  і  $u_j = (x_j, y_j)$  – координати центрів кіл;

$\omega_{ij}(u_i, u_j)$  –  $\omega$ -функція, що визначає площу взаємного перекриття кіл  $C_i, C_j$ ,

$i < j \in I_n$ ;

$\omega_i(u_i)$  –  $\omega$ -функція, що визначає площу взаємного перекриття кола  $C_i$   $i \in I_n$

й області  $R^2 \setminus \text{int } \Omega$ ;

$D = D_1 \cup D_2$  – область припустимих розв'язків;

$D_1$  – множина, що описує умови покриття області  $\Omega$  колами  $C_i$   $\Omega \cap \left( \bigcup_{i=1}^n C_i \right) =$

$= \Omega$ , у такий спосіб:

$$\max_{t=(t_x, t_y) \in \Omega} \min_{i \in I_n} ((x_i - t_x)^2 + (y_i - t_y)^2 - R^2) \leq 0; \quad (4.2)$$

$D_2$  – множина, що описує в аналітичному вигляді обмеження на мінімально й максимально припустимі відстані між центрами кіл і межею області покриття й задана структурою, у загальному випадку нелінійних, нерівностей вигляду (3.14).

Використовуючи даний метод виникає питання про знаходження множини точок припустимого розташування центра чергового покривного об'єкту, із урахуванням того, що раніше розміщені об'єкти фіксуються, і вибір найкращого з них відповідно до деякої «локальної» функції цілі.

Для визначення множини припустимих точок необхідно сформулювати правила їхньої генерації.

Правила для розміщення чергового покривного об'єкту, повинні враховувати такі зауваження:

– площа покриття області  $\Omega$  кожним з об'єктів  $C_i$  повинна бути

максимальною;

- значення  $\omega$ -функції має бути мінімальним;
- непокрита область, що залишилася, повинна бути, по можливості, однозв'язною. У випадку якщо залишилася багатозв'язна область, підхід до розв'язання задачі буде аналогічний, однак кінцеве значення  $\omega$ -функції може різко зрости, що знизить ефективність використання розглянутого методу.

На рис. 4.1 і 4.2 наведені приклади розв'язків задачі без урахування останнього зауваження й з ним відповідно.

Перш ніж докладно розглянути метод розв'язання задачі покриття області довільної просторової форми, уведемо деякі позначення й подамо в аналітичному вигляді деякі додаткові функції, які беруть участь у формуванні функції цілі поставленої задачі.

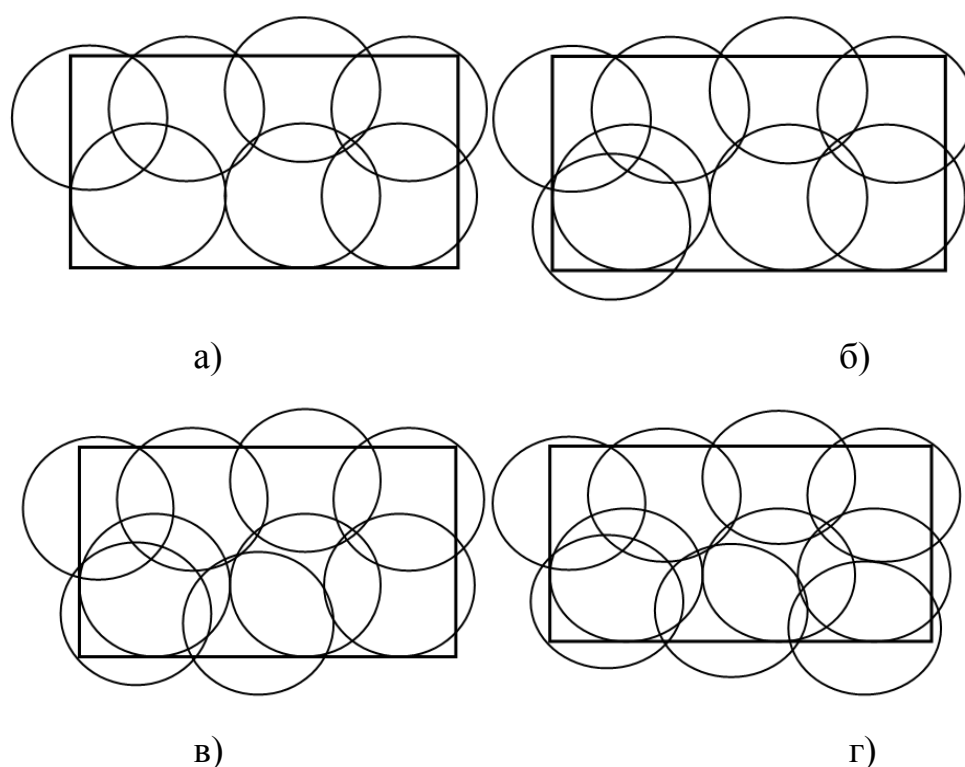


Рисунок 4.1 – Приклад 4 останніх кроків розв'язання задачі без урахування останнього зауваження: а) –  $(n-3)$ -й крок; б) –  $(n-2)$ -й крок; в) –  $(n-1)$ -й крок; г) –  $n$ -й крок

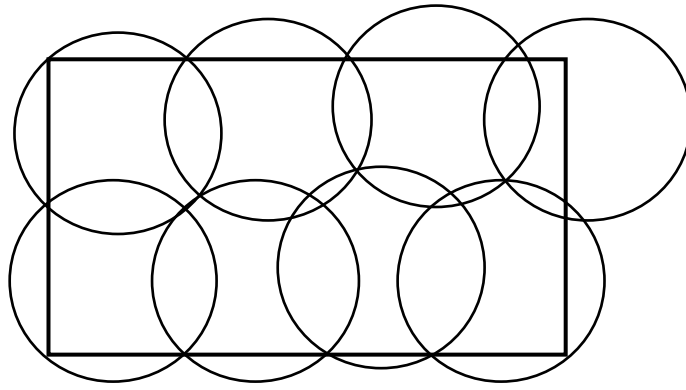


Рисунок 4.2 – Приклад розв’язку задачі з урахуванням останнього зауваження

Введемо поняття

- $I_k = \{1, 2, \dots, k\}$  – індексна множина;
- $i, j$  – номери кіл,  $i < j \in I_n$ ;
- $F$  – значення функції цілі;
- $p_{il}$  –  $l$ -я точка перетинання межі  $i$ -го кола із межею непокритої

області, тобто  $p_{il} \in frC_i \cap fr\left(\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} C_k\right)$ ;

- $K_i^*$  – множина точок  $p_{il}$  перетинання межі  $i$ -го кола із межею непокритої області;

- $L_i^* = cardK_i^*$ ;

- $K_i$  – множина точок  $p_{il}$  з множини  $K_i^*$ , що задовольняють обмеження задачі (4.1), надалі – “опорних” точок;

- $L_i = cardK_i, L_i \leq L_i^*$ ;

- $\omega_j^{l0}$  – значення  $\omega$ -функції  $\Omega$  й  $C_j$  для  $l$ -ї точки кола  $C_j$ ;

- $\omega_{kj}^l$  – значення  $\omega$ -функції  $C_k$  й  $C_j$  для  $l$ -ї точки кола  $C_j$ ;

- $\chi_j^l$  – значення функції цілі для  $l$ -ї точки кола  $C_j$ ,  $\chi_j^l = \sum_{k=1}^{j-1} \omega_{kj}^l + \omega_k^{l0}$ ;

- $Z_j$  – множина, елементи  $\chi_j^l$  якої ранжовані за зростанням.

Розглянемо випадок визначення площі взаємного перетинання кола  $C_i$  з областю  $R^2 \setminus \text{int}\Omega$  по осі  $OY$  (рис 4.3).

Відповідна  $\omega$ -функція має вигляд

$$\omega_j(x_p, y_p, x_j, y_j) = \begin{cases} \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha), & \text{якщо } 0 < \rho_{ij} < R; \\ 0, & \text{якщо } \rho_{ij} \geq R. \end{cases} \quad (4.3)$$

де  $\alpha = \arccos \frac{\rho_{pj}}{R}$ ,  $\rho_{pj} = \sqrt{(x_j - x_p)^2 + (y_j - y_p)^2}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\rho_{pj}$  – відстань між центром кола  $C_j$  й межею області  $\Omega$ .

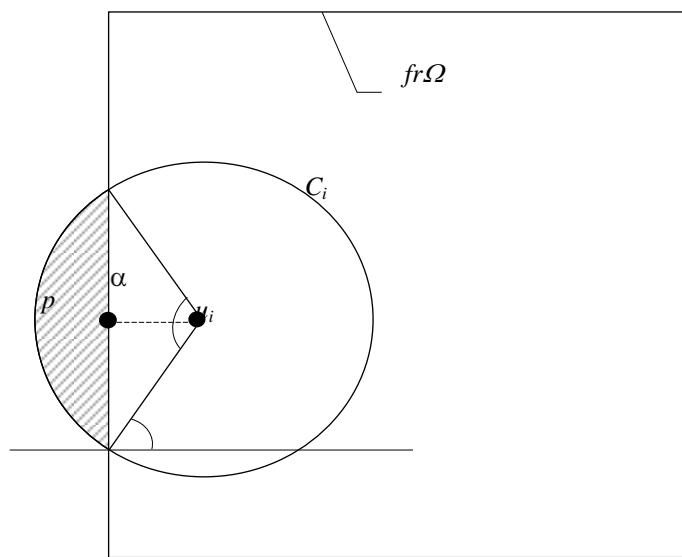


Рисунок 4.3 – Перетинання кола  $C_i$  з областю  $R^2 \setminus \text{int}\Omega$  по осі  $OY$

Для випадку перетинання кола  $C_i$  з областю  $R^2 \setminus \text{int}\Omega$  по осі  $OX$  також застосовується вираз вигляду (4.3).

У випадку, якщо коло  $C_i$  перетинається з областю  $R^2 \setminus \text{int}\Omega$  по осі  $OX$  й  $OY$  одночасно, наприклад, як показано на рис. 4.4, варто використовувати формулу вигляду:

$$\omega_j^0 = \omega_j^{0\alpha_1} + \omega_j^{0\alpha_2} - (\omega_j^{0\phi} - \frac{1}{2}|(x_b - x_a)| \cdot |y_c - y_a|). \quad (4.4)$$

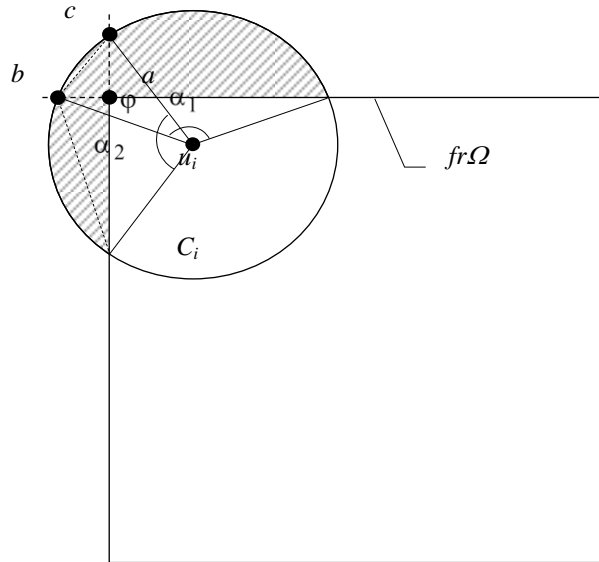


Рисунок 4.4 – Перетинання кола  $C_i$  з областю  $R^2 \setminus \text{int}\Omega$  по осі  $OX$  й  $OY$  одночасно

Розглянемо випадок визначення площі перетинання кіл  $C_i$  і  $C_j$  (рис. 4.5).  
Відповідна  $\omega$ -функція записується як

$$\omega_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) = \begin{cases} R^2 (2\phi - \sin 2\phi), & \text{якщо } 0 \leq \rho_{ij} < 2R \\ 0, & \text{якщо } \rho_{ij} \geq 2R \end{cases}; \quad (4.5)$$

де  $\rho_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ ,  $\phi = \arccos \frac{\rho_{ij}}{2R}$ ,  $\rho_{ij}$  – відстань між центрами кіл  $C_i$  і  $C_j$ .

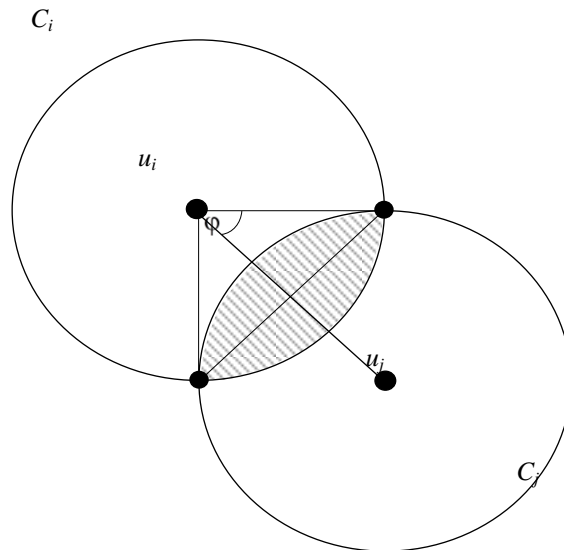


Рисунок 4.5 – Перетинання кіл  $C_i$  і  $T_j$

Нехай  $p_{il} \in frC_i \cap fr\Omega$ . Для знаходження точки розміщення центра наступного кола  $C_j$ , такою, що функція цілі набуває в цій точці свого мінімуму, необхідно провести пряму, що проходить через точку  $p_{il}$  й утворює кут  $\phi$  із прямою, яка паралельна осі  $OX$  (рис. 4.6).

На даній прямій, на відстані  $R$  від точки  $p_{il}$  буде знаходитись точка  $u_j$ , яка нам потрібна.

Функція в цьому випадку має вигляд

$$\begin{aligned} \chi_j^l &= R^2 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_0 - \frac{\sin 2\phi}{2} - \cos(\phi - \alpha_0) \right), \\ \chi_j^l \Big|_{\phi} &= -R^2 (\cos 2\phi + \sin(\alpha_0 - \phi)) = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi + \alpha_0$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$ . Таким чином,  $\phi = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha_0}{3}$ .

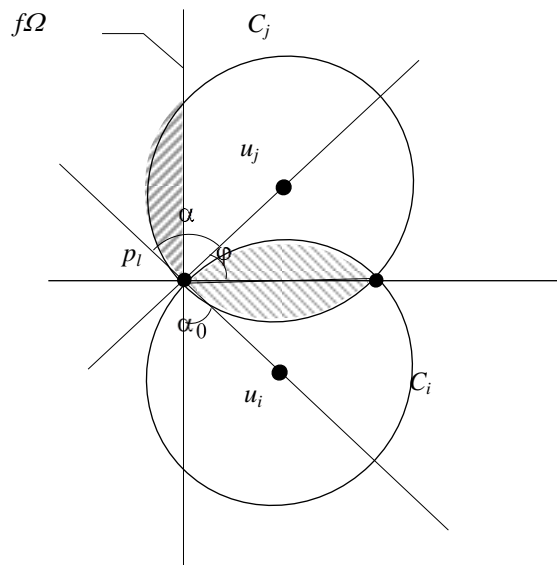


Рисунок 4.6 – Місце розташування наступного об'єкта за взаємодії  
двох кіл

Нехай  $p_{il} \in frC_i \cap frC_j$ . Для знаходження точки постановки центра  $u_j$  наступного кола  $C_j$ , такої, що функція цілі набуває в цій точці свого мінімуму, необхідно провести бісектрису кута  $\phi$ , утвореного дотичними до окружностей  $frC_i$  і  $frC_j$  в точці  $p_{il}$ .

На даній бісектрисі на відстані  $R$  від точки  $p_{il}$  буде перебувати потрібна точка  $u_j$ .

Розглянемо випадок перетинання трьох кіл  $C_s, C_k, C_r, s, k, r \in I_m$ ,  $m = m' + m''$ , такий, що виконуються умови  $\text{int}C_k \cap \text{int}C_r \neq \emptyset$ ,  $\text{int}C_k \cap \text{int}C_s \neq \emptyset$  і знайдеться хоча б по одній точці  $p_{il}'$  й  $p_{il}''$  перетинання меж кіл  $C_k, C_s$  і  $C_k, C_r$  відповідно, які перебувають у деякому околі радіуса  $\varepsilon = \frac{R}{2}$ .

Наступне коло  $C_j$  розміщується в такий спосіб (рис. 4.7), що його центр  $u_j$  має координати

$$(x_j, y_j) = \frac{1}{2}(x' + x'', y' + y'') + \frac{2\sqrt{4R^2 - (x' - x'')^2 - (y' - y'')^2} \cdot (y' - y'', x'' - x')}{\sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}}, \quad (4.7)$$

де  $x', y'$  і  $x'', y''$  – координати точок  $p_{il}'$  і  $p_{il}''$  відповідно.

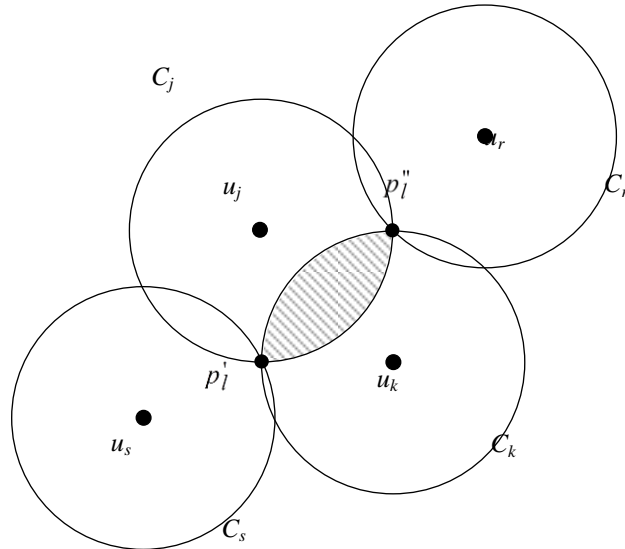


Рисунок 4.7 – Місце розташування наступного об'єкта за взаємодії трьох кіл

Після перебору всіх можливих припустимих точок для всіх  $i \neq j = 1, \dots, m$ , і знаходження відповідного мінімального значення  $\omega$ -функції буде отримане припустиме стартове покриття області  $\Omega$ .

Розглянемо покроковий алгоритм розв'язання задачі (4.1) безпосередньо.

Крок 1. Вважаємо  $i = 0$ ,  $K_0^* = \{(0,0)\}$ ;  $K_0 = \{(0,0)\}$ ;  $L_0 = 1$ ;  $W_0 = 0$ ;

$$U_0 = \left\{ \left( x_0 + R \frac{\sqrt{2}}{2}, y_0 + R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}, N_0 = 1.$$

Крок 2. Вважаємо  $i = i + 1$ . Для кожної точки  $v_{il} \in U_i$ ,  $l = 1, 2, \dots, L_0$  обчислюємо функцію цілі  $\chi_j^l$  за формулою (4.6). У випадку  $j = 1$  функція цілі обчислюється за формулою (4.5).



Ранжуємо множину значень  $\chi_j^l$  за зростанням. У результаті одержуємо множину  $Z_j = \{\chi_j^{i_1}, \chi_j^{i_2}, \dots, \chi_j^{i_{N_j}}\}$ .

Крок 3. Вважаємо  $l := i_1$ .

Крок 4. Перевіряємо на зв'язність множину вигляду  $\Omega^{jl} = \Omega \setminus \left( \bigcup_{q=1}^i C_q \cup C_j^l \right)$ , де  $C_j^l = C_j(v_{jl})$ .

Крок 5. Якщо множина  $\Omega^{jl}$  зв'язна, то переходимо до кроку 6. Якщо  $l = L_i$ , – переходимо до кроку 6. Інакше – вважаємо  $l := l + 1$  й переходимо до кроку 4.

Крок 6. Розміщуємо  $C_j$  таким чином, що центр  $u_j$  перебуває в точці  $v_{il}$ . Вважаємо  $W = W + \chi_j^l$ . Формуємо множину  $K_j^*$ ,  $K_j$ ;  $K_j^* = K_j^* \setminus \{p_{il}\} \cup \{\{p_{jq}\}_q\}$ , де  $p_{jq}$  – точка перетинання  $C_j$  з областю  $frC_j \cap fr\left(\Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^i C_k\right)\right)$ ,

$$K_j^* = (K_i \cup (frC_j \cap fr\left(\Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^i C_k\right)\right))) \setminus p_{il}, \quad L_j^* = cardK_j^*.$$

Формуємо множину  $K_j$ , виключаючи точки, які не задовольняють обмеження задачі,  $cardK_j = L_j$ .

Формуємо множину  $U_j$  центрів  $u_j$  припустимої постановки кіл  $C_j$ ,  $cardU_j = N_j$ . Якщо  $N_j = 0$ , переходимо до кроку 8.

Крок 7. Вважаємо  $i = j$ . Переходимо до кроку 2.

Крок 8. Закінчуємо роботу алгоритму.

## 4.2 Розв'язання задачі регулярного покриття прямокутної області

Хоча в загальному випадку конфігурація покривної області може бути довільною, реально найчастіше як область покриття виступає прямокутник.

Тому в рамках даного розділу прийmemo, що область  $\Omega$  являє собою прямокутник  $P$ .

Відомо [125], що оптимальне покриття площини колами досягається за так званого регулярного або решітчастого покриття. Тому природною буде спроба використання регулярного покриття й для задачі покриття прямокутника колами.

Нагадаємо, що теоретико-множинна модель задачі покриття прямокутника  $P$  множиною  $n$  кіл має вигляд

$$P \subset \bigcup_{i=1}^n C_i,$$

тобто кожна точка області  $T_0$  належить хоча б одному з кіл  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Математичну модель поставленої задачі за відсутності додаткових обмежень можна подати у вигляді:

$$\max_{t \in T_0} \min_{i \in I_n} \rho(t_i, t) \leq R, \quad (4.8)$$

де  $\rho(t_i, t)$  – відстань між точками  $t_i$  й  $t$ ;  $t = (t_x, t_y) \in \Omega$ ;  $t_i = (x_i, y_i)$  – центр  $i$ -го кола;  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $R$  – радіус кіл.

Особливості прикладних задач покриття областей довільної геометричної форми колами заданого радіуса в системах автоматичного протипожежного захисту докладно викладені в роботі [6].

У нормативній літературі [51, 50] наведено ряд обмежень на положення пожежних сповіщувачів. Ці обмеження можуть бути зведені до таких геометричних обмежень:

– відстань від будь-якої точки області  $T_0 = \{(x, y) \in R^2 | 0 \leq x \leq B, 0 \leq y \leq A\}$  до центра хоча б одного кола  $T_i$  повинна бути не більше  $R^* < R$ .

