УДК 389.14+658.16(075.8)

С.О. ВАМБОЛЬ, д-р техн. наук, проф., НУЦЗУ, Харків;
І.В. МІЩЕНКО, канд. техн. наук, доц., НУЦЗУ, Харків;
О.М. КОНДРАТЕНКО, канд. техн. наук, ст. викл., НУЦЗУ, Харків;
О.А. БУРМЕНКО, магістрант, НУЦЗУ, Харків

АПРОКСИМАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ БЕТА-РОЗПОДІЛУ. ЧАСТИНА 1

Досліджено особливості бета-розподілу та обґрунтування його застосування для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу взагалі та практичне використання такого розподілу для випадку геометричних характеристик тіл кочення підшипників. Проаналізовано спеціалізовану науково-технічну і довідникову літературу, методи математичної статистики, теорії ймовірностей, чисельні. У даній частині дослідження застосовано типові закони розподілу до об'єкту дослідження та показано, що використання для апроксимації нормального та інших типових розподілів не завжди є прийнятним для знаходження справжнього або близького до нього закону. Вперше показано переваги застосування бета-розподілу для апроксимації емпіричного закону розподілу будь-яких даних вимірювань на прикладі геометричних характеристик тіл кочення підшипників. Отримана методологія і математичний апарат придатні для застосування бета-розподілу придатні для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису.

Ключові слова: похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

Вступ. Аналіз і оцінювання *похибок вимірювання* є одним з розділів *метрології*. Розглядаючи результати вимірювання, необхідно відмітити виникнення похибок, які характеризують недосконалість вимірювання. Закономірність прояву *випадкових похибок*, як додатних, так і від'ємних, піддається урахуванню при достатньо великій кількості вимірювань. За деяких умов (умовна однакова кількість *різнознакових похибок*, обмеження на *абсолютну величину похибок*, компенсація випадкових похибок при їхньому додаванні) *розподіл випадкових похибок* підкоряється *нормальному розподілу*. На практиці для перевірки нормальності застосовують візуальні методи, (наприклад, *гістограми*, *нормальні імовірнісні графіки* або *числові методи*) за допомогою оцінки *коефіцієнтів асиметрії* та *ексцесу*. Але при невідповідності *емпіричного розподілу*, який зазвичай представлений у вигляді гістограми, нормальному стає питання пошуку або підбору такого розподілу, який за певними критеріями точніше описує *емпіричний розподіл*. Серед десятків існуючих *типових розподілів*, які можна вважати кандидатами для подальшої оцінки параметрів, можна здійснити вибір потрібного закону розподілу через аналіз гістограми та *моментних оцінок*. Відповідно до обраного *закону розподілу* здійснюється перевірка *гіпотези* про відповідність емпіричного розподілу до теоретичного, що при невідкиданні гіпотези приводить до розв'язання *задачі апроксимації*. В протилежність до цього пошук має бути продовжено без гарантії знаходження *справжнього* або принаймні *близького* до нього закону. В той же час існує підхід до побудови *універсальних сімейств розподілів*, зокрема, апроксимація на основі *сімейства розподілів Пірсона*, який (підхід) вважається таким, що охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до нормального. Останнє говорить про певну варіативність і гнучкість при вирішенні задачі апроксимації, що за умов підтвердження та обґрунтування можливості використання *бета-розподілу* дозволяє при проведенні досліджень користатися запропонованим в роботі *математичним апаратом* щодо визначення параметрів вказаного розподілу.

Аналіз літературних джерел. При проведенні дослідження проаналізовано 34 наукових джерела інформації, з яких: 6 підручників і навчальних посібників, 10 наукових монографій, 12 спеціалізованих видань, 6 довідників [1 – 34]. Оскільки сутність проведеного дослідження полягає у порівнянні добре відомих і широко застосованих законів розподілу з відомим, проте мало застосованим і, як виявилось, не дослідженим всебічно законом, то результати аналізу літератури за окремими аспектами поставленої проблеми, що є задачами дослідження, буде наведено у відповідних розділах статті.