Тоді (4.8) набуває вигляду

$$\max_{t \in T_0} \min_{i \in I_n} p(t_i, t) \leq R^* \quad (4.9)$$

– центри кіл, що покривають область  $T_0$ , повинні належати області  $T_0$  й, більше того, перебувати на відстані не менш ніж  $r^-$  до  $frT_0$ , тобто

$$t_i \in T_0^-, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (4.10)$$

$$\text{де } T_0^- = \{(x, y) \in R^2 \mid r^- \leq x \leq B - r^-, r^- \leq y \leq A - r^-\},$$

$frT_0^-$  – межа області  $T_0^-$ ;

– центри будь-яких двох кіл повинні перебувати на відстані не меншій  $2r^-$ , тобто

$$p(t_i, t_j) \geq 2r^-, \quad i, j=1,2,\dots,m. \quad (4.11)$$

Очевидно, що умова (4.9) уведена для підвищення надійності системи пожежної безпеки, а наявність умов (4.10) і (4.11) пояснюються тим, що пожежний сповіщувач – реальний фізичний об'єкт, який має конкретні розміри. Під час моделювання задачі він може бути адекватно поданий колом радіуса  $r^-$ . Безпосередньо з (4.10) і (4.11) випливає, що умова (4.9) еквівалентна умові покриття прямокутної області  $T_0$  колами радіуса  $R^*$ . Таким чином, математичну модель задачі можна подати в такому вигляді:

$$m \rightarrow \min, \quad (4.12)$$

$$\max_{t \in T_0} \min_{i \in I_n} p(t_i, t) \leq R^* \quad (4.13)$$

$$p(t_i, t_j) \geq 2r^-, \quad (4.14)$$

$$t_i \in T_0^-, I_n = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4.15)$$

Розглянемо задачі (4.12) - (4.15).

Не втрачаючи загальності, вважаємо, що нерухлива система координат  $XOY$  пов'язана із прямокутником  $T_0$ , при цьому сторона довжини  $A$  належить осі  $OY$ , сторона довжини  $B$  – осі  $OX$ , а лівий нижній кут прямокутника збігається з початком системи координат.

Оскільки решітки й решітчасті укладання є основою розв'язання поставленої задачі, розглянемо ці поняття докладніше.

**Визначення 4.1.** Множина векторів

$$\mathbf{r} = n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2, n, m \in Z, \quad (4.16)$$

де  $\mathbf{a}_1 = (a_{1x}, a_{1y})$ ,  $\mathbf{a}_2 = (a_{2x}, a_{2y})$  – лінійно незалежні вектори, називається решіткою [43] з базисом  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  і позначається  $L = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ;  $Z$  – множина цілих чисел;  $L$  – оператор, що відображає множину пар векторів у множину сімейств вигляду (4.16).

**Визначення 4.2.** Покриття  $\{\tau_{ij}\}, i, j \in Z$  площини колами  $\tau_{ij} = \tau(i\mathbf{a}_1 + j\mathbf{a}_2) = \tau(0,0) + i\mathbf{a}_1 + j\mathbf{a}_2, i, j \in Z$ , називається (одинарним) решітчастим покриттям колом  $\tau(0,0)$ , виконаним за базисом  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  решітки, де  $\tau = (0,0)$  – коло  $\tau$  із центром у точці  $(0,0)$ . Позначимо таке покриття  $(\tau, L)$ .

Якщо розглядати решітчасті покриття прямокутника або будь-якої обмеженої області, то на відміну від всієї площини за оцінки "якості" такого покриття необхідно враховувати наявність межі області, що покривається. Решітчасте покриття, оптимальне для площини, у загальному випадку не є оптимальним для прямокутника.

Решітчасте покриття  $(\tau, L)$  визначається векторами  $\mathbf{a}_1 = (a_{1x}, a_{1y})$  й

$\mathbf{a}_2 = (a_{2x}, a_{2y})$ . Обмежимося надалі розглядом випадку, коли один із цих векторів паралельний одній зі сторін прямокутника  $T_0$ , тобто виконується одна з умов

$$a_{1x} = 0, \quad (4.17)$$

$$a_{1y} = 0, \quad (4.18)$$

$$a_{2x} = 0, \quad (4.19)$$

$$a_{2y} = 0. \quad (4.20)$$

Розіб'ємо задачі покриття (4.12)-(4.15) на чотири завдання, які відрізняються присутністю одного з обмежень (4.17), (4.18), (4.19), (4.20). Варто відзначити, що через симетрію області покриття, розв'язання задачі (4.12)-(4.15) за виконання умов (4.17), (4.18) збігається з розв'язанням задачі (4.12)-(4.15) за виконання умов (4.19), (4.20).

Надалі, через однотипність розв'язань досить обмежитися розглядом розв'язання тільки однієї із задач, наприклад, за виконання умови (4.17).

За виконання умови (4.17) на вектор  $\mathbf{a}_1$  накладається обмеження:  
 $0 < a_{1y} < R$ .

**Зауваження 4.1.** Строго кажучи, система обмежень на  $\mathbf{a}_1$  має вигляд  $a_{1x} = 0, 2R < a_{1y} < 2R$ . Але розв'язок для випадку  $0 < a_{1y} < 2R$ , може бути отриманий під час розв'язання задачі з обмеженням (4.17). Розв'язок задачі для випадку, коли  $a_{1x} = 0, -2R < a_{1y} < 0$  може бути отриманий шляхом трансляції з розв'язання задачі (4.12)-(4.15) з обмеженнями (4.19), (4.20).

Функція цілі задачі регулярного покриття прямокутника  $T_0$  колами з множини  $T$  залежить від векторів базису решітки  $\mathbf{a}_1$  й  $\mathbf{a}_2$ , від вектора  $\mathbf{t}_1$  трансляції решітки відносно прямокутника  $P$ , від розмірів  $A, B$  прямокутника  $T_0$  й діаметра  $2R$  кола  $T_i \in T, i \in I_n$ .

Функція цілі має такі очевидні властивості: обмежена, не негативна, кусково-стала, цілочислова, крім того, вона є періодичною по  $t_1$  за напрямками  $a_1$ ,  $a_2$  та їх лінійними числовими комбінаціями.

Залежність результату від параметрів досить нетривіальна й може бути подана дуже громіздкими виразами. Ці функції складно записати в явному вигляді, а тим більше, обчислити похідні. З іншого боку, розглянуті функції кусково-сталі й мають область припустимих значень, що являє собою множину цілих чисел невеликої потужності. Таким чином, для пошуку оптимального розв'язку досить розглянути дискретний набір значень параметрів за умови, що хоча б один з них потрапить у кожен з ділянок сталого значення функції цілі. При цьому, оскільки визначення значення функції цілі вимагає невеликих обчислювальних витрат, може бути обраний досить малий крок зміни параметрів  $i$ , отже, як наближений метод розв'язання даної задачі доцільно використовувати метод накладення сітки на область припустимих розв'язків, у вузлах якої виконується пошук розв'язку. Передбачається рівномірне розташування вузлів.

На рис. 4.8 наведено тестовий приклад розв'язку задачі (4.12)-(4.15) покриття прямокутника з розмірами  $A = 100$ ,  $B = 100$  колами з радіусом  $R = 6.5$  під час використання методу регулярного покриття. Значення функції цілі дорівнює 104.

Перейдемо тепер до розгляду задачі секційно-регулярного покриття прямокутника колами. Розв'язання поставленої задачі зводиться до розв'язання двох задач покриття прямокутника вертикально й горизонтально розташованими секціями прямокутної форми. Оскільки задачі збігаються за постановкою, обмежимося надалі розглядом першої з них.

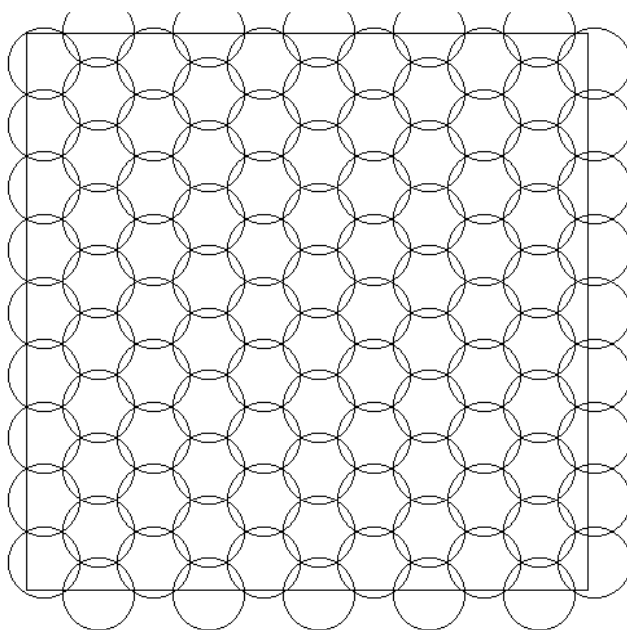


Рисунок 4.8 – Регулярне покриття

Функція цілі цієї задачі має ті ж властивості, що й функція цілі задачі регулярного покриття прямокутника, крім періодичності. Крім того, залежність результату від параметрів є складною й такою, що важко формалізується. Це призводить до необхідності використання наближених методів для розв'язання задачі. Наприклад, застосування методу накладення сітки на області припустимих розв'язків дозволяє здійснити двохетапне розв'язання задачі секційно-регулярного покриття:

- розв'язання ряду задач однорідного регулярного розкрою секцій з розмірами  $A \times h_k$  методом, викладеним вище;
- вибір оптимальної комбінації секцій.

При цьому з кускової сталості й обмеженості функції цілі випливає, що для кожного цілого числа  $k = 1, 2, \dots, N(T_0)$ , де  $N(T_0)$  – розв'язок задачі регулярного покриття всього прямокутника  $T_0$ , може бути обраний параметр  $h_k$ , такий, що регулярне покриття секції з розмірами  $A \times h_k$  містить не більше  $k$  кіл, а будь-яка секція з розмірами  $A \times h_k^*$ ,  $h_k^* > h_k$  – більш ніж  $k$  кіл. Таким чином, множина всіх таких значень  $h_k$  задає сітку зі змінним кроком,

використання якої при розв'язанні задачі за наведеною вище схемою забезпечує знаходження її оптимального розв'язку за заданими параметрами розбивки прямокутника на секції.

З наведених вище міркувань випливає, що на першому етапі варто розв'язати ряд обернених задач регулярного покриття, а саме, для заданого числа кіл потрібно визначити максимально можливий розмір секції, що покривається заданою кількістю кіл. Слід зазначити, що під час розв'язання задачі регулярного покриття всього прямокутника  $P$  даним методом, всі ці розв'язки можуть бути отримані як проміжні результати.

Перейдемо тепер до розв'язання задачі вибору оптимального набору секцій. За своєю постановкою ця задача аналогічна відомій одновимірній задачі про ранець [31], якщо інтерпретувати кількість кіл  $k$ , розміщених у секції, як вагу елемента, а значення  $h_k$  – як довжину. Однак функція цілі в цьому випадку нетрадиційна, а саме: необхідно знайти набір елементів мінімальної ваги, що забезпечують переповнення або, принаймні, повне заповнення ранця.

Характерна особливість цієї задачі, що обумовила метод її розв'язання, полягає в тому, що набір можливих ваг ранця обмежений підмножиною натуральних чисел від 1 до  $M$ , включно, причому значення  $M$  не велике. Для розв'язання цієї задачі був використаний метод динамічного програмування.

На рис 4.9 наведено тестовий приклад розв'язку задачі покриття прямокутника розмірів  $A=100$ ,  $B=100$ , колами радіуса  $R=6.5$  у разі використання методу секційно-регулярного покриття. Значення функції цілі дорівнює 103.

Порівняльний аналіз результатів, отриманих під час розв'язання задачі (4.12)-(4.15) методом нерегулярного покриття [2] і методом регулярного покриття (за тих же вихідних даних), дозволяє зробити висновок про те, що метод регулярного покриття дозволяє значно поліпшити значення функції цілі.



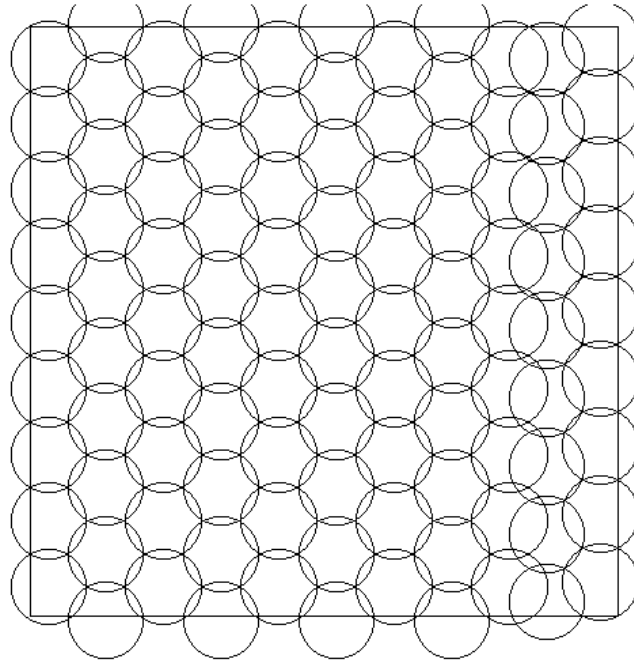


Рисунок 4.9 – Секційно-регулярне покриття

Цікавою особливістю запропонованого методу побудови секційно-регулярних покриттів є те, що він може бути природно узагальнений на випадок розбивки прямокутної області на секції, які регулярно покриті колами різних радіусів. Так, на рис. 4.10 наведене секційно-регулярне покриття прямокутника  $P$  розмірами 1200 на 700 колами з радіусом 90, 100 і 110.

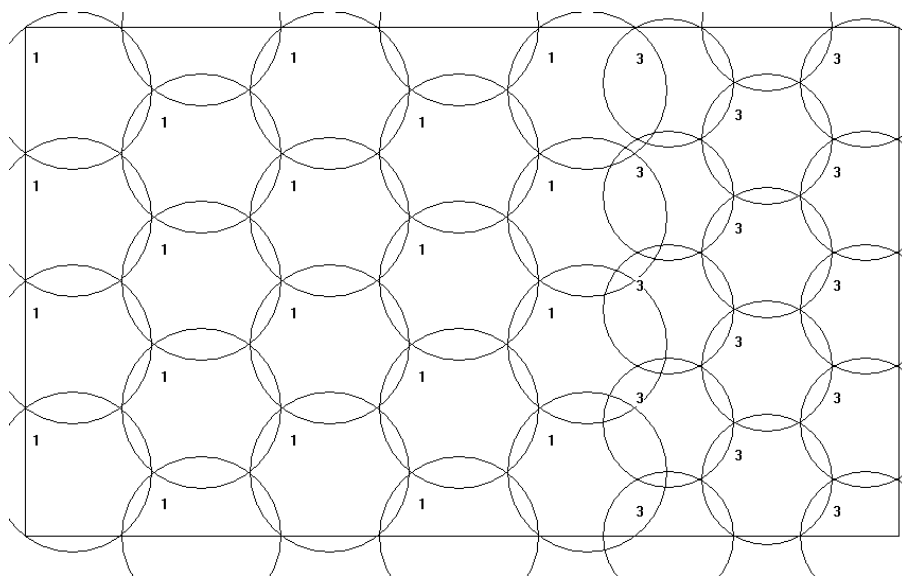


Рисунок 4.10 – Секційно-регулярне покриття колами різних радіусів

## Висновки по розділу 4

Основні результати розділу такі:

- виділено важливі із практичної точки зору класи задач побудови кругових покриттів: покриття прямокутної області й покриття довільної області;
- запропоновано метод генерації покриття довільної області колами на основі методу оптимізації по групах змінних (послідовно-одиначного розміщення);
- сформульовано ефективний критерій якості для методу оптимізації по групах змінних на основі використання  $\omega$ -функцій;
- запропоновано під час розв'язання задач оптимального кругового покриття прямокутної області використовувати т. зв. регулярні покриття, які генеруються на основі решіток в  $\mathbb{R}^2$ ;
- досліджено регулярні покриття прямокутної області й запропонований ефективний метод їхньої побудови для кіл однакового радіуса на основі використання елементарних геометричних операцій;
- досліджено секційно-регулярні покриття прямокутної області й запропонований ефективний метод їхньої побудови для кіл однакового радіуса на основі регулярних покриттів з використанням методу динамічного програмування;
- розроблено метод побудови секційно-регулярних покриттів узагальнений на випадок покриття прямокутної області колами різних радіусів.

## **РОЗДІЛ 5 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СЕНСОРНОГО ДРОТОВОГО ПОКРИТТЯ СКЛАДНИХ ОБЛАСТЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ «ВЕСТА»**

### **5.1 Програмний комплекс «Веста»**

На підставі запропонованих засобів математичного моделювання, побудованих математичних моделей і розроблених методів розв'язання було розроблено програмний комплекс «Веста», який призначено для розв'язання задач проектування оптимальних дротових сенсорних покриттів довільних областей, межі яких формуються ділянками гладких кривих, зокрема, дугами кіл і відрізками прямих.

Програмний комплекс дозволяє здійснювати побудову кругових покриттів довільних областей в інтерактивному, напівавтоматичному і автоматичному режимах, здійснювати корекцію неприпустимих покриттів, реалізовувати поліпшення вартості (зменшення кількості сенсорів) і/або якості (мінімізація радіуса кіл, максимізація зон взаємних перекриттів кіл) покриттів, будувати дротяні з'єднання двох типів (радіальні і кільцеві) з подальшою оптимізацією вартості (довжини дротових ліній).

Програмний комплекс «Веста» здійснює генерацію простору розв'язків задачі покриття і дозволяє знаходити розв'язки задачі наближеними і точними методами на основі побудови програмних інтерфейсів з сучасними оптимізаційними програмними пакетами.

Програмний комплекс «Веста» містить в собі такі основні логічні модулі:

- головний, який здійснює зв'язок і забезпечує потоки даних між іншими модулями;
- інтерфейсу з користувачем;
- введення даних про область, що покривається;
- автоматичної генерації регулярних і секційно-регулярних кругових покриттів для прямокутної області;

- автоматичної генерації нерегулярних кругових покриттів для довільної області;
- інтерактивної побудови покриття;
- аналізу коректності покриття;
- генерації аналітичного опису умов покриття;
- генерації простору розв'язків для задачі корекції неприпустимого покриття;
- аналізу виконання технологічних обмежень задачі (умов розміщення сенсорів в області та умов взаємного неперетинання сенсорів);
- генерації аналітичного опису технологічних обмежень задачі;
- генерації простору розв'язків для задачі корекції порушених технологічних обмежень задачі;
- аналізу виродженості покриття;
- генерації невиродженого покриття на основі виродженого;
- генерації простору розв'язків для задачі поліпшення якості покриття;
- генерації задачі комівояжера для постановки задачі побудови дротового з'єднання кільцевого типу;
- генерації задачі маршрутизації для постановки задачі побудови дротової мережі радіального типу;
- для розв'язання задач дискретної оптимізації (задачі комівояжера і задачі маршрутизації);
- генерації простору розв'язків задачі зменшення довжини дротових з'єднань для спільної задачі покриття і трасування;
- декомпозиції задачі оптимізації;
- локальної оптимізації;
- рендеринга.

На рис. 5.1 наведена діаграма, яка ілюструє структуру програмного комплексу «Веста».

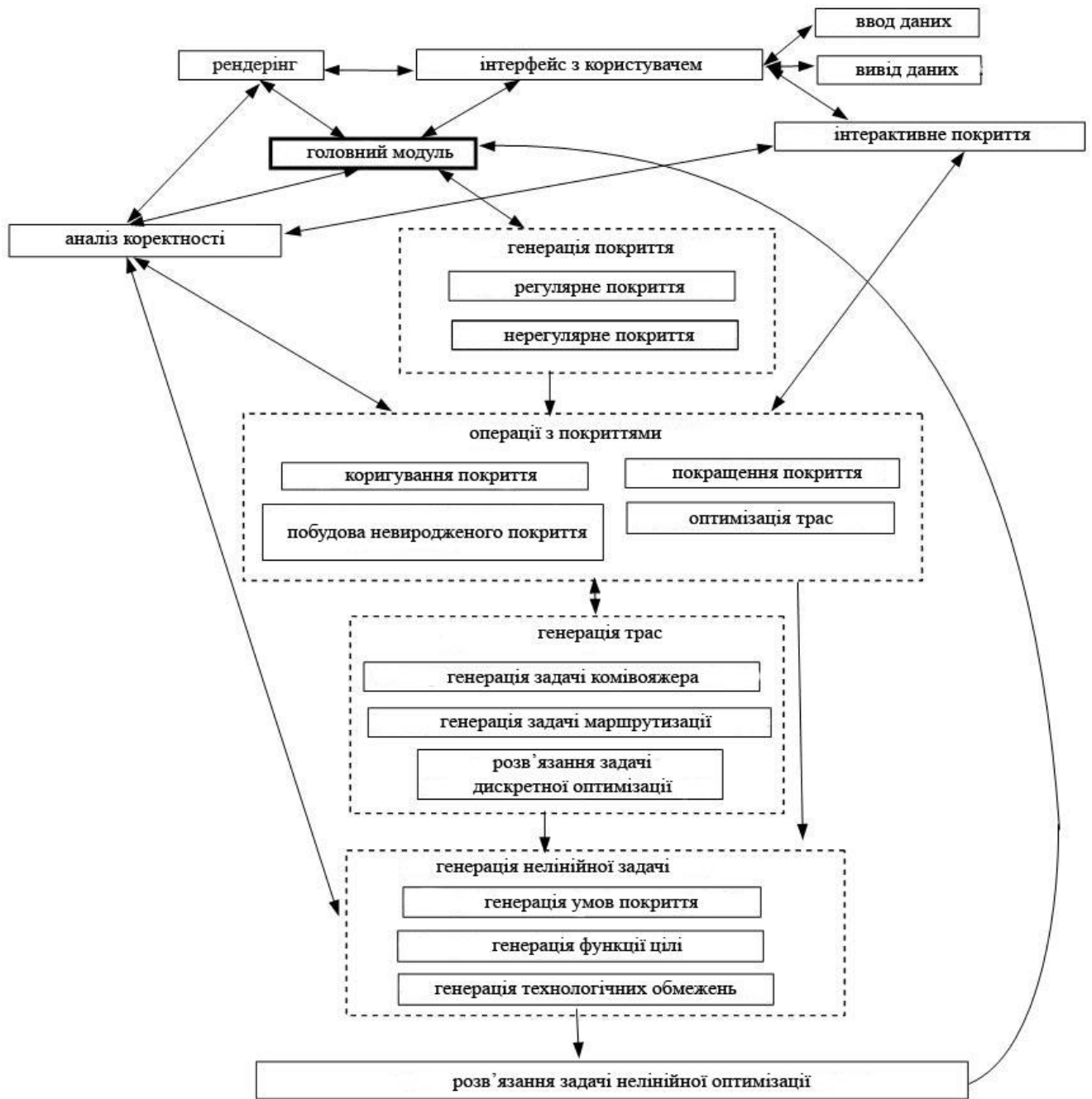


Рисунок 5.1 – Принципова схема програмного комплексу «Веста».

Вікно інтерфейсу програмного комплексу має вигляд, представлений на рис. 5.2.

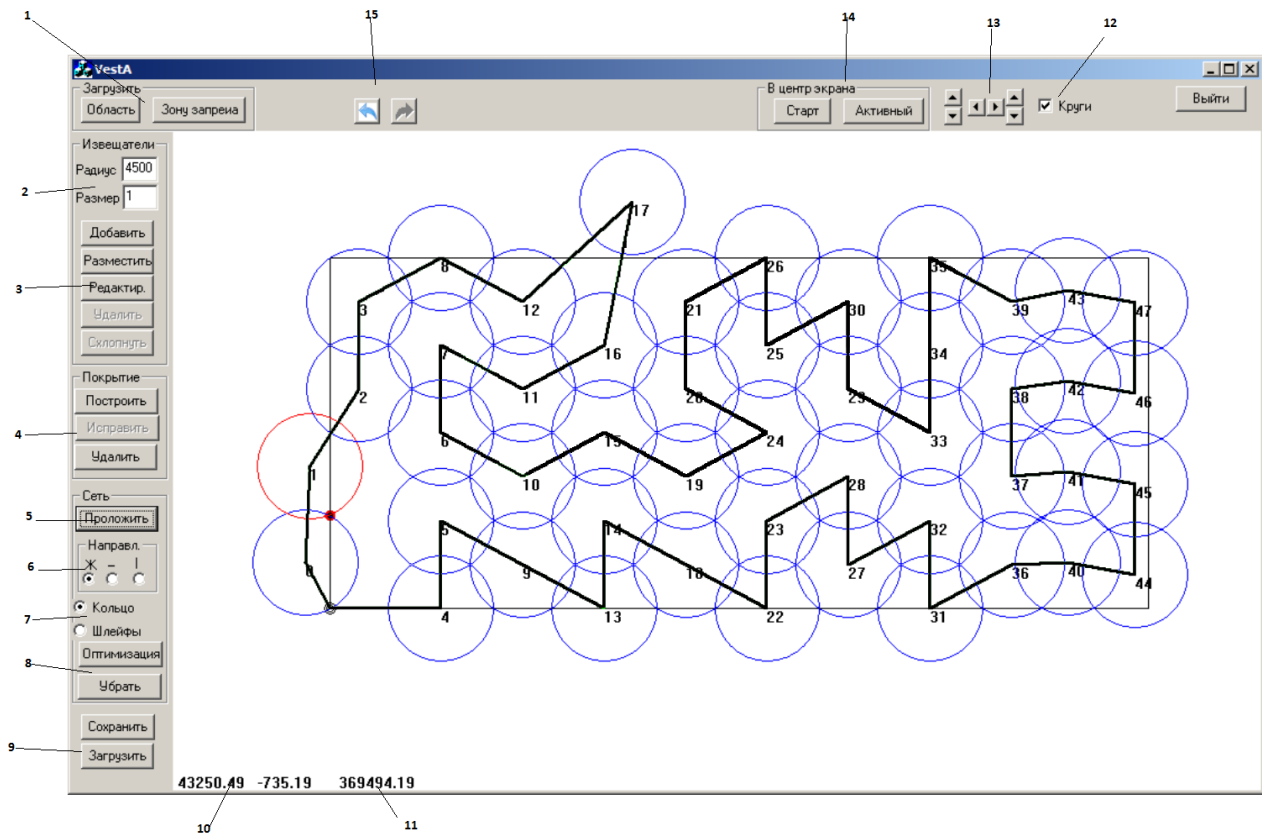


Рисунок 5.2 – Головне вікно програмного комплексу «Веста»

На рисунку позначені групи:

- кнопок 1 служить для виклику стандартних діалогових вікон завантаження файлів з описом областей і областей заборони;
- полів 2, які можуть мати змінне значення, та служить для завдання інформації про радіус сенсорної зони і радіус корпусу датчика;
- кнопок 3, що служить для роботи в інтерактивному режимі, допускаючи операції додавання нового датчика, розміщення нового датчика (напівавтоматичне розміщення в точку, яка запропонована системою), точного редагування числових значень координат центру датчика, видалення датчика з покриття і його «схлопування».

Кнопка «Схлопування» стає доступною після побудови допустимого кругового покриття області. Її активація викликає модулі генерації простору розв'язків для задачі поліпшення якості покриття і модуль локальної оптимізації;

– кнопок 4 служить для виклику операцій автоматичної побудови покриття, видалення покриття та корекції неприпустимого покриття відповідно.

При цьому активація кнопки «Побудувати» в залежності від вигляду області викликає модуль автоматичної генерації регулярних і секційно-регулярних кругових покриттів для прямокутної області або модуль автоматичної генерації нерегулярних кругових покриттів для довільної області.

Кнопка «Виправити» стає доступною тільки за порушення умов покриття. Її активація викликає запуски модулів генерації простору розв'язків для задачі корекції неприпустимого покриття, аналізу виконання технологічних обмежень задачі, генерації аналітичного опису технологічних обмежень задачі, модуль генерації простору розв'язків для задачі корекції порушених технологічних обмежень задачі і модуля розв'язання задачі нелінійної оптимізації;

– кнопка 5 служить для виклику модуля генерації задачі комівояжера для постановки задачі побудови дротового з'єднання кільцевого типу або модуля генерації задачі маршрутизації для постановки задачі побудови дротового з'єднання радіального типу (в залежності від вибору в групі перемикачів 7) з подальшим викликом модуля для розв'язання задач дискретної оптимізації.

Кнопка стає доступною після побудови допустимого покриття;

– перемикачів 6 служить для вибору переважної орієнтації для трас: «x» – довільний напрямок, «←→» – переважно горизонтальний напрямок, «|» – переважно вертикальний напрямок;

– група перемикачів 7 служить для вибору типу мережі: кільцевої або радіальної відповідно;

– кнопок 8 служить для розв'язання задачі оптимізації довжини мережі, що зв'язує датчики, і для скасування результатів трасування. Активація кнопки «Оптимізація» послідовно запускає модуль побудови простору розв'язків для задачі оптимізації довжини дротових з'єднань і модуль розв'язання задачі нелінійної оптимізації;

- група кнопок 9 служить для збереження і завантаження всієї задачі загалом. Задача завантажується в тому ж стані, в якому вона була на момент збереження;
- в полі візуалізації відображаються координати курсора миші 10 і сумарна довжина з'єднань 11, якщо вони побудовані;
- вікно прапорця 12 служить для завдання режиму візуалізації сенсорних зон датчиків;
- група лічильників 13 використовується для управління рендерингом, переміщенням зображення вправо-вліво, вгору-вниз і масштабування відповідно. Управління рендерингом можна здійснювати також за допомогою комп'ютерної миші безпосередньо в поле для візуалізації результатів;
- група кнопок 14 служить для швидкого позиціонування датчиків і точки входу для трасування;
- група кнопок 15 призначена для реалізації операцій «Undo» і «Redo».

## **5.2 Результати обчислювальних експериментів**

В останньому розділі наведені результати обчислювальних експериментів. Обчислення проводилися на комп'ютері AMD FX (tm)-6100 Six-Core Processor 3.30 GHz, 4 Гб з встановленою операційною системою Windows 7.

В ході розв'язання задач використовувалися програми з відкритим вихідним кодом сторонніх розробників.

Задачі дискретної оптимізації (комівояжера і маршрутизації) розв'язувалися за допомогою бібліотеки евристик для генерації розв'язків проблем маршрутизації транспортних засобів VRP (<https://projects.coin-or.org/VRP>), реалізованої у вигляді DLL з виконаним програмним інтерфейсом і параметрами, встановленими за замовчуванням.



Задачі нелінійної оптимізації (корекції покриття, поліпшення покриття, мінімізації довжини трас, що зв'язують датчики) розв'язувалися за допомогою IPOPT (Interior Point Optimizer, <https://projects.coin-or.org/Ipopt>) – програмного пакета для великомасштабної нелінійної оптимізації з реалізованим програмним інтерфейсом і параметрами, встановленими за замовчуванням.

### **5.2.1 Оцінка адекватності отриманих результатів і ефективності використання модуля нерегулярного розміщення пожежних сповіщувачів**

Для оцінки адекватності отриманих результатів була запланована серія експериментів, суть яких зводиться до такого. Для конкретного приміщення проводиться розрахунок схеми розміщення(П) згідно з квадратичною схемою, рекомендованою нормативною документацією [51] і для того ж приміщення – з використанням запропонованого методу розміщення. Потім в ряді точок цього приміщення (на рис. А. 1 відзначені ⊗) імітується виникнення пожежі для кожної зі схем і фіксується час спрацьовування системи пожежної сигналізації. У разі, якщо час спрацьовування запропонованої схеми не більше, ніж нормативної, за меншої кількості ПС, результати визнаються задовільними.

Для проведення експерименту як тестове було вибрано непрямокутне приміщення загальною площею 400,16 м<sup>2</sup>. План приміщення наведений на рис. А.1 (висота стелі 2,4 м).

Для даного приміщення був проведений розрахунок схеми розміщення ПС. Результати розрахунку згідно з нормативною документацією та запропонованим методом наведено на рис. А.2 і А.3 відповідно.

Згідно з проведеними розрахунками кількість ПС, яка необхідна для захисту даного приміщення відповідно до [51], становить 11 шт, а відповідно до методу, що пропонується – 10 шт. (різниця в кількості становить 9%).

На рис. А.4 подано покриття області складної форми, побудоване з використанням запропонованого методу.

## **5.2.2 Оцінка ефективності використання модуля регулярного розміщення пожежних сповіщувачів**

Описаний в четвертому розділі підхід до побудови регулярних покриттів на основі двовимірних решіток і секційно-регулярних покриттів на основі розв'язання модифікованої задачі про ранець за допомогою методу динамічного програмування було реалізовано у вигляді окремого модуля.

Деякі з отриманих в ході проведених обчислювальних експериментів результатів розв'язання задачі кругового покриття прямокутної області  $A$  з розмірами 70000 на 30000 наведені нижче.

Так, на рис. А.5 поданий результат розв'язання задачі секційно-регулярного покриття області  $A$  за допомогою 62 кіл з радіусом 3900, а на рис. А.6 – результат розв'язання задачі регулярного покриття області  $A$  за допомогою 65 кіл того ж радіуса.

Слід зазначити, що навіть у разі збігу числа кіл, які беруть участь у формуванні регулярного і секційно-регулярного покриттів заданої області, використання секційно-регулярного покриття стартової точки для розв'язання задачі проектування системи пожежної сигналізації може виявитися виправданим.

На рис. А.7 та А.8 наведені результати розв'язання задач секційно-регулярного і регулярного покриття області  $A$  за допомогою кіл радіуса 5700 відповідно. Не зважаючи на те, що обидва покриття формуються 31 колами, секційно-регулярне покриття виявляється кращим, оскільки воно є більш технологічним.

На рис. А.9-А.15 наведені результати розв'язання узагальненої тестової задачі покриття прямокутної області з розмірами 100x30 колами різних радіусів – 11, 10 і 9. Вважається, що критерій оцінки покриття дорівнює загальній площі покривних кіл.

Даний приклад цікавий тим, що розв'язання задач для всіх можливих комбінацій радіусів дають різні результати, причому оптимальне (мінімальної площі кіл, що покривають) досягається при використанні всіх трьох радіусів.

Відповідні чисельні результати представлені в таблиці 5.1

Таблиця 5.1 – «Вартість» різних варіантів секційно-регулярного покриття прямокутника.

Кола	1	2	3	1 і 2	1 і 3	2 і 3	1, 2, 3
«Вартість»	1573	1616	1565	1534	1543	1559	1533

Відповідно до теоретичних міркувань при зростанні кількості кіл секційно-регулярне покриття дає все меншу перевагу порівняно з регулярним покриттям. Для всієї площині використання секційно-регулярних покриттів втратить сенс. Однак для переважної більшості практичних задач використання секційно-регулярних покриттів дає суттєвий ефект.

### 5.2.3 Оптимізація характеристик покриття

В ході роботи програмний комплекс «Веста» постійно здійснює моніторинг повноти покриття. У разі неприпустимості одна з точок, в яких порушено покриття, позначається пульсуючою червоною крапкою (рис. А.16 а). На рис. А.16 б) наведений результат роботи програми корекції неприпустимого покриття.

На рис. А.17 наведено покриття, яке отримане в результаті декількох операцій оптимізації якості (зменшення кількості кіл шляхом «схлопування») з покриття, поданого на рис. А.4. В результаті вдалося зменшити кількість покривних кіл на 5 штук.

Оскільки під час аналізу стану питання, що розглядається у даному дослідженні, не вдалося виявити робіт з результатами розв'язання спільних оптимізаційних задач покриття і трасування, було проведено порівняння

результатів розв'язання задачі мінімізації радіуса покривних кіл для однієї з останніх робіт в цій галузі [73], а також попередньої роботи цієї ж школи [74]. Старт проводився з початкових точок, наведених в роботах [73] та [74]. Розв'язання задачі мінімізації радіуса використовується також в розробленому програмному комплексі для корекції задач з порушенням повноти покриття.

**Приклад 2.** Для задач покриття області, обмеженої кривою  $y^2 = x^3 - x$  з роботи [72], отримані такі результати:

– для 18 кіл –  $r=0.1621$ ,  $u=(u_1, \dots, u_{18})=(-0.5258, -0.2435, -0.7620, 0.4522, -0.7660, -0.4290, -0.9404, -0.0209, -0.2750, 0.4364, -0.8342, -0.2391, -0.4015, -0.0462, -0.6984, -0.0305, -0.3022, 0.1310, -0.4951, 0.3276, -0.0930, 0.2027, -0.8658, 0.2360, -0.3308, -0.4487, -0.2136, -0.2531, -0.5709, -0.5384, -0.0882, -0.0719, -0.60710, 0.1765, -0.5333, 0.5829)$ , поліпшення 1.8% (рис. В.18 а, б);

– для 21 кола –  $r=0.1467$ ,  $u=(u_1, \dots, u_{18})=(-0.8733; -0.3312; -0.1751; -0.2438; -0.4475; 0.4962; -0.6831; -0.1288; -0.6587; 0.5467; -0.1344; 0.1760; -0.7289; -0.5483; -0.2967; -0.4273; -0.4992; -0.5138; -0.9643; 0.1699; -0.5870; 0.2807; -0.7513; 0.1212; -0.3784; 0.2265; -0.8176; 0.3865; -0.2904; -0.0201; -0.9130; -0.0908; -0.6290; -0.3372 -0.5261; 0.0118; -0.4295; -0.2349; -0.2244; 0.4016; -0.0281; -0.0469)$ , поліпшення 1.6% (рис. В.18 в, г).

**Приклад 3.** Для задач покриття області, яка обмежена кривою  $x^4 + y^4 = 1$  з роботи [72], отримані такі результати:

– для 20 кіл –  $r=0.3052$ ,  $u=(u_1, \dots, u_{20})=(-0.8397, 0.3582, 0.2301, -0.8929, -0.9424, -0.2013, 0.6705, -0.7140, 0.4200, -0.1630, -0.2498, -0.5479, 0.3021, 0.8639, -0.3403, -0.8896, -0.3411, 0.3520, -0.7034, 0.8137, -0.2082, 0.8077, 0.9484, 0.2500, -0.0037, -0.0698, 0.6412, 0.2200, -0.7227, -0.6623, -0.5350, -0.1207, 0.8721, -0.327881, 0.6993, 0.6840, 0.1828, 0.3901, 0.2340, -0.4891)$ , поліпшення 1.57% (рис. А.19 а, б);

- для 24 кіл і області, обмеженої кривою  $x^4 + y^4 = 1$ ,  $r=0.2725$ ,  $u=(u_1, \dots, u_{24})=(-0.9010, 0.0913, -0.3010, 0.4157, 0.1605, 0.5629, 0.8748, 0.5071, 0.2371, 0.9545, -0.7601, -0.2921, -0.2520, 0.8398, -0.4590, 0.0603, -0.7932, -0.6248, -0.0411, -0.1663, 0.1953, -0.5156, -0.6745, 0.7937, 0.4435, -0.2199, 0.6695, -0.6734,$

0.4379, 0.2682, 0.8335, 0.0478, -0.3173, -0.4107, -0.7643, 0.4893, -0.5017, -0.8610, 0.622494, 0.7356, 0.8814, -0.4135, -0.0694, -0.8103, 0.0631, 0.1150, 0.3970, -0.9700), поліпшення 1.09% (рис. А.19 в, г);

**Приклад 4.** Для задач з роботи [74] отримані такі результати:

– для 15 кіл і прямокутника  $r=0.3636$ ,  $u=(u_1, \dots, u_{15})=(-0.7662, -0.7216, -0.7567, -0.1731, -0.8997, 0.4465, -0.6510, 0.8980, -0.2890, -0.7299, -0.2727, -0.1877, -0.3470, 0.3674, 0.0206, 0.8324, 0.2773, -0.8330, 0.2338, -0.2592, 0.2095, 0.3407, 0.6716, 0.8440, 0.8002, -0.6963, 0.7348, -0.1439, 0.7829, 0.396368)$ , поліпшення 0.53% (рис. В.20 а);

– для 16 кіл і прямокутника  $r=0.3482$ ,  $u=(u_1, \dots, u_{16})=(-0.7882, -0.7236, -0.7494, -0.2055, -0.7178, 0.2402, -0.7902, 0.7221, -0.3258, -0.7583, -0.2554, -0.2779, -0.2574, 0.2764, -0.2982, 0.7960, 0.2070, -0.7960, 0.2817, -0.3344, 0.2664, 0.1547, 0.2155, 0.7399, 0.7447, -0.7634, 0.8391, -0.2178, 0.7505, 0.3339, 0.7236, 0.7885)$ , поліпшення 1.1% (рис. А.20 б);

– для 14 кіл і кола  $r=0.3317$ ,  $u=(u_1, \dots, u_{14})=(0.4539, 0.6354, 0.8423, 0.2924, 0.3886, 0.0002, -0.0006, 0.9430, -0.4546, 0.6348, -0.0002, 0.3267, 0.0002, -0.3267, -0.8426, 0.2915, -0.3886, -0.0002, -0.8423, -0.2925, -0.4539, -0.6354, 0.0006, -0.9430, 0.4547, -0.6348, 0.8426, -0.2915)$ , поліпшення 0.23% (рис. А.20 в).

#### 5.2.4 Оптимізація довжини траси в задачі покриття

У розділі розглядаються приклади розв'язання задач побудови дротових з'єднань кільцевого та радіального типів для задач покриття з їх подальшою оптимізацією.

**Приклад 1.** Розглядається покриття 297 колами радіуса 4500 області з розмірами 70000 на 30000 (рис. А.21-А.22). Траса кільцевого типу довжиною 850783.64 побудована за 4.99 с (рис. А.21). Після оптимізації, проведеної за 52.01 с, довжина траси становила 833392.45 (рис. А.22). Поліпшення склало 2.05%.

**Приклад 2.** Розглядається те ж саме покриття, що і в попередньому прикладі. Мережа трас радіального типу довжиною 920613.71 побудована за 10.73 с (рис. А.23). Після оптимізації, проведеної за 16.03 с, довжина траси становила 900741.16 (рис. А.24). Поліпшення склало 2.16%.

**Приклад 3.** Покриття області складної форми, яка подана об'єднанням двох опуклих 9-кутників 47 колами радіусу 700 (рис. А.25). Траса кільцевого типу довжиною 63192.19 побудована за 1.11 с (рис. А.25 а). Після оптимізації, проведеної за 1.55 с, довжина траси склала 58850.38 (рис. А.25 б). Поліпшення склало 6.87%.

**Приклад 4.** Розглядається те ж саме покриття, що і в попередньому прикладі. Мережа трас радіального типу довжиною 62816.42 побудована за 0.98 с (рис. В.26 а). Після оптимізації, проведеної за 1.31 с, довжина траси становила 58079.79 (рис. В.26 б). Поліпшення склало 7.54%.

Для перевірки працездатності методу при розв'язанні задач великої розмірності була розглянута задача покриття прямокутної області 1000 кіл (рис. А.27)

Отримані такі результати:

– задача з кільцевим типом з'єднань:  $t_s = 13.26$ ,  $t_0 = 189.68$ ,  $l_s = 1553677.46$ ,  $l_0 = 1541994.62$ , поліпшення 0.75%.

– задача з радіальним типом з'єднань:  $t_s = 78.76$ ,  $t_0 = 291.71$ ,  $l_s = 2189264.42$ ,  $l_0 = 2178017.60$ , поліпшення 0.51%.

де  $t_s$  – час побудови траси;  $t_0$  – час розв'язання оптимізаційної задачі;  $l_s$  – довжина траси до оптимізації;  $l_0$  – довжина траси після оптимізації.

## **Висновки по розділу 5**

Обчислювальні експерименти, що проведені в роботі, переконливо підтвердили конструктивність розроблених засобів математичного моделювання відношень геометричних об'єктів в задачах кругового покриття та

продемонстрували адекватність побудованої математичної моделі задачі покриття колами однакового радіуса області складної форми та її реалізацій, ефективність запропонованих стратегій, методів побудови стартових точок, алгоритмів генерації простору розв'язків і методів пошуку локального екстремуму оптимізаційних задач, що виникають.

Слід зазначити, що більшість з отриманих під час обчислювальних експериментів результатів не мають аналогів в світі.

Практична цінність запропонованого підходу для задач кругового покриття довільних областей, який полягає в генерації простору розв'язків задачі для припустимої стартової точки з подальшою локальною оптимізацією, наочно продемонстрована під час розв'язання тестових задач.

## ВИСНОВКИ ПО РОБОТІ

У роботі розв'язано важливу науково-практичну оптимізаційну задачу оптимізації кількісного складу та довжини шлейфів систем пожежної сигналізації на етапі проектування з урахуванням заданих обмежень технологічного характеру. Серед них мінімально і максимально припустимі відстані між центрами кіл та до межі області, на основі отриманих нових теоретично обґрунтованих фундаментальних результатів, включаючи розробку конструктивних засобів математичного моделювання у вигляді нової реалізацій критерію повноти покриття на основі запропонованих функцій належності та функції опису в аналітичному вигляді відношень покриття для трьох кіл. Також виконано побудову нових математичних моделей, розробку ефективних методів генерації наближених розв'язків та схем локальної оптимізації. Розроблено й реалізовано комплекс програм для розв'язання сформульованої задачі.