Мета та задачі дослідження. *Метою дослідження* є дослідження особливостей бета-розподілу та обґрунтування його застосування для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу взагалі та практичне використання такого розподілу для випадку геометричних характеристик тіл кочення підшипників.

Об'єкт дослідження – особливості застосування бета-розподілу для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу.

Предмет дослідження – закон розподілу емпіричних даних щодо геометричних характеристик тіл кочення підшипників.

У *дослідженні* вирішуються дві задачі.

Задача 1. побудова емпіричного закону розподілу ймовірностей, що включає у себе:

1.1. визначення основних закономірностей процесу генерування випадкових чисел, як невід'ємної складової об'єкту дослідження;

1.2. визначення характеристик інтервалу зміни досліджуваної величини, тобто меж і розмаху інтервалу, кількості інтервалів розбиття;

1.3. визначення вибіркових оцінок математичного очікування, середньоквадратичного очікування, початкових та центральних моментів необхідного порядку, коефіцієнтів асиметрії та ексцесу;

1.4. визначення дійсних (теоретичних) розподілів діаметрів шариків підшипника та полярного моменту опору їх головного перерізу.

Задача 2. Використання бета розподілу при апроксимації емпіричних даних, що включає у себе:

2.1. описання системи кривих Пірсона;

2.2. визначення параметрів бета-розподілу для об'єкту дослідження.

У даній частині дослідження наведено дані щодо повного вирішення задачі 1.

Генерування випадкових чисел. Для проведення досліджень, пов'язаних з апроксимацією емпіричних даних, необхідно отримати випадкові числа з заданим законом розподілу. В термінах математичної статистики останні є *випадковою вибіркою з генеральної сукупності*, розподіленої за цим законом.

Механізм генерування випадкових чисел, який використовується в роботі, описано в [1, 6]. За допомогою датчика випадкових чисел RANDOM генерується реалізація випадкової величини r_i ($i = 1 ... N$), розподіленої рівномірно в інтервалі $[0,1]$, і має назву *стандартної рівномірної послідовності*.

Для нормального розподілу з нульовим математичним очікуванням ($m_u = 0,0$) і одиничною дисперсією ($\sigma_u = 1,0$) на основі двох послідовно узятих чисел (r_1, r_2), (r_3, r_4), …, (r_{N-1}, r_N) (для N значень мається $N/2$ пар чисел) одержуємо відповідно два числа (u_1, u_2), (u_3, u_4), …, (u_{N-1}, u_N) нормально розподіленої випадкової величини r

$$u_i = \sqrt{-2\ln r_i}\cos(2\pi r_{i+1}),\ u_{i+1} = \sqrt{-2\ln r_i}\sin(2\pi r_{i+1}),\ i = 1, 3, ..., N-1. \quad (1)$$

При одержанні реалізації нормальної випадкової величини з ненульовим математичним очікуванням m_d і стандартним відхиленням σ_d, відмінним від одиниці, використовується наступне співвідношення [6, 9], за яким відбувається лінійне перетворення випадкової величини