Обчислювальні експерименти, що проведені в роботі, переконливо підтвердили конструктивність розроблених засобів математичного моделювання.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М. : Мир, 1987. 356 с.
2. Антошкин А. А., Панкратов А. В., Пацук В. Н., Романова Т. Е., Шеховцов С. Б. Задача покрытия прямоугольной области кругами заданного радиуса // Радиоэлектроника и информатика. Харьков : ХНУРЭ. 2001. № 3. С. 38–41.
3. Антошкін О. А., Панкратов О.В. Узагальнена математична модель задачі покриття області ідентичними колами та її основні реалізації // Системи обробки інформації. 2019. № 1(156). С. 44-49. <https://doi.org/10.30748/soi.2019.156.06>.
4. Антошкин А. А., Романова Т. Е. Математическая модель задачи покрытия выпуклой многоугольной области кругами с учетом погрешностей исходных данных // Пробл. машиностроения. 2002. Т. 5. № 1. С. 56–60.
5. Антошкин А. А. Определение интервальной площади, контролируемой пожарным извещателем // Пробл. пожарной безопасности. 2000. № 7. С. 17–20.
6. Антошкин А. А., Комяк В. М., Романова Т. Е. Особенности построения математической модели задачи покрытия в системах автоматической противопожарной защиты // Радиоэлектроника и информатика. Харьков : ХНУРЭ. 2001. № 1. С. 75–78.
7. Антошкин А. А., Романова Т. Е. Применение Ф-функций при построении математической модели задачи покрытия выпуклой многоугольной области кругами // Прикл. геометрія та інж. графіка. 2002. 16. 4. С. 108–114.
8. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М. : Наука, 1965. 173 с.
9. Болтянский В. Г., Солтан П. С. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. Кишинев : Штлинца, 1978. 438 с.
10. Брусов В. С., Пиявский С. А. Вычислительный алгоритм

оптимального покрытия областей плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11. № 2. С. 304–312.

11. Галиев Ш. И. Направления убывания для минимаксиминных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 3. С. 323–343.

12. ГОСТ 10062-75 Газы природные горючие. Метод определения удельной теплоты сгорания. М. : Изд-во стандартов, 1975. 37 с.

13. ГОСТ 11065-75 Топливо реактивных двигателей. Расчетный метод определения низшей удельной теплоты сгорания. М. : Изд-во стандартов, 1975. 28 с.

14. ГОСТ 147-74 Угли бурые, каменные, антрацит, горючие сланцы, торф и брикеты. Метод определения удельной теплоты сгорания. М. : Изд-во стандартов, 1974. 43 с.

15. ГОСТ 21261-75 Нефтепродукты. Метод определения удельной теплоты сгорания. М. : Изд-во стандартов, 1975. 24 с.

16. Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М. : Наука, 1971. 98 с.

17. Данилин А. Н., Комяк В. М., Панкратов А. В. Упаковка эллипсов в прямоугольник минимальных размеров // Управляющие системы и машины. 2016. № 5. С. 3–9.

18. ДБН В.2.5–13–98\* Пожарная автоматика зданий и сооружений. Киев : Госстрой Украины, 1999. С. 19–20, 71–72.

19. Делоне Б. Н., Рышков С.С. Решение задачи о наименее плотном решетчатом покрытии четырехмерного пространства равными шарами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. № 3. С.523–524.

20. Драздейл Д. Введение в динамику пожаров. М. : Стройиздат, 1990. 424 с.

21. Євсєєва Л. Г. Комбінаторна оптимізаційна задача розміщення прямокутників та методи її розв'язання з урахуванням похибок початкових даних : автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.05.02. Харків, 1995. 20 с.

22. Калмыков С.А. Интервально-аналитические методы решения

алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.07. Новосибирск, 1982. 20 с.

23. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск : Наука, 1986. 224 с.

24. Калмыков С. А. Об интервально-аналитическом методе прогонки // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1981. 211 с.

25. Каминская Э. Л., Каминский Т. Э. Модифицированная арифметика и теория погрешностей // Вычисл. математика и матем. физика. М., 1982. С. 96–105.

26. Киселева Е. М., Лозовская Л. И., Тимошенко Е. В. Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств // Кибернетика и систем. анализ. 2009. № 3. С. 98–117.

27. Комяк В. М., Панкратов А. В., Приходько А. Ю. Аналитическое описание радиуса обзора и местоположений пунктов наблюдения наземных систем видео-мониторинга лесных пожаров // Пробл. пожарной безопасности. Харьков, 2015. №37. С. 98–107.

28. Комяк В. М., Панкратов А. В., Приходько А. Ю. Математические модели оптимизации размещения пунктов наблюдения наземных систем видео-мониторинга лесных пожаров // Вестн. Херсон. нац. техн. ун. Херсон, 2015.– №3(54). С.573–579.

29. Комяк В. М., Кравців С. Я., Соболев О. М. Моделювання покриття опуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами // Вісн. Херсон. нац. техн. ун. Херсон, 2018. №3(66). С. 98–107.

30. Комяк В. М., Мунтян В. К. Постановка задачи оптимизации размещения пунктов наблюдения наземных систем видео-мониторинга лесных пожаров // Проблемы пожарной безопасности. Харьков : НУГЗУ. 2012. Вып 31. С.80–84. Режим доступа: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/779>

31. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. М. : Наука, 1969. 368 с.

32. Кравец В. Л. Отыскание допустимого решения одной задачи

покрытия // Вопросы приближенного решения некоторых оптимизационных задач. Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1977. С. 39–45.

33. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. М. : Мир, 1967. 348 с.

34. Куратовский К. Топология. М. : Мир, 1966. Т. 1. 594 с.

35. Мартынов А. П. Метод генерации столбцов в задаче линейного программирования с взаимозависимыми интервальными коэффициентами // Вычислительные технологии. 1998. №2. С. 39–41.

36. Монахов В. Т. Методы исследования пожарной опасности веществ. 2-е изд., перераб. М. : Химия, 1979. 424 с.

37. Панкратов А. В., Пацук В. Н., Романова Т. Е., Метод покрытия прямоугольника конгруэнтными кругами с учётом дополнительных ограничений // Радиоэлектроника и информатика. 2005. №. 1. С. 54–58.

38. Панкратов А. В., Пацук В. Н., Романова Т. Е., Антошкин А. А. Метод регулярного покрытия прямоугольной области кругами заданного радиуса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 1(18). С. 50–52.

39. Пиявский С. А. Об оптимизации сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1968. № 1. С. 68–80.

40. Пожежна техніка. Установки автоматичні аерозольного пожежогасіння. Проектування, монтування та експлуатування. Технічні вимоги : ДСТУ 4490. [Чинний від 2006-07-01]. К. : Держспоживстандарт України, 2006. 16 с.

41. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев : Техніка, 1967. 212 с.

42. Рвачев В. Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов // Докл. АН УССР. 1963. Т.153. № 4. С. 765–767.

43. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев : Наук. думка, 1982. 550 с.

44. Роджерс К. А. Укладки и покрытия. М. : Мир, 1968. 134 с.

45. Романова Т. Е., Кривуля А. В. Средства математического моделирования задач покрытия // Доп. НАН України. 2008. № 9. С. 48–52.

46. Романова Т. Е., Злотник М. В., Кривуля А. В. Трансляционное прямоугольное покрытие // Доп. НАН України. 2008. Вып 7. С.48–53.
47. Романова Т. Е., Шеховцов С. Б. Ф-функции в задачах покрытия // Системи обробки інформації. 2006. Вип. 9. С. 119–122.
48. Рышков С. С., Барановский Е. П. С-типы  $n$ -мерных решеток и пятимерные примитивные параллелепипеды (с приложением к теории покрытий) // Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. М. : Наука, 1976. 137 с.
49. Рышков С. С., Барановский Е. П. Решение задачи о наименее плотном решетчатом покрытии 5-мерного пространства равными шарами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 1. С.39–42.
50. Системи пожежної сигналізації та оповіщення. Ч. 14. Настанови щодо побудови, проектування, монтування, введення в експлуатацію, експлуатування і технічного обслуговування (CEN/TS 54-14:2004, IDT) : ДСТУ-Н CEN/TS 54-14:2009. [Чинний від 2010-01-01]. К. : Держспоживстандарт України, 2009. 68 с.
51. Системи протипожежного захисту : ДБН В.2.5–56–2014 [Чинний від 2015-07-01]. К. : ДП «Укрархбудінформ». 2014. 127 с.
52. Смеляков С. В. Координатно-ситуационный подход к регуляризации отображений геометрической информации // Кибернетика и системн. анализ. 1992. №6. С. 155–163.
53. Соболев О. М. Геометричне моделювання  $\Omega$ -поверхонь в задачах оптимізаційного покриття // Наук. Вісн. Таврійського державного агротехнолог. ун-ту. Мелітополь : ТДАГУ. 2016. Т. 1. Вып.6. С. 244–249. Режим доступа: [http://repositc.nuczu.edu.ua/bitstream/123456789/653/1/nvtdau\\_2016\\_6\\_1\\_28.pdf](http://repositc.nuczu.edu.ua/bitstream/123456789/653/1/nvtdau_2016_6_1_28.pdf).
54. Солтан П.С. К задачам о покрытии и освещении выпуклых тел // Изв. АН Молд. СССР. 1963. № 1. С. 49–57.
55. Солтан П.С. Экстремальные задачи на выпуклых множествах. Кишинев : Штлинца, 1976. 357 с.
56. Стационарні системи пожежогасіння. Автоматичні спринклерні системи. Проектування, монтування та технічне обслуговування (EN

12845:2004+A2:2009, IDT) : ДСТУ Б EN 12845:2011. [Чинний від 2011-07-12]. К. : Мінрегіон України, 2011. 218 с.

57. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования Киев. : Наук. думка, 1986. 267 с.

58. Стоян Ю. Г., Романова Т. Е. Интервальное касание выпуклых интервальных многоугольников // Докл. АН Украины. Сер. А. 2000. № 7. С. 21–26.

59. Стоян Ю. Г. Интервальное пространство  $I_s^2(\mathbf{R})$ . Интервальные уравнения. Харьков, 1996. 19 с. (Препринт / НАН Украины, Ин-т проблем машиностроения).

60. Стоян Ю. Г. Интервальное пространство  $I_s^2\mathbf{R}$ . Интервальные уравнения // Докл. АН Украины. Сер. А. 1998. № 6. С. 109–116.

61. Стоян Ю. Г. Интервальные множества. Харьков, 1998. 27с. (Препринт/ НАН Украины, Ин-т проблем машиностроения).

62. Стоян Ю. Г. Интервальные отображения // Доп. НАН України. 1996. №10. С. 57–63.

63. Стоян Ю. Г. Квазилинейные интервальные отображения. Интервальная метрика. Харьков, 1995. 24с. (Препринт / НАН Украины, Ин-т проблем машиностроения).

64. Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Евсеева Л. Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных // Доп. НАН України. 1997. №7. С. 56–60.

65. Стоян Ю. Г. Метрическое пространство центрированных интервалов // Доп. НАН України. 1995. №7. С. 60–63.

66. Стоян Ю. Г. Метрическое пространство центрированных интервалов // Докл. АН Украины. Сер. А. 1996. № 7. С. 23–25.

67. Стоян Ю. Г. Об одном обобщении функции плотного размещения // Доклады АН УССР. 1980. № 8. С. 70–74.

68. Стоян Ю. Г. Об одном обобщении функции плотного размещения // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. №8. С. 71–74.
69. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Оптимизация покрытий трансляциями ограниченных множеств // Докл. АН УССР. Сер.А. 1988. № 7. С. 20–23.
70. Стоян Ю. Г., Пацук В. Н. Покрытие многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса // Доп. НАН України. 2006. № 3. С. 74–77.
71. Стоян Ю. Г. Расширенное пространство  $I_s(\mathbb{R})$  центрированных интервалов. Харьков, 1994. 27 с. (Препринт / НАН Украины, Ин-т проблем машиностроения).
72. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах целочисленного анализа. М. : Наука, 1989. 300 с.
73. Ушаков В. Н., Лебедев П. Д. Алгоритмы оптимального покрытия множеств на плоскости  $\mathbb{R}^2$  // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. 26:2. С. 258–270.
74. Ушаков В. Н., Лахтин А. С., Лебедев П. Д. Оптимизация хаусдорфова расстояния между множествами в евклидовом пространстве // Тр. Института математического моделирования. Уральское отд-ние РАН. 2014. Т.20.№ 3. С. 291–308.
75. Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М. : Физматгиз, 1958. 363 с.
76. Хадвигер Г., Дебруннер Г. Комбинаторная геометрия плоскости. М. : Наука, 1965. 153 с.
77. Шарая И. А. О максимальной внутренней оценке множеств решений интервальных линейных систем // Вычисл. технологии. 1998. №2. С. 55–66.
78. Шаровар Ф.И. Методы раннего обнаружения загораний. М. : Стройиздат, 1988. 336 с.
79. Шеховцов С. Б., Яковлев С. В. Формализация и решение одного класса задач покрытия при синтезе систем управления и контроля // Автоматика и телемеханика. 1989. № 5. С. 160–168.

80. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. М. : Наука, 1974. 383 с.
81. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. Киев: Наук. думка, 1979. 199 с.
82. Элементы теории геометрического проектирования / Под ред. В. Л. Рвачева. К. : Наук.думка, 1995. 244 с.
83. Яглом И. М. О комбинаторной геометрии. М. : Знание, 1971. 67 с.
84. Яковлев С.В. Об одном классе функций и его применении при формализации задач геометрического проектирования // Математические методы в проектировании. Киев : Ин-т кибернетики АН УССР. 1985. С. 36–40.
85. Яковлев С.В. Решение задач геометрического покрытия с использованием структур линейных неравенств // Методы прикладной математики в машиностроении. Киев : Ин-т кибернетики АН УССР. 1987. С. 42–48.
86. Adlakha S., Srivastava M. Critical density thresholds for coverage in wireless sensor networks // Proceedings of the IEEE Wireless Communications and Networking Conf. (WCNC). 2003. Vol. 3. P. 1615–1620.
87. Alefeld G., Herzberger J. Uber Simultanverfahren zur Bestimmung reeller Polynomwurzeln // ZAMM. 1974. Bd 54. S. 413–420.
88. Alefeld G., Rokne J. On the evaluation of rational functions in interval arithmetics // SIAM J. Numer. Anal. 1981. №5. P. 862–870.
89. Antoshkin O., Pankratov O. Construction of optimal wire sensor network for the area of complex shape // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 6, N 4(84). P. 45-53. Way of Access : DOI: 10.15587/1729-4061.2016.86171.
90. Applegate D. L., Bixby R. E., Chvatal V. The Traveling Salesman Problem: A Computational Study. New Jersey : Princeton University Press, 2006. P. 10–14.
91. Laporte G. The traveling salesman problem: an overview of exact and approximate algorithms // European Journal of Operational Research. 1992. Vol. 59.



No 2. P. 231–247.

92. Aurenhammer F. Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure // *ACM Comput. Surv.* 1991. Vol. 23. No4. P. 345–406.

93. Golden B., Raghavan S., Wasil E. *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*. New York : Springer, 2008. 591 p. ISBN: 978-0-387-77777-1.

94. Bambah R. P. Geometry of numbers, packing and covering and discrete geometry // *Math. Student.* 1971. No 39. P. 117–129.

95. Bambah R. P., Rogers C. A., Zassenhaus H. On covering with convex domains // *Acta Arith.* 1964. № 9. P. 191–207.

96. Bambah. R. P. On lattice coverings by spheres // *Proc. Nat. Inst. Sci. India.* 1954. Vol. 20. P. 25–52.

97. Bateman P., Edös P. Geometrical extrema suggested by a lemma of Besicovitch // *Amer. math. monthly.* 1958. Vol. 58. P. 306–314.

98. Beaumont O. Solving interval linear systems with oblique boxes // *Proc. IMACS-GAMM International Symp. on Scien. Computing, Computer Arithm. and Valid. Num. Budapest (Hungary).* 1998. P. 15–16.

99. Beeck H. Über Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten // *Computing.* 1973. No 3. P. 231–244.

100. Bellmore M., Nemhauser G. L. The traveling salesman problem: a survey // *Operations Research.* 1968. Vol. 16. No 3. P. 538–558.

101. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., Romanova T. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems // *J. Annals of Operations Research, Publisher Springer Netherlands* 179, 1:2010. P. 343–368.

102. Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu. Optimal clustering of a pair of irregular objects // *Journal of Global Optimization.* 2015. 61 (3). P. 497–524.

103. Bezdek K. Über einige optimale Konfigurationen von Kreisen // *Ann. Iniv. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. №.* 26. P. 297–303.

104. Birgin E. G., Bustamante L. H., Callisaya H. F. Packing circles within

ellipses // International transactions in operational research. 2013. Vol. 20 (3). P. 365–389.

105. Boukerche A., Fei X. A voronoi approach for coverage protocols in wireless sensor networks // Proceedings of the IEEE Global Telecommunications Conference (Globecom). 2007. P. 5190–5194.

106. Boukerche A., Fei X., Araujo R. B. An optimal coverage-preserving scheme for wireless sensor networks based on local information exchange // Comp. Comm. Amsterdam (The Netherlands) : Elsevier, 2007. Vol. 30. Iss. 14-15. P. 2708–2720.

107. Carbunar B., Grama A., Vitek J., Carbunar O. Redundancy and coverage detection in sensor networks // ACM Trans. Sensor Netw. 2006. Vol. 2. Iss. 1. P. 94–128.

108. Cardei M., Wu J., Lu M., Andpervaiz M. O. Maximum network lifetime in wireless sensor networks with adjustable sensing ranges // Proceedings of the IEEE International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications (WiMob). 2005. P. 438–445.

109. Charnes A., Granot D., Granot F. A primal algorithm for interval linear programming problems // Linear Algebra and Appl. 1977. Vol. 17. P. 65–78.

110. Chatterjee S., Carrera C., Lynch L. A. Genetic algorithms and traveling salesman problems // European Journal of Operational Research. 1996. Vol. 93. No. 3. P. 490–510.

111. Chen Si., Golden B., Wasil E. Split delivery vehicle routing problem: Applications, algorithms, test problems, and computational results // Networks. 2007. Vol. 49. Iss. 4. P. 318–329.

112. Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem// Computational Geometry: Theory and Applications. 2010. Vol. 43. Iss. 5. P. 535-553.

113. Applegate D., Bixby R., Chvtal V., Cook W. The Traveling Salesman Problem : A Computational Study. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 2006. 608 p. ISBN-13: 978-0691129938.

114. Applegate D. The Concorde source code. URL: <http://www.tsp.gatech.edu/concorde.html>. Last access: 2008.
115. Dantzig G., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a large-scale travelingsalesman problem // *Operations Research*. 1954. Vol. 2. No. 4. P. 393–410.
116. Davenport H. The covering of space by spheres // *R. C. Circ. mat.* Palermo. 1952. Vol. 1. Iss. 1. P. 92–107.
117. Dempster M. Distributions in intervals and linear programming // *Topics in interval analysis*. Oxford: Clarendon Press. 1969. P. 107–127.
118. Dixon L. C. W., Szegő G. P. Towards global optimization // Vol. 1-2. Amsterdam : North-Holland. 1975. 484 p. 1978. 372 p.
119. Dong G., Guo W. W., Tickle K. Solving the traveling salesman problem using cooperative genetic ant systems // *Expert Systems with Applications*. 2012. Vol. 39. No. 5. P. 5006–5011.
120. Dorigo M., Gambardella L. M. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem // *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 1997. Vol. 1. No. 1. P. 53– 66.
121. Drezner Z. The p-centre problem – heuristic and optimal algorithms // *J. OR Soc.* 1984. Vol. 35. P. 741–748.
122. Du X., Lin F. Maintaining differentiated coverage in heterogeneous sensor networks // *EURASIP J. Wirel. Comm. Netw.* 2005. Vol. 4. P. 565–572.
123. Erdos P., Rogers C. A. Covering space with convex bodies // *Acta Aritm.* 1962. No. 7. P. 281–285.
124. Fary L. Sur la densite des reseaux de domaines convexes // *Bull. Soc. Math. Fr.* 1950. No. 78. P. 152–161.
125. Fejes Toth L. Covering the plane by convex discs // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* - 1972. No. 24. P. 417–421.
126. Fejes Toth L. Eine Bemerkung über die Bedeckung der Ebene durch Eibereiche mit Mittelpunkt // *Acta Sci. Math. Syeged.* 1946. No. 11. P. 93–95.
127. Fejes Toth L. Lagerungen in der Ebene, auf Kugel und in Raum // *Grundl Math. Wiss.* 65. Berlin : Springer, 1953. 260 p.

128. Fejes Toth L. Lagerungen in der Ebene, auf Kugel und in Raum, zweite Auflage // Grundle Math. Wiss. 65. Berlin : Springer-Verlag. New York : Heidelberg, 1972. 250 p.
129. Fejes Toth L. Packing and covering with, convex discs // Studia Sci. Math. Hungar. 1980. No. 15. P. 93–100.
130. Fejes Toth L. Some packing and covering theorems // Acta Sci. Math. Szeged. 1950. 12/A. P. 62–67.
131. Few L. Covering space by spheres // J. London. Math. Soc. 1956. No. 28 . P. 297–304.
132. Foley J. D. Computer Graphics: Principles and Practice. Addison-Wesley, 1990. 965 p.
133. Dantzig G., Ramser J. The truck dispatching problem // Management Science. 1959. Vol. 6. P. 80–91.
134. Gallais A., Carle J., Simplot-Ryl D., Stojmenovic I. Localized sensor area coverage with low communication overhead // IEEE Trans. Mobile Comput. 2008. Vol. 7. Iss. 5. P. 661–672.
135. Geng X., Chen Z., Yang W., Shi D., Zhao K. Solving the traveling salesman problem based on an adaptive simulated annealing algorithm with greedy search // Applied Soft Computing. 2011. Vol. 11. No. 4. P. 3680–3689.
136. Groemer H. Space covering by translate of convex sets // Pacific J. Math. 1979. No. 82. P. 379–386.
137. Groer C., Golden B., Wasil E. A library of local search heuristics for the vehicle routing problem // Mathematical Programming Computation. 2010. Vol. 2. Iss. 2. P. 79–101.
138. Hadwiger H. Über extremale Punkverteilungen in eben Gebieten // Math. Zeits. 1944. V. 49. S. 370–373.
139. Hall P. Introduction to the Theory of Coverage Processes. John Wiley & Sons Incorporated, 1988. 432 p.
140. Hansen E. A globally convergent interval method for computing and bounding real roots // BIT. 1977. Vol. 18. P. 415–424.

141. Krawczyk R. Interval extensions and interval iterations // Computing. 1980. №2-3. P. 119–129.
142. Hansen E. Global optimization using interval analysis. N. Y. : Marcel Dekker. 1992. 728 p.
143. Hansen E. The centered form // Topics in interval analysis. Oxford : Clarendon Press, 1969. P. 102-106.
144. Hansen P., Mladenovic N. Variable neighborhood search: principles and applications // European Journal of Operational Research. 2001. Vol. 130. No. 3. P. 449–467.
145. Helsgaun K. An effective implementation of the Lin-Kernighan traveling salesman heuristic // European Journal of Operational Research. 2000. Vol. 126. No. 1. P. 106–130.
146. Helsgaun K. General k-opt submoves for the Lin-Kernighan TSP heuristic // Mathematical Programming Computation. 2009. Vol. 1. No. 2–3. P. 119–163.
147. Heppes A., Melissen H. Covering a rectangle with equal circles // Period. Math. Hungar. 1997. V. 34. P. 65–81.
148. Huang C. F., Lo L. C., Tseng Y. C., Chen W.-T. Decentralized energy-conserving and coverage-preserving protocols for wireless sensor networks // In Proceedings of the International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). 2005. Vols. 1–6. P. 640-643.
149. Huang C. F., Tseng Y. C., Wu H. L. Distributed protocols for ensuring both coverage and connectivity of a wireless sensor network // ACM Trans. Sensor Netw. 2007. Vol. 3. Iss. 1. P. 1–24.
150. Liu Yi., Xiong Shengwu, Liu Hongbing Hybrid simulated annealing algorithm based on adaptive cooling schedule for TSP // Proceedings of the First ACM/SIGEVO Summit on Genetic and Evolutionary Computation (GEC '09). 2009. P. 895–898.
151. Bramel J., Simchi-Levi D. Set-covering-based algorithms for the capacitated VRP // The Vehicle Routing Problem. 2001. P. 85–108. ISBN : 0-89871-498-2.

152. Cordeau J.-F., Gendreau M., Hertz A., Laporte G., Sormany J.-S. New heuristics for the vehicle routing problem // *Logistics Systems: Design and Optimization* / Editors : A. Langevin, D. Riopel. Springer, 2005. P. 270–297.
153. Jandl H., Wieder K. A continuous set covering problem as a quasidifferentiable optimization problem // *Optimization*. 1988. 19. № 6. P. 781–802.
154. Jiang J., Dou W. A coverage-preserving density control algorithm for wireless sensor networks // *In Proceedings of the 3rd International Conference on Ad-Hoc Networks and Wireless (Adhoc-Now)*. Lecture Notes in Computer Science. 2004. Vol. 3158. P. 42–55.
155. Johnson D. S., McGeoch L. A. The travelling salesman problem: a case study // *Local Search in Combinatorial Optimization* / E. Aarts, J. K. Lenstra, etc. Princeton : Princeton University Press, 2003. P. 215–310.
156. Jung H. W. E. Über die kleinste Kugel, die eine raumliche Figur einschliesst // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1901. Vol. 123. P. 241–257.
157. Helsgaun K. An effective implementation of the Lin-Kernighan traveling salesman heuristic // *European Journal of Operational Research*. 2000. Vol. 126. Iss. 1. P. 106–130.
158. Weiler K. An incremental angle point in polygon test // Heckbert P. (Ed.) *Graphic Gems IV*. Boston, MA : Academic Press, 1994. P. 16–23.
159. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space  $\mathbb{IR}$  // *Comp. Suppl.* 1980. Vol. 2. P. 33–49.
160. Kaucher E. Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretender Räume: Dissert. Karlsruhe, 1973. 272 p.
161. Kershner R. The number of circles covering a set // *Amer. J. Math.* 1939. Vol. 61. P. 665–671.
162. Kim J. E., Han J., Lee C. G. Optimal 3-coverage with minimum separation requirements for ubiquitous computing environments // *Mobile Netw. Appli.* 2009. Vol. 14. Iss. 5. P. 556–570.
163. Kim J. E., Yoon M. K., Han J., Lee C. G. Sensor placement for 3-coverage

with minimum separation requirements // In Proceedings of the 4th IEEE International Conference on Distributed Computing in Sensor Systems (DCOSS). 2008. P. 266–281.

164. Komyak V., Pankratov A., Patsuk V., Prikhodko A. The problem of covering the fields by the circles in the task of optimization of observation points for ground video monitoring systems of forest fires // ECONTECHMOD: An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes 2016. Vol. 5. No. 2. P. 133–138.

165. Krawczyk R. Interval extensions and interval iterations // Computing. 1980. №2–3. P. 119–129.

166. Kumar S., Lai T. H., Balogh J. On k-coverage in a mostly sleeping sensor network // In Proceedings of the ACM International Conference on Mobile Computing and Networking (Mobicom). 2004. P. 114–158.

167. Kumar S., Lai T. H., Balogh J. On k-coverage in a mostly sleeping sensor network // Wirel. Netw. Springer, 2008 – Vol. 14. Iss. 3. P. 277–294.

168. Larranaga P., Kuijpers C. M. H., Murga R. H., Inza I., Dizdarevic S. Genetic algorithms for the travelling salesman problem: a review of representations and operators // Artificial Intelligence Review. 1999. Vol. 13. No. 2. P. 129–170.

169. Lazos L., Poovendran R. Stochastic coverage in heterogeneous sensor networks // ACM Trans. Sensor Netw. 2006. Vol. 2. Iss. 3. P. 325–358.

170. Lengyel A., Veres I. A. Egysegnegyzet lefedese egybevago korokkal (Covering the unit square with congruent circles) : Competition essay. Technical University Budapest, Hungary, 1996.

171. Lin S., Kernighan B. W. An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem // Operations Research. 1973. Vol. 21. No. 2. P. 498–516.

172. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem // Operations Research. 1963. Vol. 11. No. 6. P. 972–989.

173. Liu B., Towsley D. A study of the coverage of large-scale sensor networks // In Proceedings of the IEEE International Conference on Mobile Ad-Hoc and Sensor Systems (MASS). 2004. P. 475–483.

174. Mancini L. J., McCormick G. P. Bounding global minima // Math. of Oper.

Res. 1976. № 1. P. 50–53.

175. Marinakis Y., Migdalas A., Pardalos P. M. A hybrid genetic-GRASP algorithm using Lagrangean relaxation for the traveling salesman problem // *Journal of Combinatorial Optimization*. 2005. Vol. 10. No. 4. P. 311–326.

176. Marinakis Y., Migdalas A., Pardalos P. M. Expanding neighborhood GRASP for the traveling salesman problem // *Computational Optimization and Applications*. 2005. Vol. 32. No. 3. P. 231–257.

177. Marinakis Y., Migdalas A., Pardalos P. M. Multiple phase neighborhood search-GRASP based on Lagrangean relaxation, random backtracking Lin-Kernighan and path relinking for the TSP // *Journal of Combinatorial Optimization*. 2009. Vol. 17. No. 2. P. 134–156.

178. Markov S. M. A non-standard subtraction of intervals // *Serdica*. 1977. V.3.P. 359–370.

179. Markov S. M. Extended interval arithmetic // *C. R. Acad. Bulgare Sci*. 1977. V. 30. P. 1239–1242.

180. Martin O. C., Otto S. W. Combining simulated annealing with local search heuristics // *Annals of Operations Research*. 1996. Vol. 63. No. 1. P. 57–75.

181. Megerian S., Koushanfar F. Exposure in wireless sensor networks: Theory and practical solutions // *Wirel. Netw*. 2002. Vol. 8. P. 443–454.

182. Melissen H. Loosest circle coverings of an equilateral triangle // *Math. Mag*. 1997. V. 70. P. 119–125.

183. Melissen J. B. M., Schuur P. C. Covering a rectangle with six and seven circles // *Discrete Appl. Math*. 2000. V. 99. P. 149–156.

184. Melissen J. B. M., Schuur P. C. Improved coverings of a square with six and eight equal circles // *Electron. J. Combin*. 1996. V. 3. R. 32. 10 p.

185. Melissen H. Packing and covering with circles : Ph Dthesis. Universiteit Utrecht, 1997.

186. Merz P., Freisleben B. Memetic algorithms for the traveling salesman problem // *Complex Systems*. 2001. Vol. 13. P. 297–345.

187. Misevicius A., Smolinskas J., Tomkevicius A. Iterated tabu search for the



traveling salesman problem: new results // Information Technology and Control. 2005. Vol. 34. No. 4. P. 327–337.

188. Mo W., Qiao D., Wang Z. Mostly-Sleeping wireless sensor networks: Connectivity, k-coverage and  $\alpha$ -lifetime // In Proceedings of the 43rd Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. 2005. P. 1–10.

189. Moore R. E. Interval analysis. N.Y. : Prentice-Hall, 1966. 400 p.

190. Moore R. E. Interval methods for nonlinear systems // Fundamentals of numerical computation. Wien – N.Y. : Springer-Verl. 1980. P.113–120.

191. Nesterov V. M. Interval and twin arithmetics // Reliable Computing. 1997. №4. P. 369–380.

192. Neumaier A. Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 255 p.

193. Neville E. H. On the solution of numerical functional equations // Proc. London Math. Soc. 1915. Vol. 14. P. 308–326.

194. Nickel K. Quadraturverfahren mit Fehlerschranken // Computing. 1968. № 1. P. 47–64.

195. Nurmela K. J. Conjecturally optimal covering of an equilateral triangle with up to 36 equal circles // Experiment. Math. 2000. V. 9. № 2.

196. Nurmela K. J., Ostergard P. R. J. Covering a square with up to 30 circles. Helsinki University of Technology, Laboratory for Theoretical Computer Science. Research report, 2000.

197. Nurmela, K. J., Ostergard P. R. J. Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles // Exp. Math. 2000. Vol. 9(2). P. 241–250.

198. Oelschlagel D., Susse H. Interval analytic treatment of convex programming problems // Computing. 1980. № 2–3. P. 213–225.

199. Toth P., Tramontani A. An integer linear programming local search for capacitated vehicle routing problems // Golden B., Raghavan S., Wasil E. The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges – N. Y. : Springer, 2008. P. 275–295.

200. Paillard G., Ravelomananana V. Limit theorems for degree of coverage and lifetime in large sensor networks // In Proceedings of the IEEE Infocom Conference on Computer Communications. 2008. P. 106–110.
201. Qi C. An ant colony system hybridized with randomized algorithm for TSP // Proceedings of the 8-th ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking, and Parallel/Distributed Computing (SNPD2007). IEEE Press, Qingdao, China. 2007. P. 461–465.
202. Quang V. T., Miyoshi T. An algorithm for sensing coverage problem in wireless sensor networks // In Proceedings of the IEEE Sarnoff Symposium. 2008. P. 1–5.
203. Quang V. T., Miyoshi T. A novel gossip-based sensing coverage algorithm for dense wireless sensor networks // Comput. Netw. 2009. Vol. 53. Iss. 13. P. 2275–2287
204. Franceschi R. De., Fischetti M., Toth P. A new ILP-based refinement heuristic for vehicle routing problems // Mathematical Programming. 2006. Vol. 105. Iss. 2–3. P. 471–499.
205. Ratschek H., Rokne J. New computer methods for global optimization. Chichester : Ellis Horwood Limited, 1988. 229 p.
206. Ratschek H., Rokne J. Optimality of the centered form // Interval Mathematics. N.Y.e.a. : Academic press, 1980. P.499–508.
207. Reifenger E. F. A problem on circles // Math. Gaz. 1948. No. 32. P. 290–292.
208. Rogers C. A. Lattice, covering of space // Mathematica. 1959. N 6. P. 33–39.
209. Rogers C. A. Packing and Covering. Cambridge : Cambridge University Press, 1964. 120 p.
210. Lin S., Kernighan B. W. An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem // Operations Research. 1973. Vol. 21. P. 2245–2269.
211. Schroder G. Differentiation of interval functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 36. P. 485–490.

212. Shary S. P. On controlled solution set of interval algebraic // Interval Computations. 1992. №4. P. 66–75.
213. Sloane N. J. A., Hardin R. H., Smith W. D. Tables of spherical codes. URL : <http://www.research.att.com/~njas/packings/>.
214. Ralphs T. Parallel branch and cut for capacitated vehicle routing // Parallel Computing. 2003. Vol. 29. P. 607–620.
215. Stoyan Yu., Gil N., Romanova T., Terno J., Schithauer G. Construction of a  $\Phi$ -function for 2D primary objects. Technische Univarsitat Dresden, MATH-NM-13, 2001. 27 p.
216. Stoyan Yu. G.  $\Phi$ -function and its basic properties // Докл. АН Украины. Сер. А. 2001. № 8. С. 112–117.
217. Stoyan Yu., Gil N., Romanova T., Terno S., Schithauer G. Construction of a  $\Phi$ -function for 2D primary objects // Technische Univarsitat Dresden, MATH – NM – 13. 2001. 27 p.
218. Stoyan Yu. G., Romanova T. Ye. Optimization problem of placement of interval rectangles // Proc. IMACS-GAMM International Symp. on Scien. Computing, Computer Arithm. and Valid. Num. Budapest (Hungary). 1998. P. 164.
219. Stoyan Yu. G., Smelyakov S. V. Elemental basis of numerical geometry // Computer. Arithmetic and Enclosure Methods. Amsterdam, 1992. P. 462–471.
220. Stoyan Yu. G. The extended interval space and elementary mappings // Proc. of the IMACS–GAMM Intern. Symp. on Numerical Methods and Error Bounds. (Oldenburg, Germany). Oldenburg, 1995. P. 270–279.
221. Stutzle T., Hoos H. H. Analysing the run-time behaviour of iterated local search for the travelling salesman problem // Hansen P., Ribeiro C., eds. Essays and Surveys on Metaheuristics. Boston : Kluwer Academic Publishers, 2002. P. 589–611.
222. Ralphs T., Kopman L., Pulleyblank W., Trotter L. On the capacitated vehicle routing problem // Mathematical Programming. 2003. Vol. 94. P. 343–359.
223. Ralphs T. Parallel branch and cut for capacitated vehicle routing // Parallel Computing. 2003. Vol. 29. P. 607–620.
224. Tarnai T., Gáspár Zs. Covering a square by equal circles // Elem. Math.

1995. V. 50. P. 167–170.

225. Tian P., Ma J., Zhang D. M. Application of the simulated annealing algorithm to the combinatorial optimisation problem with permutation property: an investigation of generation mechanism // *European Journal of Operational Research*. 1999. Vol. 118. No. 1. P. 81–94.

226. Tian D., Georganas N. D. A node scheduling scheme for energy conservation in large wireless sensor networks // *J. Wirel. Comm. Mobile Comput.* 2003. Vol. 3. Iss. 2. P. 271–290.

227. Fejes Toth L. Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und in Raum // *Grundl Math. Wiss.*, 65. Berlin : Springer, 1953. 260 p.

228. Veltri G., Huang Q., Qu G., Potkonjak M. Minimal and maximal exposure path algorithms for wireless embedded sensor networks // In *Proceedings of the ACM International Conference on Embedded Networked Sensor Systems (SenSys)*. 2003. P. 40–50.

229. Voronoi G. F. Recherches sur les parallélogrammes primitifs // *J. reine und angew. Math.* 1908. 134. P. 198–287.

230. Wächter A., Biegler L. T. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming // *Mathematical Programming*. 2006. V. 106(1). P. 25–57.

231. Wan P.-J., Yi C.-W. Coverage by randomly deployed wireless sensor networks // *IEEE Trans. Inf. Theory*. 2006. Vol. 52. Iss. 6. P. 2658–2669.

232. Wang B. Coverage problems in sensor networks: A survey // *ACM Comput. Surv.* 2011. Iss. 43. P. 1-56.

233. Wang B., Chua K. C., Srinivasan V., Wang W. Information coverage in randomly deployed wireless sensor networks // *IEEE Trans. Wirel. Comm.* 2007. Vol. 6. Iss. 8. P. 2994–3004.

234. Wang J., Medidi S. Energy efficient coverage with variable sensing radii in wireless sensor networks // In *Proceedings of the IEEE 3rd International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications (WiMob)*. 2007. P. 1–8.

235. Wegner G. Bewegungsstabile Packungen Konstanter Nachbarnzahl // *Studia Sci. Math. Hungar.* 1980. N 5. P. 431–438.
236. Wolfe M. A. On global optimization in R using interval arithmetic // *Optimization Methods and Software.* 1994. №3. P. 61–76.
237. Wu T. T., Ssu K. F. Determining active sensor nodes for complete coverage without location information // *Int. J. Ad Hoc Ubiq. Comput.* 2005. Vol. 1. Iss. 1. P. 38–46.
238. Xing G., Wang X., Zhang Y. Integrated coverage and connectivity configuration for energy conservation in sensor networks // *ACM Trans. Sensor Netw.* 2005. Vol. 1. Iss. 1. P. 36–72.
239. Yan T., Gu Y., He T., Stankovic J. A. Design and optimization of distributed sensing coverage in wireless sensor networks // *ACM Trans. Embed. Comput. Syst.* 2008. Vol. 7. Iss. 3. P. 1–40.
240. Yang J., Wu C., Lee H. P., Liang Y. Solving traveling salesman problems using generalized chromosome genetic algorithm // *Progress in Natural Science.* 2008. Vol. 18. No. 7. P. 887–892.
241. Younis O., Krunz M., Ramasubramanian S. Location-Unaware coverage in wireless sensor networks // *Elsevier Ad Hoc Netw.* 2008. Vol. 6. Iss. 7. P. 1078–1097.
242. Zahn C. T. Black box maximization of circular coverage // *J. Res. Nat. Bur. Standards.* 1962. Sect. B. V. 66. P. 181–216.
243. Zhan G. H., Hou J. C. On the upper bound of  $\alpha$ -lifetime for large sensor networks // *ACM Trans. Sensor Netw.* 2005. Vol. 1. Iss. 2. P. 272–300.
244. Zhang H., Hou J. On deriving the upper bound of  $\alpha$ -lifetime for large sensor networks // *In Proceedings of the ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MobiHoc).* 2004. P. 121–132.
245. Zhenyu H. An interval entropy penalty method for nonlinear global optimization // *Reliable Computing.* 1998. №1. P. 31–50.
246. Zhou Z., Das S. R., Gupta H. Variable radii connected sensor cover in sensor networks // *ACM Trans. Sensor Netw.* 2009. Vol. 5. Iss. 1. P. 1–36.
247. Zou Y., Chakrabarty K. Sensor deployment and target localization in

distributed sensor networks // ACM Trans. Embed. Comput. Syst. 2004. Vol. 3. Iss. 1. P. 61–91.

248. Zou Y., Chakrabarty K. A distributed coverage- and connectivity-centric technique for selecting active nodes in wireless sensor networks // IEEE Trans. Comput. 2005. Vol. 54. Iss. 8. P. 978–991.

249. Zyuzin V. S. On a way of representation of the interval numbers // Proc. IMACS-GAMM International Symp. on Sci. Computing, Computer Arithm. and Valid. Num. Budapest (Hungary). 1998. P. 173–174.

## ДОДАТОК А

ІЛЮСТРАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ БУДОВИ ШЛЕЙФІВ ПОЖЕЖНОЇ  
СИГНАЛІЗАЦІЇ З ОПТИМІЗОВАНИМ КІЛЬКІСНИМ СКЛАДОМ ТА  
ДОВЖИНОЮ ДЛЯ СКЛАДНИХ ЗА ФОРМОЮ ПРИМІЩЕНЬ З  
ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ «ВЕСТА»

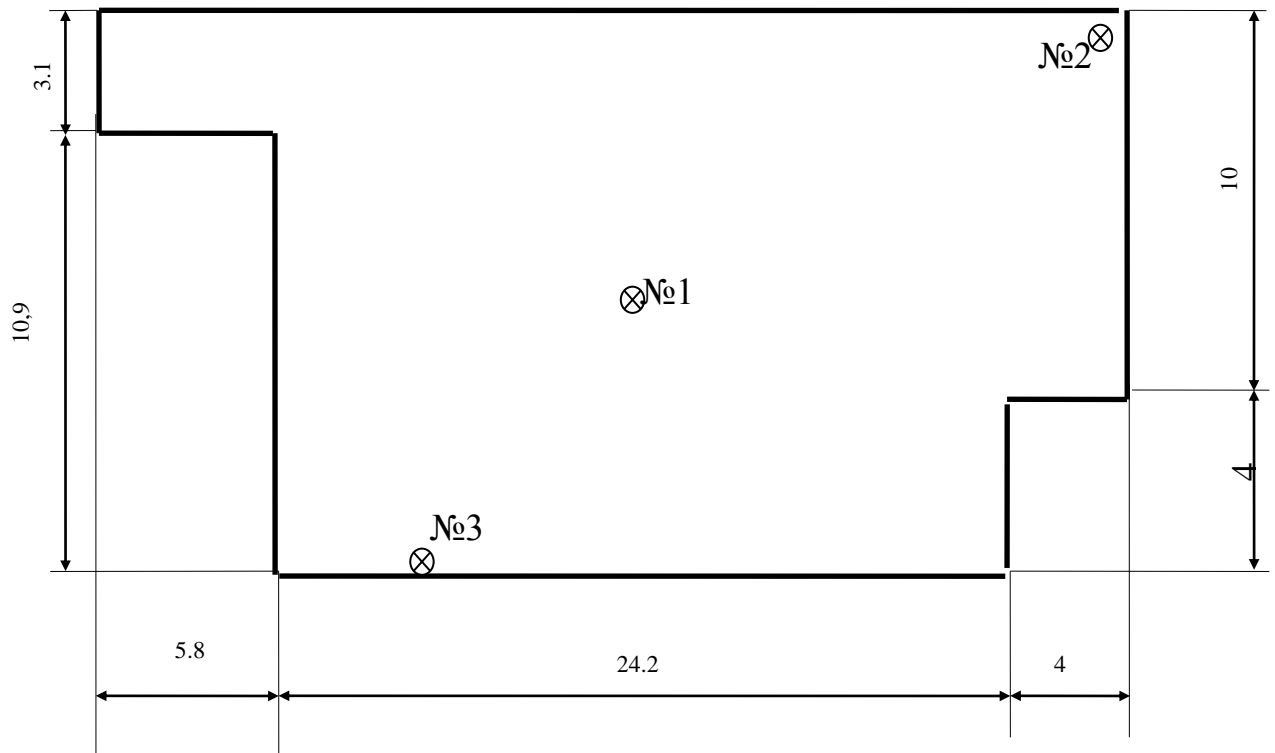


Рисунок А.1 – План приміщення для проведення експерименту з вказаними місцями розташування осередків пожежі, що імітується