$$x_i = m_d + u_i \cdot \sigma_d,\ \ i = 1 \dots N. \quad (2)$$

Для визначеності необхідно задати обсяг вибірки N, який в будь-якому випадку буде обмеженим кількістю спостережень або дослідів. В роботі було згенеровано 3000 значень r_i ($i = 1 \dots N$), які в усіх розрахунках залишалися незмінними. За необхідності вибиралися перші 500 значень, перші 1000 значень, і остаточно повна вибірка. Значення $m_d = 1{,}59$ мм було обрано як діаметр радіального однорядного підшипника 23 [32], для розрахунків величина середньоквадратичного відхилення діаметру приймалась $\sigma_d = 0{,}01 \cdot m_d = 0{,}00159$ мм, $\sigma_d = 0{,}04 \cdot m_d = 0{,}0636$ мм, $\sigma_d = 0{,}06 \cdot m_d = 0{,}0954$ мм, $\sigma_d = 0{,}07 \cdot m_d = 0{,}1113$ мм. У якості досліджуваного параметру розглядався полярний момент опору головного перерізу шарика $J_{\text{Р}}$. Основним міркуванням при виборі вказаної характеристики є нелінійність перетворення при зведенні діаметра у 4-ий ступінь, що при нормальному розподілі діаметрів безперечно порушує нормальність розподілу параметра $J_{\text{Р}}$ і призводить до асиметрії розподілу. Також можна розглядати площу головного перерізу (зведення діаметру у другий ступінь), полярний або осьовий моменти опору головного перерізу, об'єм шарика (зведення діаметру у третій ступінь), осьові моменти інерції головного перерізу (зведення діаметру у четвертий ступінь).

Визначення кількості інтервалів розбиття. Під час аналізу випадкової величини $J_{\text{Р}}$ необхідно призначити границі інтервалу, на якому досліджувана величина приймає ненульові значення. Визначити мінімальне – $J_{\text{Р}\min}$, максимальне – $J_{\text{Р}\max}$ значення, розмах $\Delta J_{\text{Р}} = J_{\text{Р}\max} - J_{\text{Р}\min}$. Для нормального розподілу майже всі значення (99,7 %) випадкової величини знаходяться в інтервалі ($\tilde{m}_1 - 3\tilde{S}, \tilde{m}_1 + 3\tilde{S}$) за умов визначення вибіркової оцінки середнього (*математичного очікування*) і *середньоквадратичного відхилення* $\tilde{S}$. Але є певні рекомендації щодо побудови гістограми [23], згідно з якими:

- для вибірки ($6 < N \le 100$) інтервал ($\tilde{m}_1 - 4\tilde{S}, \tilde{m}_1 + 4\tilde{S}$);
- для вибірки ($100 < N \le 1000$) інтервал ($\tilde{m}_1 - 4{,}5\tilde{S}, \tilde{m}_1 + 4{,}5\tilde{S}$);
- для вибірки ($1000 < N \le 10000$) інтервал ($\tilde{m}_1 - 5\tilde{S}, \tilde{m}_1 + 5\tilde{S}$).

Через неоднозначність вибору $\Delta J_{\text{Р}}$ та можливість в подальшому отримати порожні стовпчики у побудові гістограми для несиметричного розподілу обираємо $\Delta J_{\text{P}} = J_{\text{P}\max} - J_{\text{P}\min}$.

Для визначення форми розподілу, для використання критеріїв згоди тощо, для зіставлення гіпотез про форму розподілу вибірка має бути представленою у вигляді гістограми, що складається з n_{COL} стовпчиків певної довжини $\Delta J_{\text{P}COL}$. Гістограми дозволяють побачити, як розподілені значення змінних за інтервалами групування, тобто як часто змінні приймають значення з різних інтервалів. Загальноприйнятним є використання інтервалів однакової довжини. В літературі зі статистичної обробки експериментальних даних приведено конкретні рекомендації стосовно вибору кількості n_{COL} інтервалів групування, які істотно відрізняються між собою. При достатньо малому n_{COL} гістограма буде відрізнятися від дійсної кривої через досить крупну східчастість, що приведе до втрати характерних особливостей розподілу. При великій кількості стовпчиків групування навпаки гістограма може мати чергування вершин і западин, що не відповідає дійсності. Як рекомендовані використовуються наступні формули:

- *формула Старджеса* $n_{COL} = \log_2 N + 1 = 3{,}322 \lg N + 1$;
- *формула Брукса і Каррузера* $n_{COL} = 5 \lg N$;
- рекомендація *Хайнхольда* та *Гаеде* $n_{COL} = \sqrt{N}$;
- рекомендація *Уїльямса* $n_{COL} = 1{,}9 N^{0{,}4}$;
- рекомендація *ВМЕІ*, *Варна* $n_{COL} = 4 \lg N$;
- *формула Тонєвої* $n_{COL} = 5 \lg N - 5 = 5 \lg(N/10)$;
- *формула Алєксєєвої* $n_{COL} = (4/\chi) \lg(N/10)$, де χ – коефіцієнт для певного розподілу залежно від його вигляду;
- граничні значення: min $n_{COL} = 0{,}55 N^{0{,}4}$, max $n_{COL} = 1{,}25 N^{0{,}4}$.

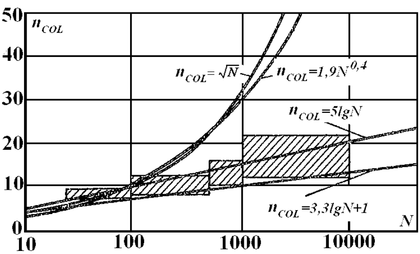

Рис. 1 – Порівняння величини n_{COL} , отримані згідно до різних рекомендацій [23].

На рис. 1, узятому з книги [23], показані графіки n_{COL} для зіставлення між собою деяких рекомендацій з наведеного списку. Заштрихованими прямокутниками показана рекомендація згідно з виданими *ВНДІМ ім. Д.І. Мендєлєєва* в 1972 році «Рекомендациями по методам обработки результатов наблюдений».

Залежно від обсягу вибірки від 40 до 10000 кількість n_{COL} назначається від 7 до 22.

Слід зазначити, що в області чисел $N \approx 100$ спостерігається збіг значень n_{COL}, зі зростанням N існують суттєві розбіжності. Загальною вимогою для *унімодальних гістограм* є непарна кількість інтервалів, тому в даній роботі були обрані наступні значення n_{COL}: при $N = 500 \cdot n_{COL} = 11$, при $N = 1000 \cdot n_{COL} = 13$, при $N = 3000 \cdot n_{COL} = 15$, що незначно перебільшує кількість, визначеною за формулою Старджеса та поступається решті.

Вибіркові оцінки моментів. Для визначення вибіркових оцінок математичного очікування, середньоквадратичного очікування, початкових (табл. 1) та центральних моментів (табл. 2) необхідного порядку, коефіцієнтів асиметрії та ексцесу не є необхідним будь-яке групування експериментальних даних [17]. Ці оцінки визначаються безпосередньо за вихідною вибіркою $J_{\mathrm{P}i}$ ($i = 1 \ldots N$). Слід зазначити, що незміщена оцінка важлива при $N < 50$, тому в подальшому будемо застосовувати позначення для незміщених оцінок.

Таблиця 1 – Вибіркові оцінки початкових моментів порядку 0 – 4

$\tilde{m}_{\mathrm{O}} = 1$	$\tilde{m}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J_{\mathrm{P}i}$	$\tilde{m}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J_{\mathrm{P}i}^2$	$\tilde{m}_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J_{\mathrm{P}i}^3$	$\tilde{m}_4 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J_{\mathrm{P}i}^4$

Таблиця 2 – Вибіркові оцінки центральних моментів порядку 0 – 4
та незміщені оцінки центральних моментів

Вибіркові оцінки центральних моментів порядку 0 – 4	Незміщені оцінки центральних моментів
$\tilde{\mu}_{\mathrm{O}} = 1$	$\hat{\mu}_0 = 1$
$\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(J_{\mathrm{P}i} - \tilde{m}_1\right)$	$\hat{\mu}_0 = \tilde{\mu}_1$
$\tilde{\mu}_2 = \tilde{S}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(J_{\mathrm{P}i} - \tilde{m}_1\right)^2$	$\hat{\mu}_2 = \frac{N}{N-1}\tilde{\mu}_2$, $\hat{S}^2 = \frac{N}{N-1}\tilde{S}^2$
$\tilde{\mu}_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(J_{\mathrm{P}i} - \tilde{m}_1\right)^3$	$\hat{\mu}_3 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)}\tilde{\mu}_3$
$\tilde{\mu}_4 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(J_{\mathrm{P}i} - \tilde{m}_1\right)^4$	$\hat{\mu}_4 = \frac{N\left(N^2 - 2N + 3\right)\tilde{\mu}_4 - 3N(2N-3)\tilde{\mu}_2^2}{(N-1)(N-2)(N-3)}$