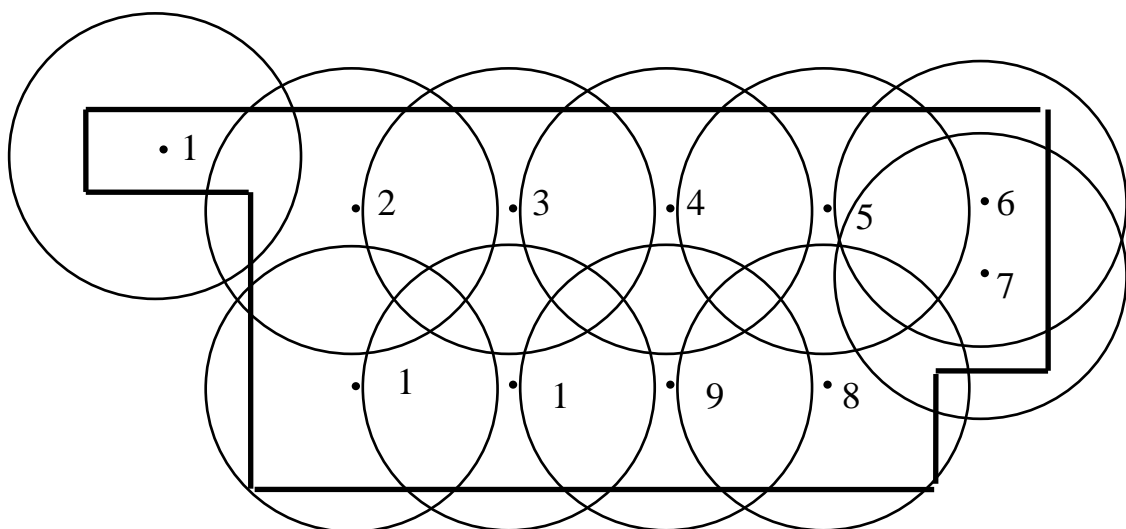


Рисунок А.2 – Схема розміщення ПС згідно нормативних документів



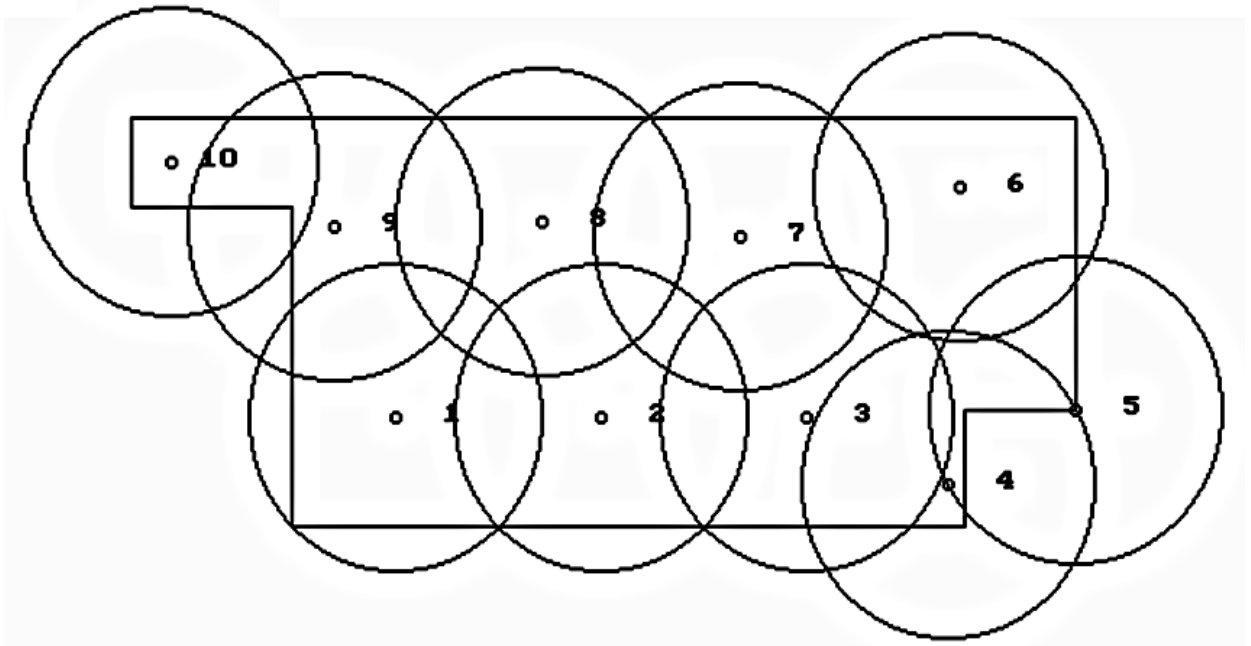


Рисунок А.3 – Схема розміщення ПС, яка отримана методом, що пропонується

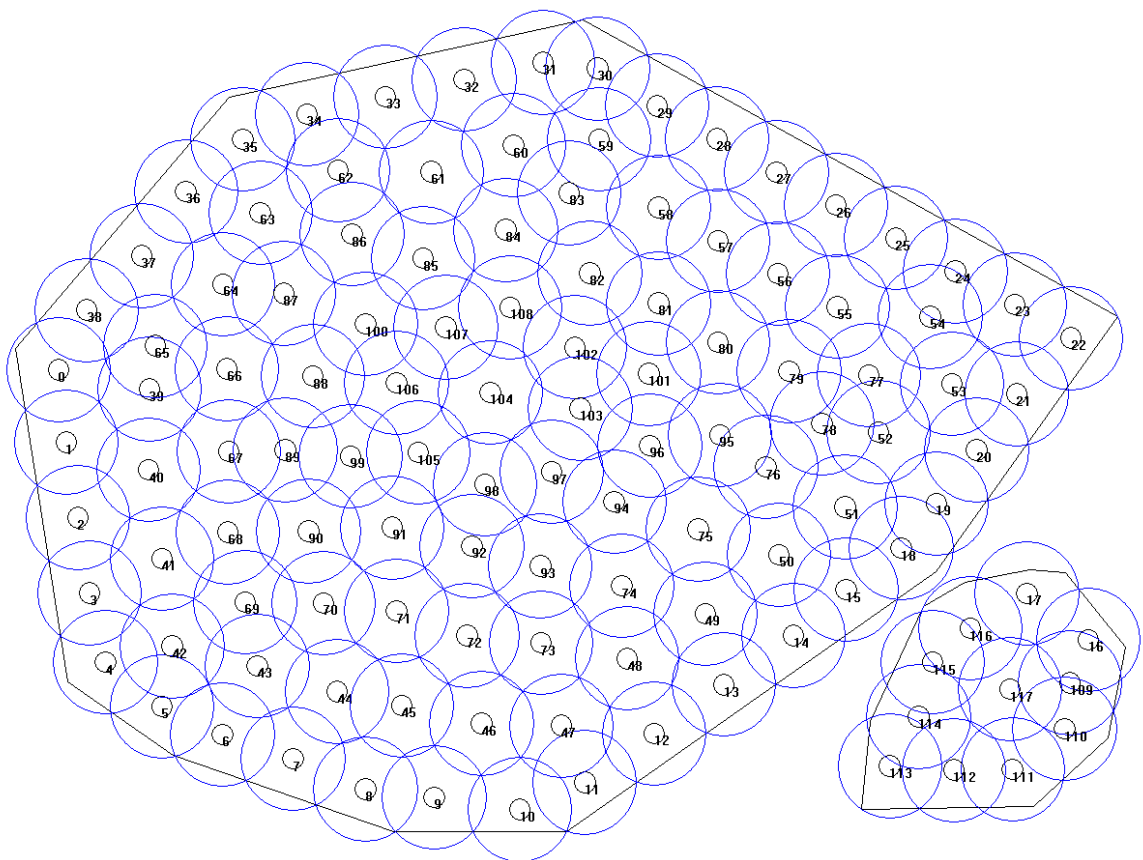


Рисунок А.4 – Покриття області складної форми

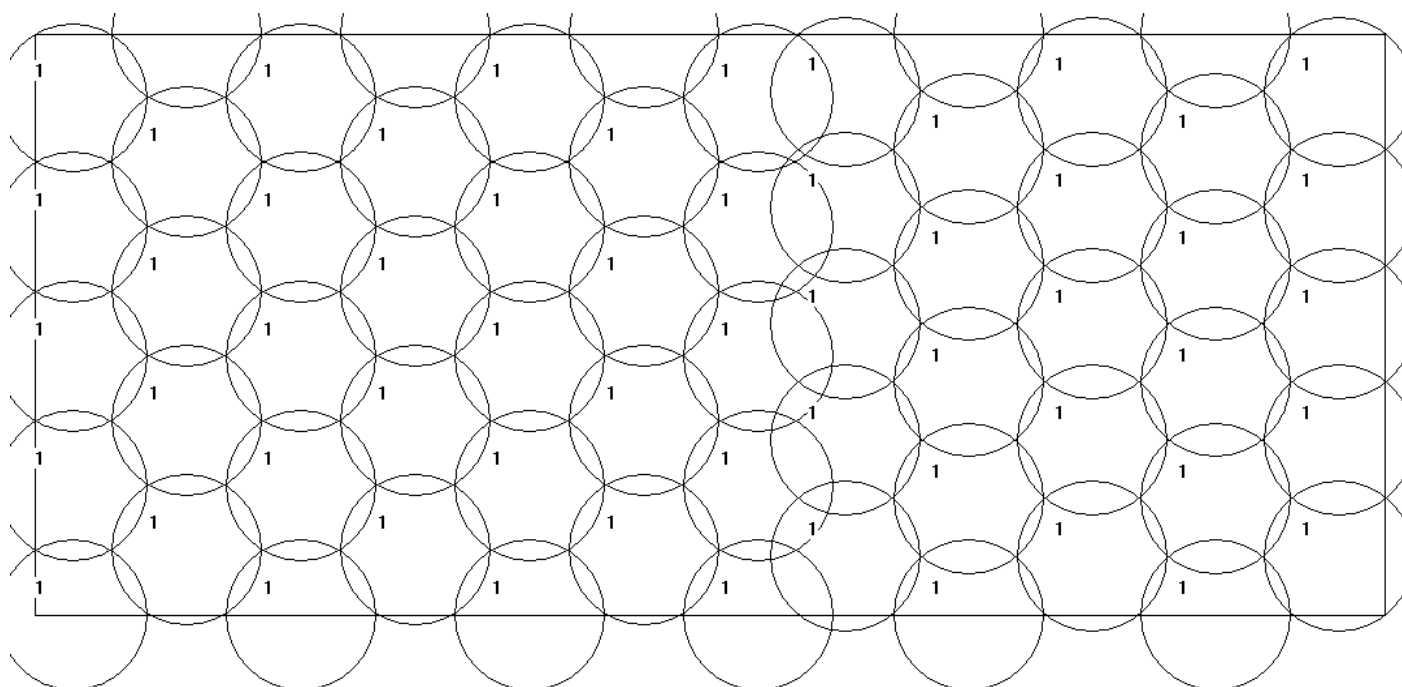


Рисунок А.5 – Результат розв'язання тестової задачі секційно-регулярного покриття області з розмірами 70000 на 30000 за допомогою 62 кіл однакового радіуса 3900

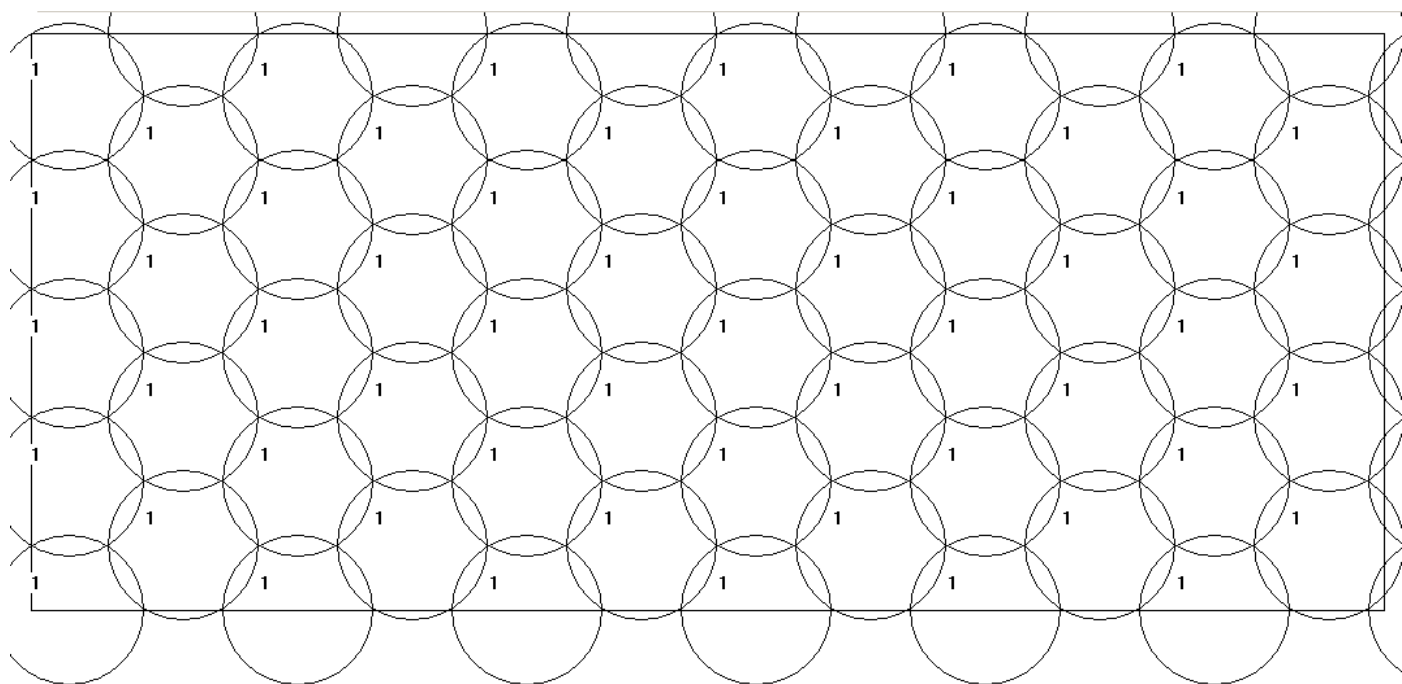


Рисунок А.6 – Результат розв'язання тестової задачі регулярного покриття області з розмірами 70000 на 30000 за допомогою 65 кіл однакового радіуса 3900

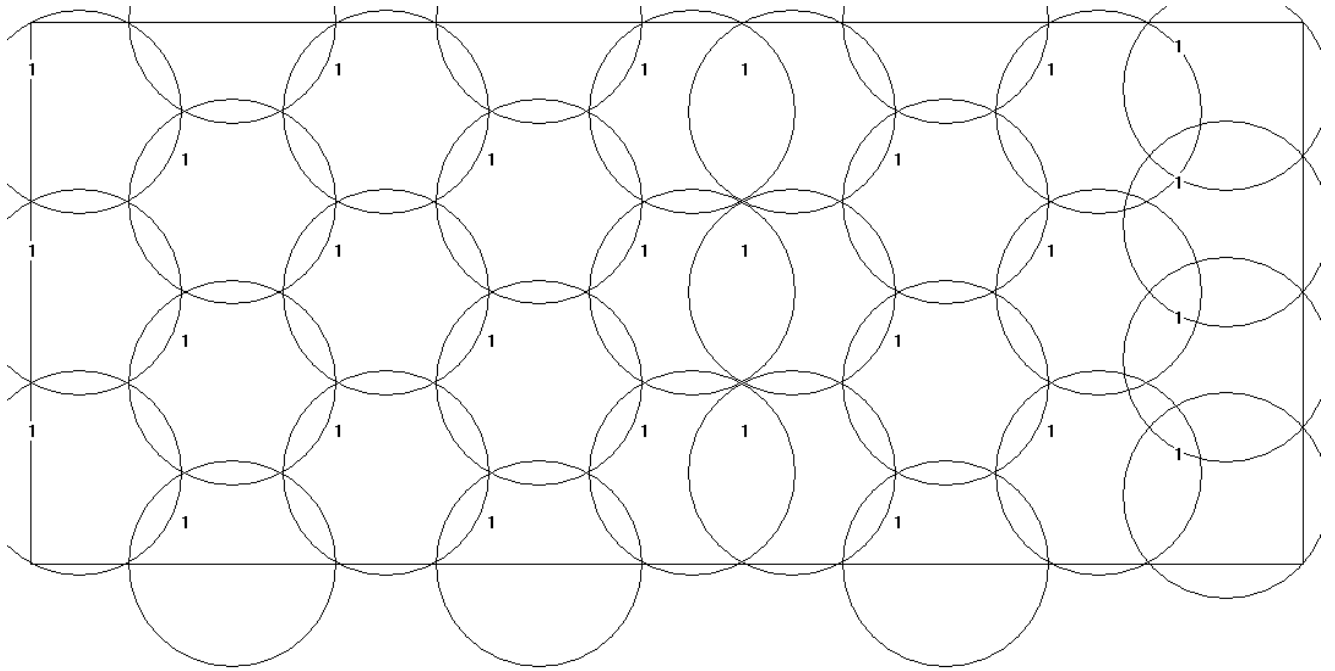


Рисунок А.7 – Результати розв'язання тестової задачі секційно-регулярного покриття області з розмірами 70000 на 30000 за допомогою кіл рівного радіуса 5700

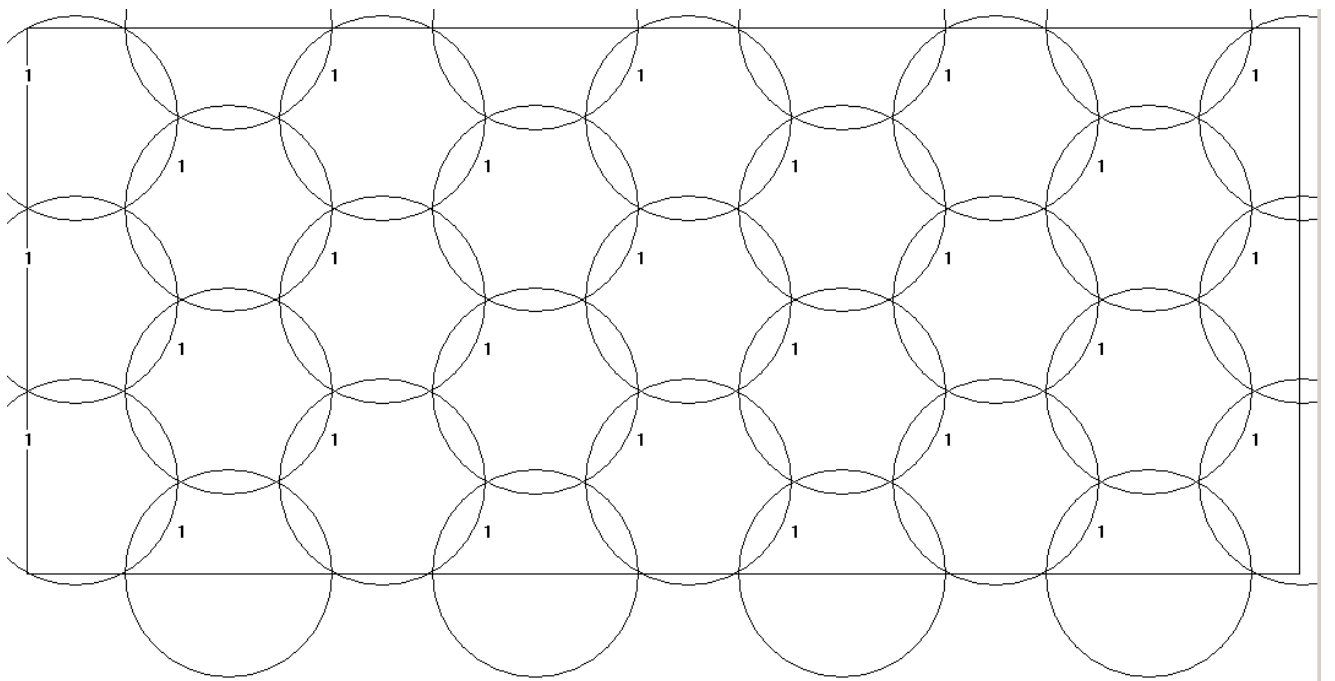


Рисунок А.8 – Результати розв'язання тестової задачі регулярного покриття області з розмірами 70000 на 30000 за допомогою кіл рівного радіуса 5700

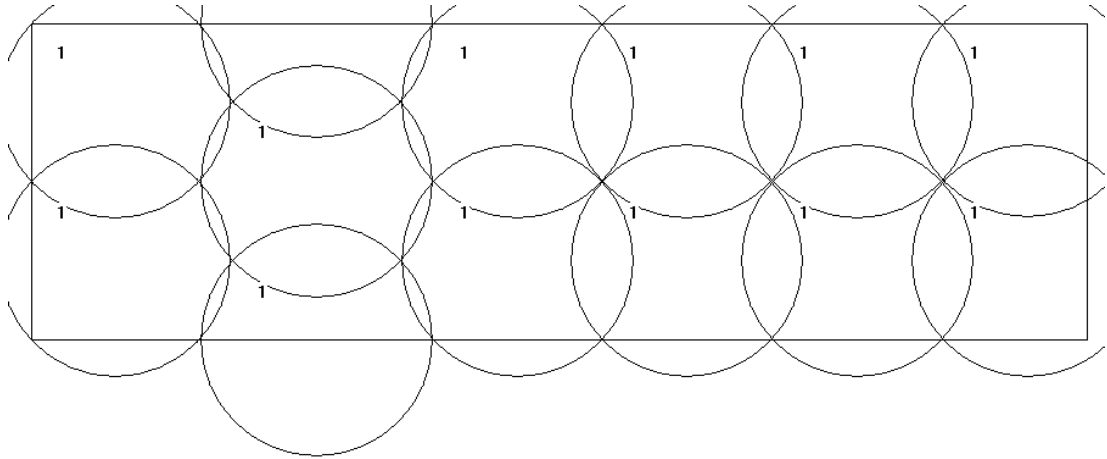


Рис. А.9 – Результат розв'язання задачі секційно-регулярного покриття області з розмірами 100x30 колами радіуса 11

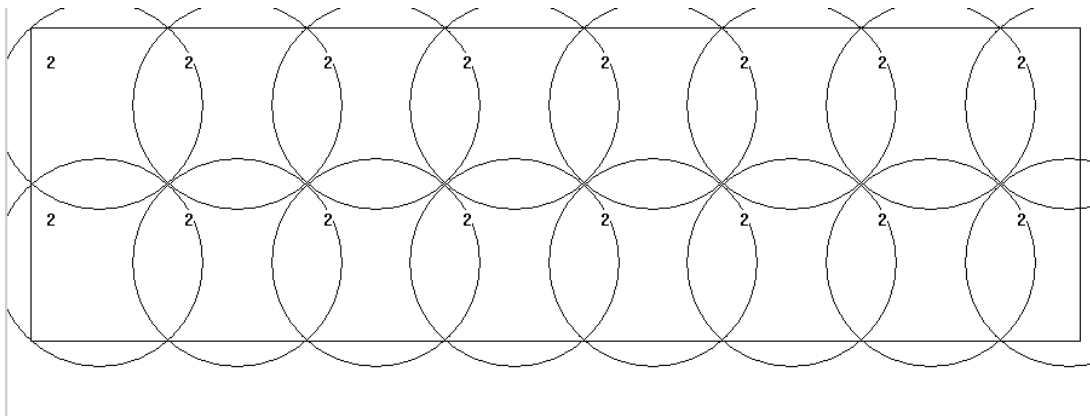


Рисунок А.10 – Результат розв'язання задачі секційно-регулярного покриття області з розмірами 100x30 колами радіуса 10