Вибіркові коефіцієнти асиметрії $\tilde{S}k$ та ексцесу $\tilde{E}x$ визначаються за формулами

$$\tilde{S}k = \tilde{m}_3 / \tilde{S}^3, \; \tilde{E}x = \tilde{m}_4 / \tilde{S}^4 - 3. \qquad (3)$$

Для нормального розподілу $Sk = 0$, тобто розподіл симетричний відносно математичного очікування. $Sk > 0$, якщо правий хвіст більш довгий порівняно з лівим, $Sk < 0$ у протилежному випадку. Для нормального розподілу $Ex = 3$. $Ex > 0$, якщо пік розподілу *умовно гострий*, $Ex < 0$, якщо пік розподілу *умовно гладкий*, закруглений. Для попереднього висновку про можливість апроксимації емпіричних даних нормальним розподілом при достатньо великому обсязі вибірки (порядку 10^3) проводиться обчислення вибіркових середньоквадратичних відхилень коефіцієнтів асиметрії (S_1) й ексцесу (S_2) [2, 21]

$$S_1 = \sqrt{\frac{6(N-2)}{(N+1)(N+3)}}, \; S_2 = \sqrt{\frac{24N(N-2)(N-3)}{(N+1)^2(N+3)(N+5)}}. \qquad (4)$$

Іноді рекомендується вказані коефіцієнти обчислювати за наступними формулами:

$$\tilde{S}k = \frac{k_3}{\sqrt{k_2^3}}, \ \tilde{E}x = \frac{k_4}{k_2^2} - 3,$$

$$\text{де } k_2 = \frac{\tilde{\mu}_2}{1-1/N}, \ k_3 = \frac{\tilde{\mu}_3}{(1-1/N)(1-2/N)},$$

$$k_3 = \frac{\tilde{\mu}_4}{\left(1-\frac{2}{N+1}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{3}{N}\right)} - \frac{3\tilde{\mu}_2^2}{\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{3}{N}\right)}. \qquad (5)$$

Якщо вибірковий розподіл є нормальним або близький до нормального, то обчислені за формулами (5) коефіцієнти $\tilde{S}k$ і $\tilde{E}x$ мають асимптотичне нормальні розподіли з нульовим математичним очікуванням та середньоквадратичними відхиленнями відповідно

$$S_1 = \sqrt{\frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}}, \ S_2 = \sqrt{\frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}}. \qquad (6)$$

Вважається, що якщо виконується умова $\left|\tilde{S}k\right| \le 3S_1$, то розподіл симетричний. Якщо, крім того, для коефіцієнту ексцесу виконується нерівність $\left|\tilde{E}x\right| \le 5S_2$, розподіл можна вважати нормальним. В роботі, у подальшому, під час аналізу результатів певних досліджень буде зроблено аналіз прийняття чи неприйняття нормального закону для апроксимації емпіричних даних.

Дійсні (теоретичні) розподіли діаметрів шариків підшипника та полярного моменту опору головного перерізу. При нормальному розподілі діаметрів шариків підшипника x_i останні підкоряються *неперервному теоретичному закону* у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} \exp\left\{-\frac{(x-m_d)^2}{2\sigma_d^2}\right\}, \qquad (7)$$

для якого обчислюють початкові моменти $n-$го порядку

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx.$$

Якщо існує аналітична залежність між величинами x і J_P, а саме для об'єкту, що розглядається,

$$J_\text{P} = \pi x^4/32 = \varphi(x),$$

то зворотна функція може бути записана у вигляді

$$x = \psi(J_\text{P}) = (32J_\text{P}/\pi)^{1/4}.$$

Користуючись відомими формулами [9], які дають залежність між розподілами, отримуємо

$$g(J_\text{P}) = \varphi\left[\psi(J_\text{P})\right] \cdot \left|\psi'(J_\text{P})\right|, \ \psi'(J_\text{P}) = (1/8\pi) \cdot 1/J_\text{P}^{3/4}. \qquad (8)$$