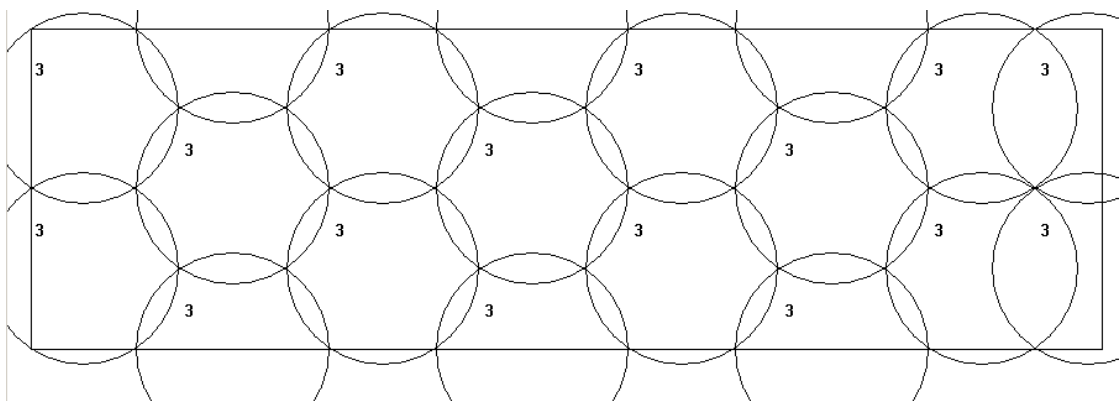


Рисунок В.11 – Результат розв'язання задачі секційно-регулярного покриття області з розмірами 100x30 колами радіуса 9

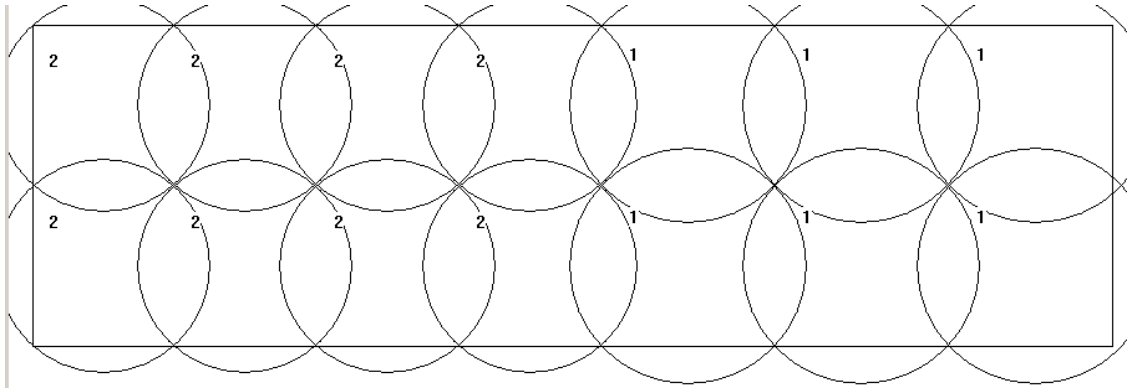


Рисунок А.12 – Результат розв'язання задачі секційно-регулярного покриття області з розмірами 100x30 колами радіуса 11 і 10

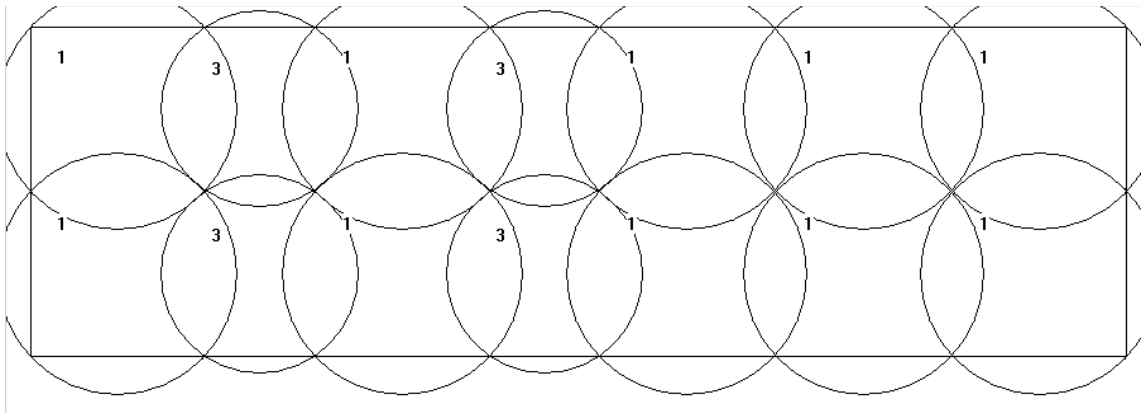


Рисунок А.13 – Результат розв'язання задачі секційно-регулярного покриття області з розмірами 100x30 колами радіуса 11 і 9

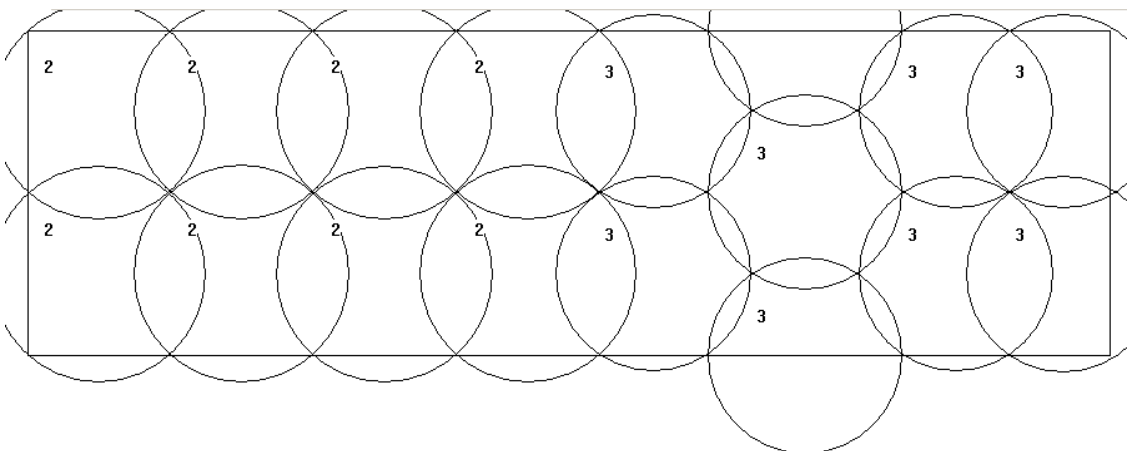


Рисунок А.14 – Результат розв'язання задачі секційно-регулярного покриття області з розмірами 100x30 колами радіуса 9 і 10

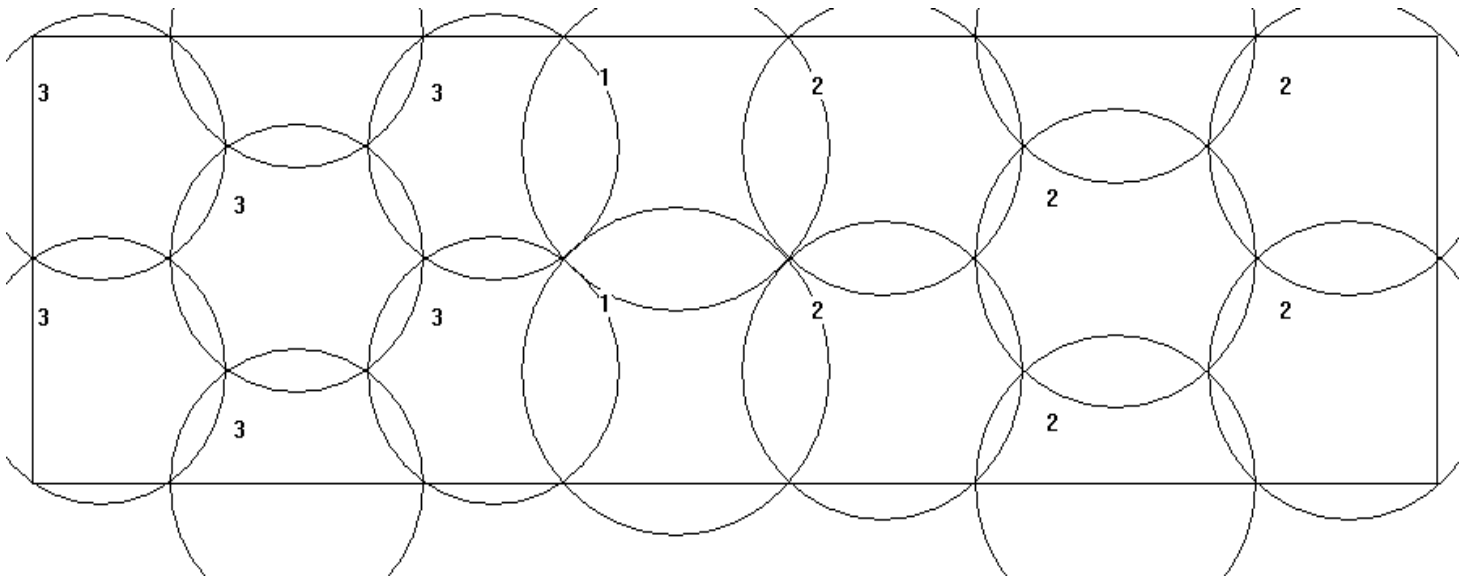


Рисунок А.15 – Результат розв'язання задачі секційно-регулярного покриття області з розмірами 100х30 колами радіуса 9, 10 і 11

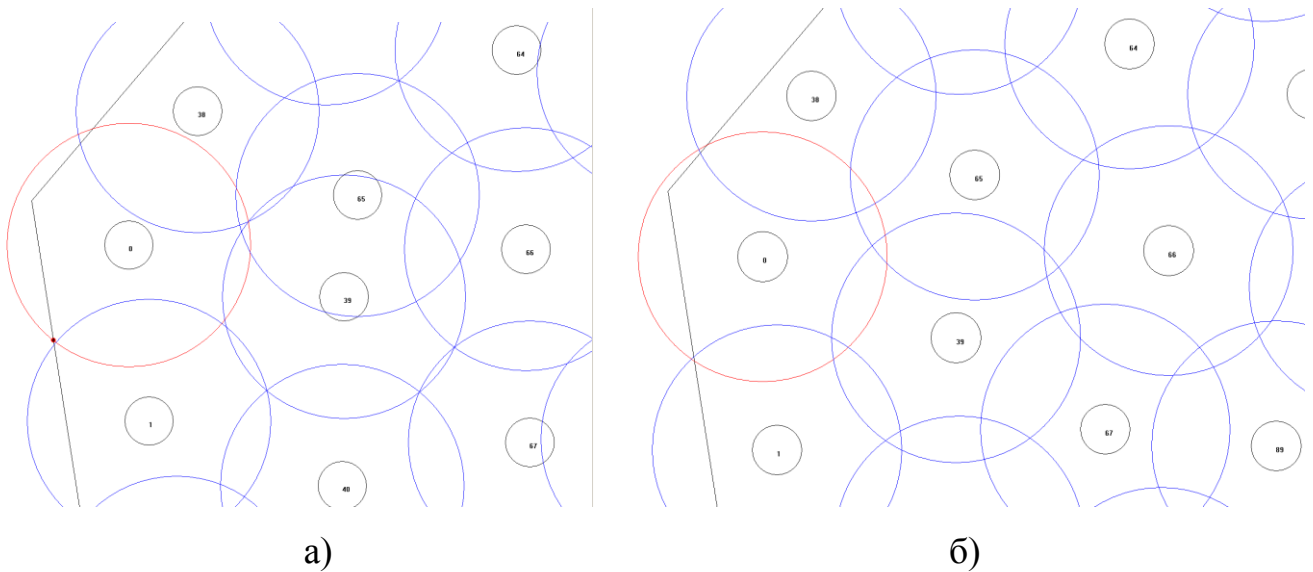


Рисунок А.16 – Фрагмент покриття області довільної форми: а) – неповного (непокрита частина в околицях червоної крапки на межі); б) – автоматично скорегованого



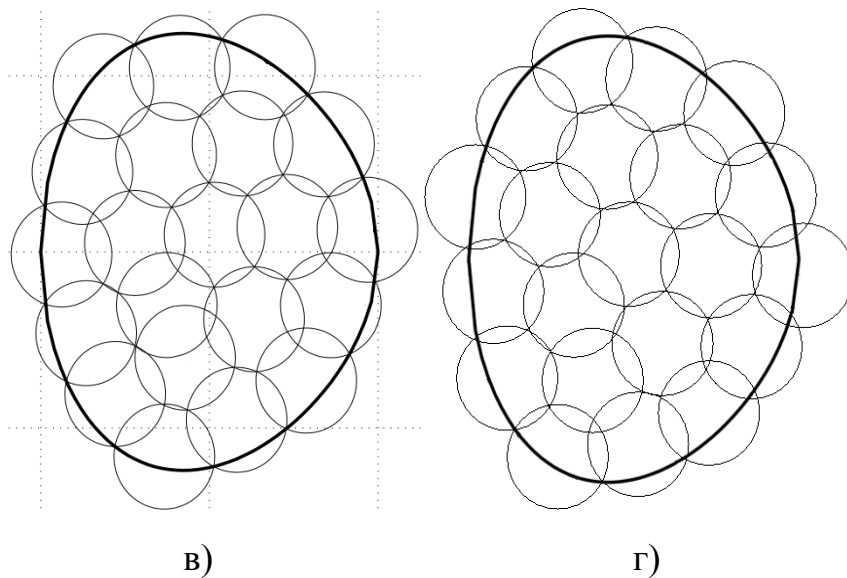


Рисунок А.18 – Порівняння результатів для: а) – 18 кіл з [72]; б) – 18 кіл, отриманих в даній роботі; в) – 21 коло з [72]; г) – 21 коло, що отримані в даній роботі

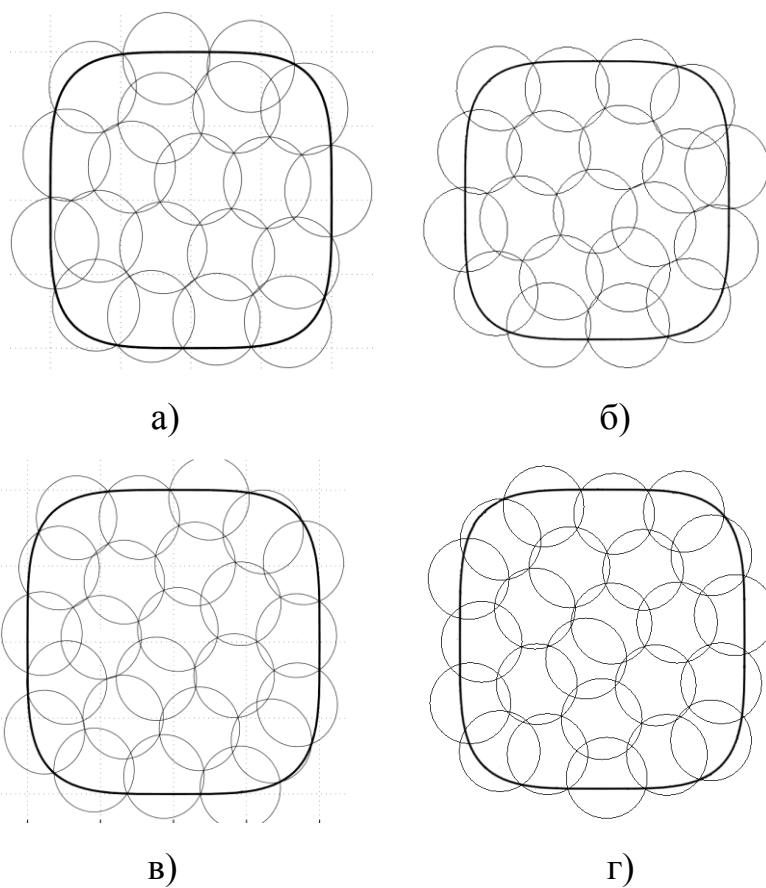
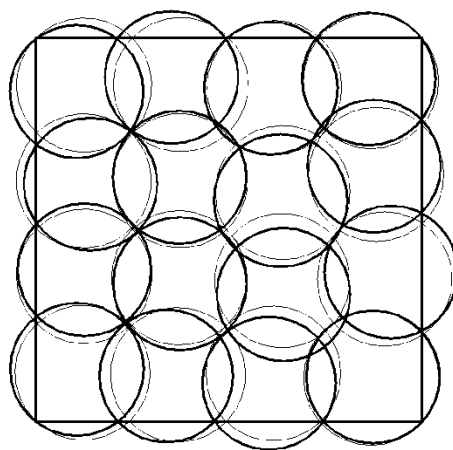
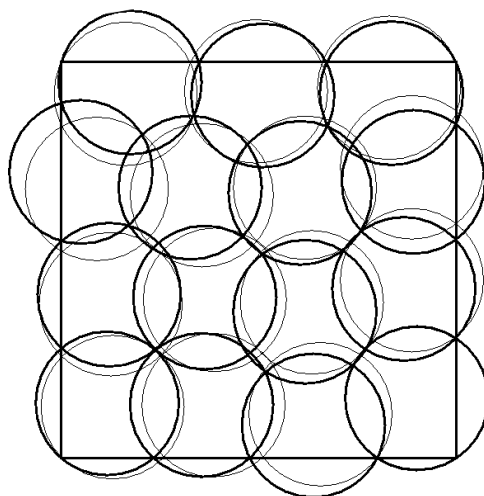


Рисунок А.19 – Порівняння результатів для: а) – 21 коло з [72]; б) 21 – кіло, що отримано в даній роботі; в) – 24 кола з [72]; г) – 24 кола, що отримані в даній роботі

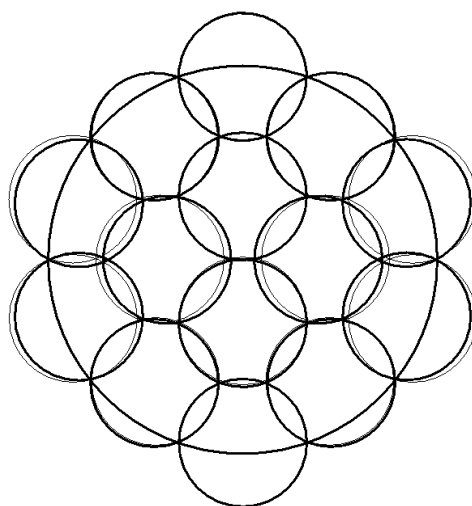




a)



б)



в)

Рисунок А.20 – Порівняння результатів мінімізації радіусу кіл що покривають (показані жирною лінією), які отримані в даному дослідженні з результатами з роботи [73]