Остаточно теоретичний розподіл для полярного моменту інерції головного перерізу отримає вигляд

$$g\left(J_{\mathrm{P}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_d}\exp\left(-\left[\left(\frac{32J_{\mathrm{P}}}{\pi}\right)^{1/4}-m_d\right]^2/\left(2\sigma_d^2\right)\right)\left(\frac{1}{8\pi}\right)\frac{1}{J_{\mathrm{P}}^{3/4}}. \qquad (9)$$

Початкові моменти для нього можна виразити через початкові моменти змінної x, що приводить до наступного співвідношення:

$$m_n=\int_{-\infty}^{\infty}\left(J_{\mathrm{P}}\right)^n g\left(J_{\mathrm{P}}\right)dJ_{\mathrm{P}}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\pi\cdot x^4/32\right)^n f\left(x\right)dx=\left(\pi/32\right)^n\alpha_{4n}. \qquad (10)$$

Таким чином, у підсумку можна обчислити вибіркові оцінки початкових $\tilde{m}_n$ і центральних $\tilde{\mu}_n$ моментів на основі емпіричних даних, а також теоретичні значення аналогічних моментів m_n і μ_n для розподілу (9). Слід зазначити, що не існує проблем з визначенням моментів довільного порядку, але для подальших досліджень потрібно знати числові значення моментів до 4-го включно.

Висновки. Таким чином, в роботі розглянута задача апроксимації емпіричних даних, які представлені у вигляді вибірки та на їхній основі побудовaній гістограми, за допомогою різного типу законів розподілу. У ролі емпіричних даних можуть виступати похибки вимірювання або будь-які інші дані. Показано, що використання для апроксимації нормального розподілу не завжди є прийнятним у наслідок можливих відмінностей через асиметрію та гостру або сплощену вершину емпіричного розподілу. За цих умов для апроксимації можливо використання типових розподілів, але це призводить до перебирання без гарантії знаходження справжнього або принаймні близького до нього закону.

У подальших частинах дослідження буде застосовано існуючий підхід на основі сімей розподілів Пірсона, який охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до нормального, та може стати універсальним, але потребує поглибленого дослідження. Також будуть наведені результати чисельних досліджень для вибірок різного обсягу з різними середньоквадратичними відхиленнями змінної, для демонстрації можливості використання запропонованого підходу та розробленого на його основі математичного апарату для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних.

Список літератури: **1.** *Айвазян С.А.*, *Енюков И.С.*, *Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с. **2.** *Айвазян С.А.*, *Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: Изд. объединение «ЮНИТИ», 1998. – 1022 с. **3.** *Афифи А.*, *Эйзен С.* Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ. – М.: Мир, 1982. – 488 с. **4.** *Боровиков В.П.* STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2003. – 688 с. **5.** *Брандт З.* Статистические методы анализа наблюдений / Под ред. *В.Ф. Писаренко*. – М.: Мир, 1975. – 314 с. **6.** *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с. **7.** *Вентцель Е.С.*, *Овчаров Л.А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 448 с. **8.** *Вентцель Е.С.*, *Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для втузов. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с. **9.** *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971. – 328 с. **10.** *Демидович Б.П.*, *Марон И.А.* Основы вычислительной математики / Под общ. ред. *Б.П. Демидовича*. – 2-е изд. – М.: Госуд. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 660 с. **11.** *Дьяконов В.П.* Справочник по алгоритмам и программа на языке бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. –

М.: Наука, 1989. – 240 с. **12.** *Дэннис Дж.*, *Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с. **13.** *Елисеева И.И.*, *Юзбашев М.М.* Общая теория статистики. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 656 с. **14.** *Жовдак В.А.*, *Мищенко И.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкций с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Х.: Харьковский государственный политехнический университет, 1999. – 120 с. **15.** *Кендалл М.*, *Стьюарт А.* Теория распределений / Под ред. *А.Н. Колмогорова*. – М.: Наука, 1966. – 588 с. **16.** *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с. **17.** *Крамер Г.* Математические методы статистики / Под ред. *А.Н. Колмогорова*. – М.: Мир, 1975. – 648 с. **18.** *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1962. – 249 с. **19.** *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / Под ред. *К.И. Бабенко*. – М.: Мир, 1980. – 608 с. **20.** *Маркин Н.С.* Основы теории обработки результатов измерений: учебное пособие для средних специальных заведений. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 176 с. **21.** *Минько А.А.* Статистический анализ в MS Excel. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. **22.** *Митропольский А.К.* Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. – 576 с. **23.** *Новицкий П.В.*, *Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. – 2-е изд. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. – 304 с. **24.** *Романов В.Н.* Теория измерений. Методы обработки результатов измерений. – 2-е изд. – СПб.: СЗТУ, 2006. – 127 с. **25.** *Смирнов Н.В.*, *Дунин-Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 512 с. **26.** Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. *М. Абрамовица* и *И. Стиган*. – М.: Наука, 1979. – 832 с. **27.** *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с. **28.** *Уилкс С.* Математическая статистика / Под ред. *Ю.В. Линника*. – М.: Наука, 1967. – 632 с. **29.** *Уиттекер Э.*, *Робинсон Г.* Математическая обработка результатов наблюдений / Под ред. *Н.М. Гюнтера*. – М.-Л.: ОНТИ – Главная редакция общетехнической литературы, 1935. – 364 с. **30.** *Хальд А.* Математическая статистика с техническими приложениями / Под ред. *Ю.В. Линника*. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1956. – 664 с. **31.** *Ходасевич Г.Б.* Обработка экспериментальных данных на ЭВМ. Часть 1. Обработка одномерных данных [Электронный ресурс]: Учебное пособие / *Г.Б. Ходасевич*. – Режим доступа: http:// www.dvo.sut.ru/libr/opds/il30hodo_part/4.htm. **32.** *Худсон Д.* Статистика для физиков. Лекции по теории вероятностей и элементарной статистике / Под ред. *Е.М. Лейкина*. – 2-е изд. – М.: Мир, 1970. – 297 с. **33.** *Черменский О.Н.*, *Федотов Н.Н.* Подшипники качения: Справочник – каталог. – М.: Машиностроение, 2003. – 576 с. **34.** *Янке Е.*, *Эмде Ф.*, *Лёш Ф.* Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / Под ред. *Л.И. Седова*. – М.: Наука, 1964. – 344 с.