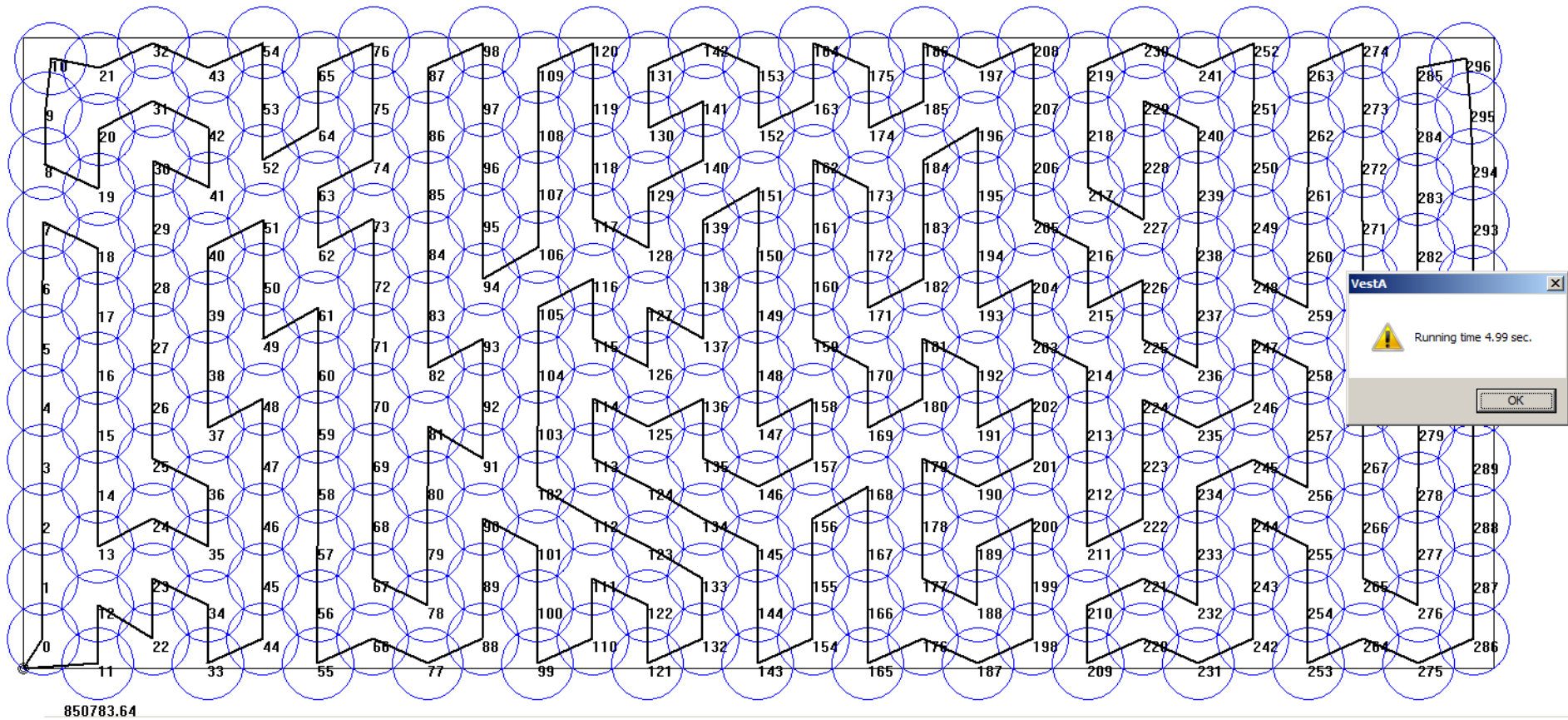
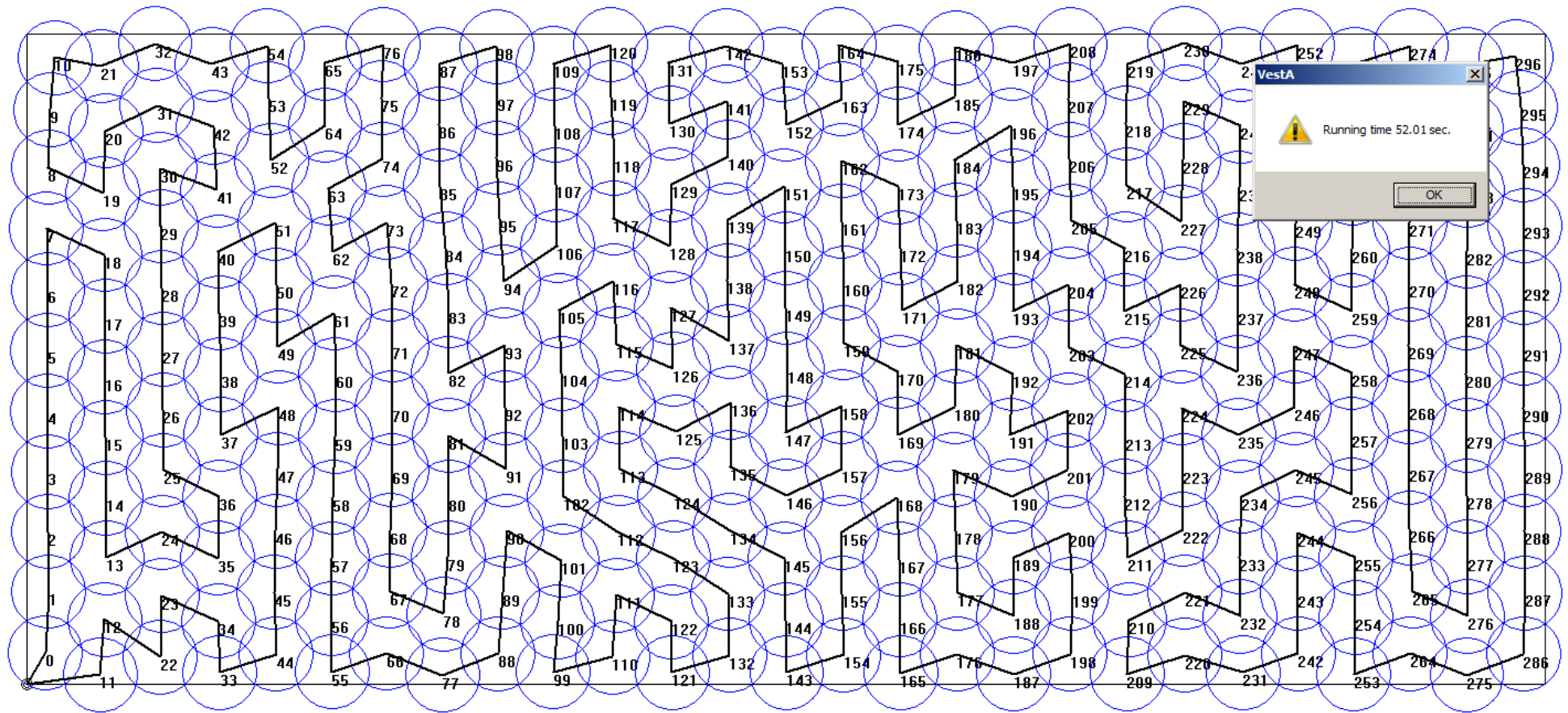
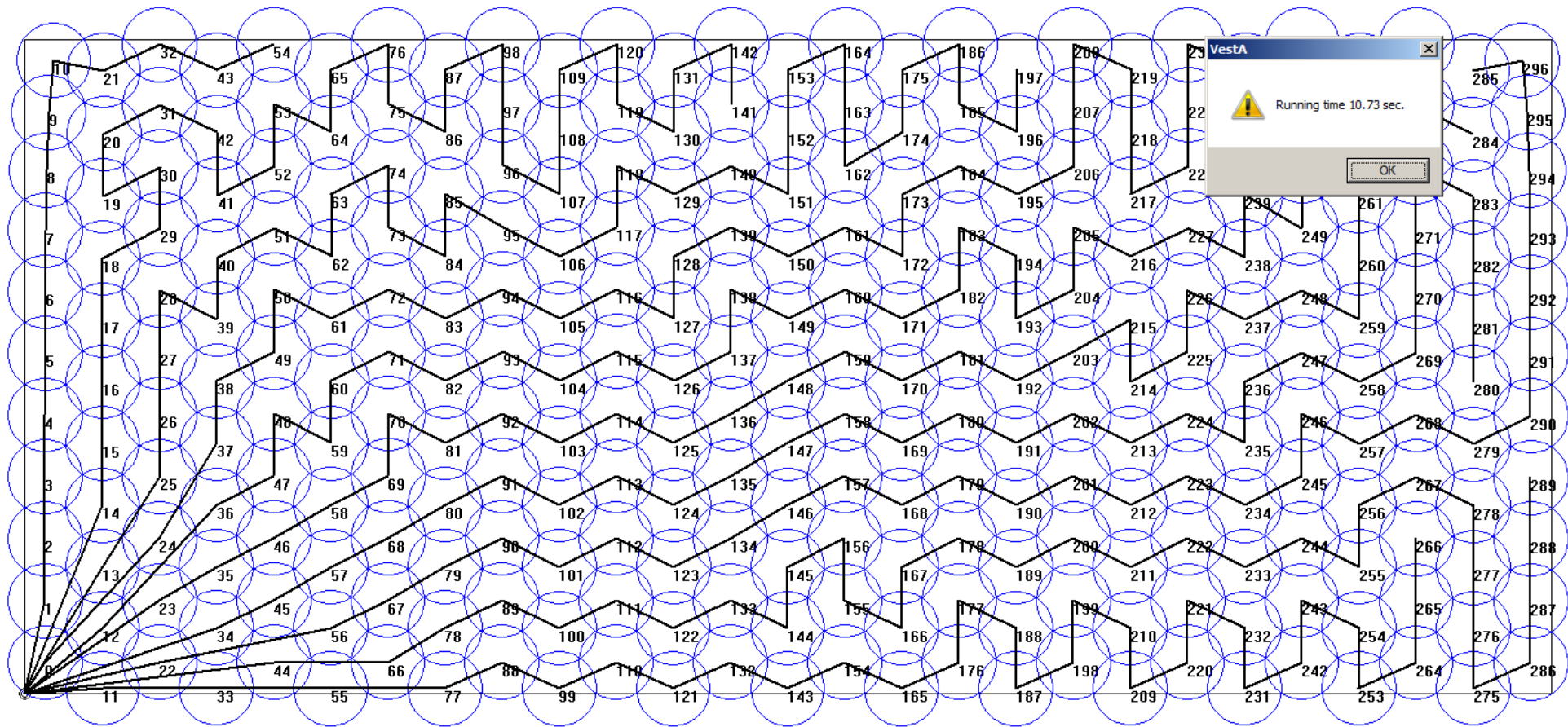


Рисунок А.21 – Покриття 297 колами радіусу 4500 області з розмірами 70000 на 30000 – до оптимізації довжини траси кільцевого типу



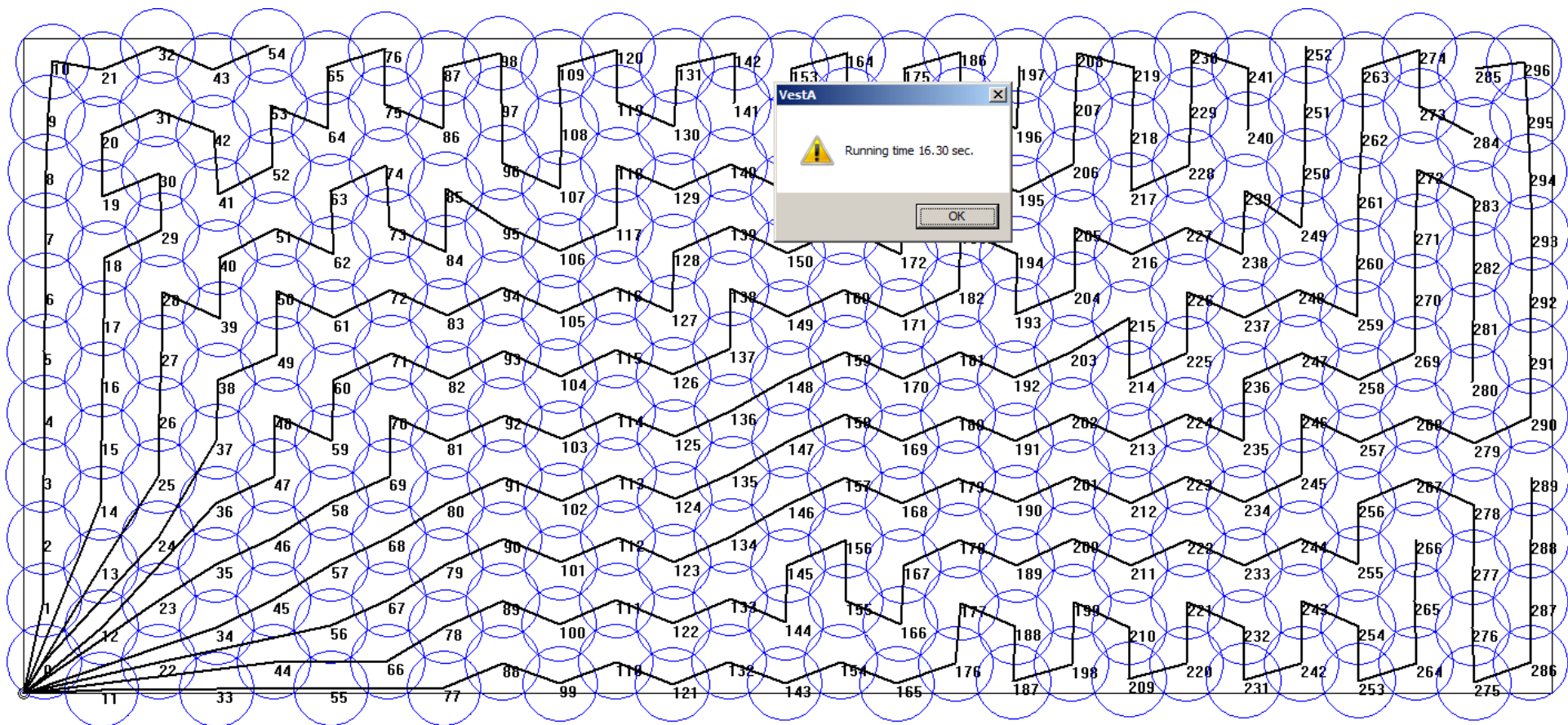
833392.45

Рисунок А.22 – Покриття 297 колами радіусу 4500 області з розмірами 70000 на 30000 – після оптимізації довжини траси кільцевого типу



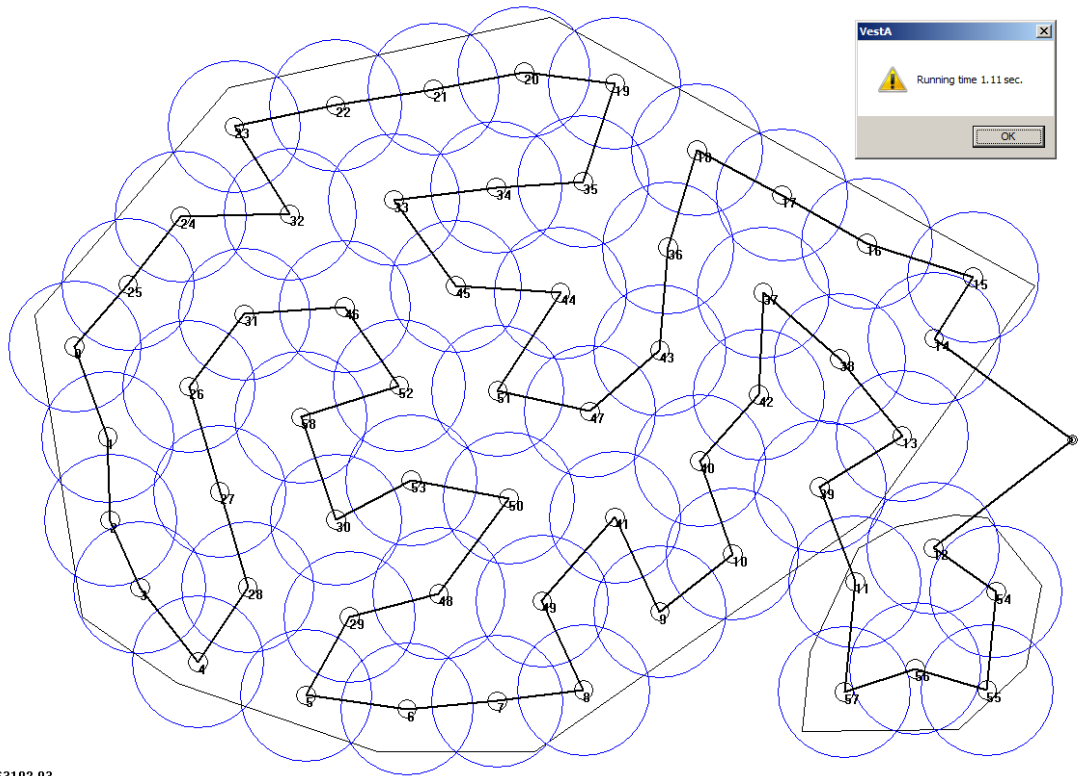
920613.71

Рисунок А.23 – Покриття 297 колами радіуса 4500 області з розмірами 70000 на 30000 до оптимізації довжини системи трас радіального типу



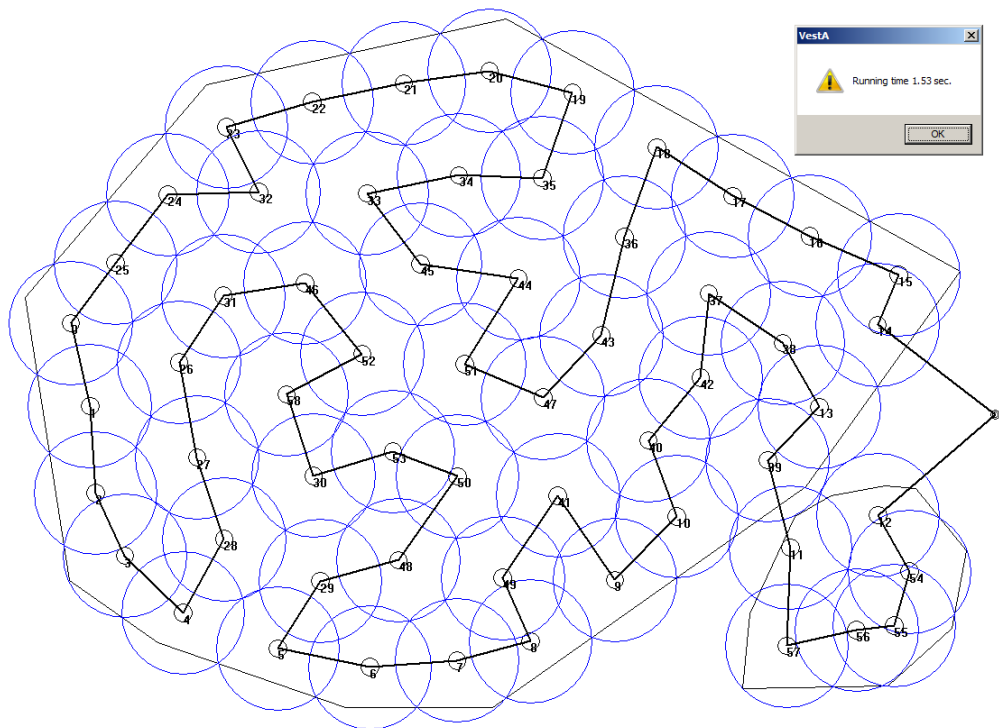
900741.16

Рисунок А.24 – Покриття 297 колами радіуса 4500 області з розмірами 70000 на 30000 після оптимізації довжини системи трас радіального типу



63192.93

а)

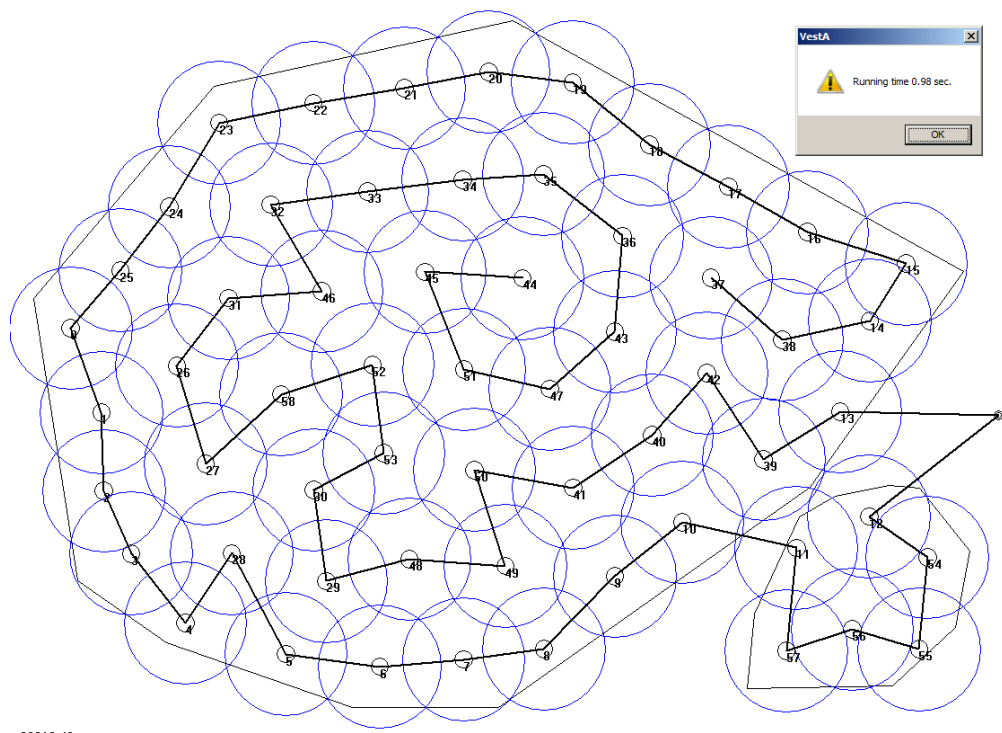


58850.38

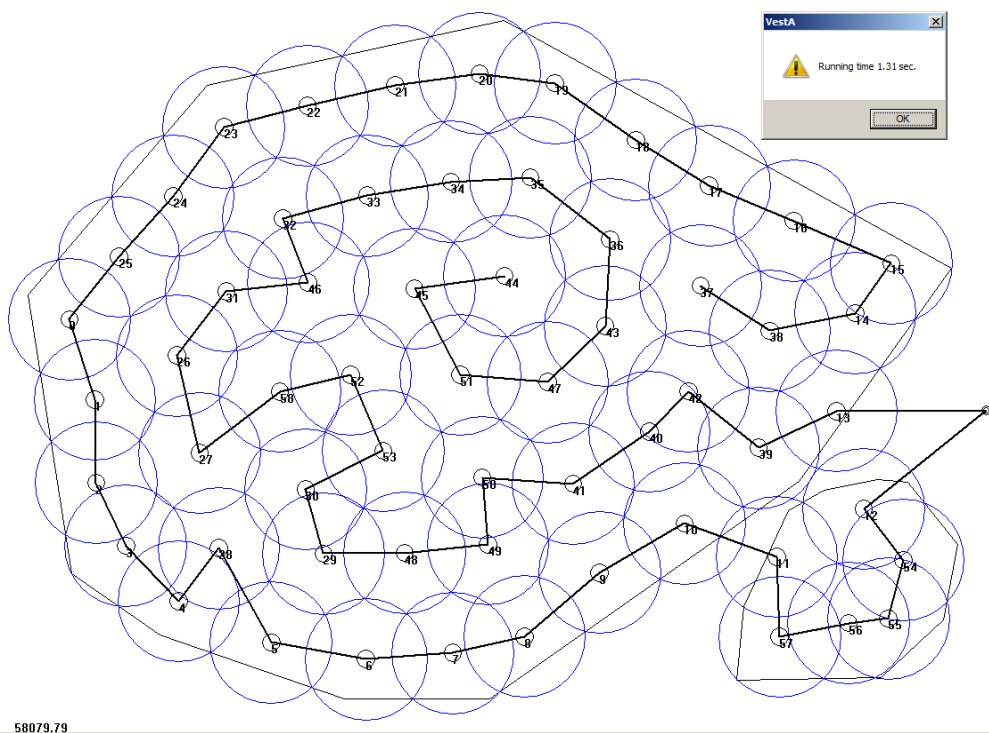
б)

Рисунок А.25 – Покриття області складної форми а) – до оптимізації довжини траси кільцевого типу; б) – після оптимізації довжини траси кільцевого типу





а)



б)

Рисунок А.26 – Покриття області складної форми а) – до оптимізації довжини системи трас радіального типу; б) – після оптимізації довжини системи трас радіального типу

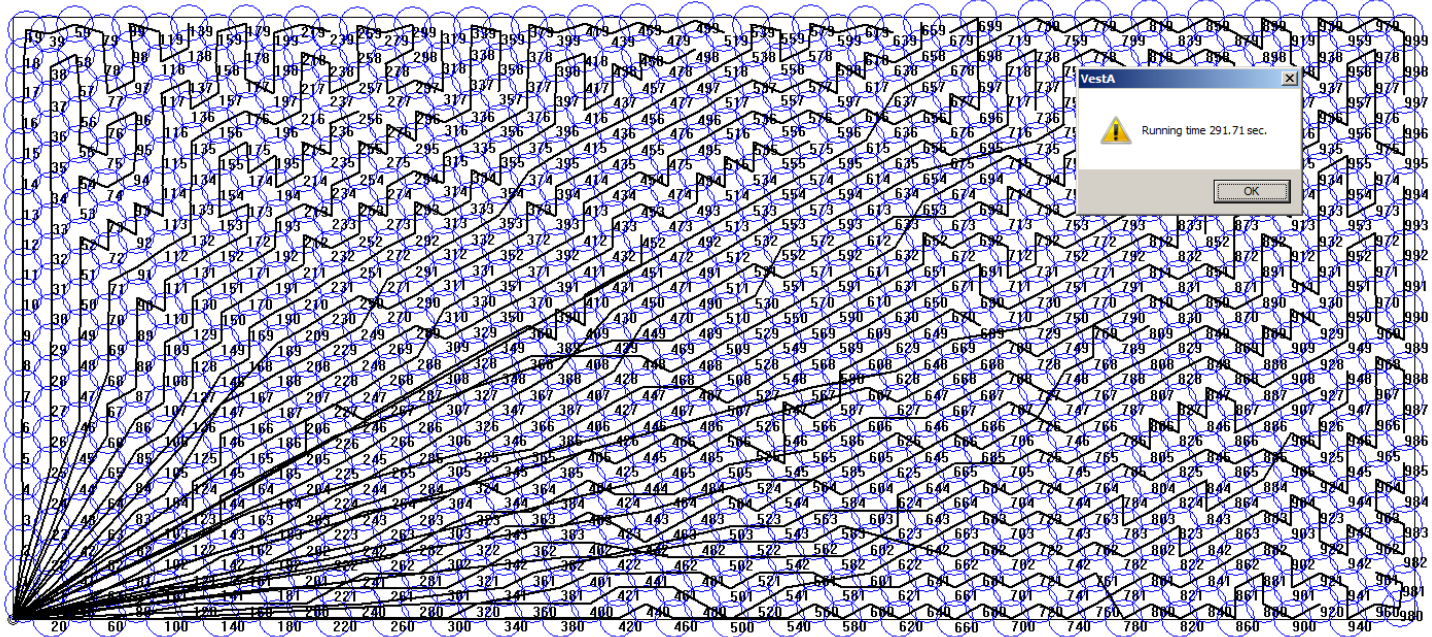


Рисунок А.27 – Система трас радіального типу для задачі покриття