Bibliography (transliterated): 1. Ajvazjan, S. A., I. S. Enjukov and L. D. Meshalkin. *Prikladnaja statistika: Osnovy modelirovanija i pervichnaja obrabotka dannyh*. *Spravochnoe izdanie*. Moscow: Finansy i statistika, 1983. Print. **2.** Ajvazjan, S. A., and V. S. Mhitarjan. *Prikladnaja statistika i osnovy ekonometriki*. Moscow: Izd. objedinenie «JuNITI», 1998. Print. **3.** Afifi, A., and S. Jejzen. *Statisticheskij analiz: Podhod s ispol'zovaniem EVM*. Moscow: Mir, 1982. Print. **4.** Borovikov, V. P. *Statistica*. *Iskusstvo analiza dannyh na komp'jutere: Dlja professionalov*. *2nd. ed*. St. Petersburg: Piter, 2003. print. **5.** Brandt, Z. *Statisticheskie metody analiza nabljudenij*. Ed. V. F. Pisarenko. Moscow: Mir, 1975. Print. **6.** Vadzinskij, R. N. *Spravochnik po verojatnostnym raspredelenijam*. St. Petersburg: Nauka, 2001. Print. **7.** Ventcel', E. S., and L. A. Ovcharov. *Zadachi i uprazhnenija po teorii verojatnostej: Ucheb. posobie dlja stud. Vtuzov. 5th ed. Ispr*. Moscow: Izdatel'skij centr «Akademija», 2003. Print. **8.** Ventcel', E. S., and L. A. Ovcharov. *Teorija verojatnostej i ejo inzhenernye prilozhenija: Ucheb. posobie dlja vtuzov*. *2nd. ed*. Moscow: Vysshaja shkola, 2000. Print. **9.** Gurskij, E. I. *Teorija verojatnostej s jelementami matematicheskoj statistiki*. Moscow: Vysshaja shkola, 1971. Print. **10.** Demidovich, B. P., and I. A. Maron. *Osnovy vychislitel'noj matematiki*. Ed. B. P. Demidovich. 2nd. ed. Moscow: Gosud. izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 1963. Print. **11.** D'jakonov, V. P. *Spravochnik po algoritmam i programma na jazyke BASIC dlja personal'nyh EVM: Spravochnik*. Moscow: Nauka, 1989. Print. **12.** Djennis, Dzh., and R. Shnabel'. *Chislennye metody bezuslovnoj optimizacii i reshenija nelinejnyh uravnenij*. Moscow: Mir, 1988. Print. **13.** Eliseeva, I. I., and M. M. Juzbashev. *Obshhaja teorija statistiki*. *5th. ed. Pererab. i dop.* Moscow: Finansy i statistika, 2004. Print. **14.** Zhovdak, V. A., and I. V. Mishhenko. *Prognozirovanie nadezhnosti jelementov konstrukcij s uchetom tehnologicheskih i ekspluatacionnyh faktorov*. Kharkov: Khar'kovskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet, 1999. Print. **15.** Kendall, M., and A. St'juart. *Teorija raspredelenij*. Ed. A. N. Kolmogorov. Moscow: Nauka, 1966. Print. **16.** Kobzar', A. I. *Prikladnaja matematicheskaja statistika*. *Dlja inzhenerov i nauchnyh rabotnikov*. Moscow: FIZMATLIT, 2006. Print. **17.** Kramer, G. *Matematicheskie metody statistiki*. Ed. A. N. Kolmogorov. Moscow: Mir, 1975.

Print. **18.** Kuznecov, D. S. *Special'nye funkcii*. Moscow: Vysshaja shkola, 1962. Print. **19.** Ljuk, Ju. *Special'nye matematicheskie funkcii i ih approksimacii*. Ed. K. I. Babenko. Moscow: Mir, 1980. Print. **20.** Markin, N. S. *Osnovy teorii obrabotki rezul'tatov izmerenij: uchebnoe posobie dlja srednih special'nyh zavedenij*. Moscow: Izd-vo standartov, 1991. Print. **21.** Min'ko, A. A. *Statisticheskij analiz v MS Excel*. Moscow: Izdatel'skij dom «Vil'jams», 2004. Print. **22.** Mitropol'skij, A. K. *Tehnika statisticheskih vychislenij*. Moscow: Nauka, 1971. Print. **23.** Novickij, P. V., and I. A. Zograf. *Ocenka pogreshnostej rezul'tatov izmerenij. 2nd. ed*. Leningrad: Energoatomizdat. Leningr. otd-nie, 1991. Print. **24.** Romanov, V. N. *Teorija izmerenij. Metody obrabotki rezul'tatov izmerenij. 2nd. ed*. St. Petersburg: SZTU, 2006. Print. **25.** Smirnov, N. V., and I. V. Dunin-Barkovskij. *Kurs teorii verojatnostej i matematicheskoj statistiki dlja tehnicheskih prilozhenij*. Moscow: Nauka, 1969. Print. **26.** *Spravochnik po special'nym funkcijam s formulami, grafikami i tablicami*. Ed. M. Abramovica, and I. Stigan. Moscow: Nauka, 1979. Print. **27.** Tihonov, V. I. *Statisticheskaja radiotehnika*. Moscow: Radio i svjaz', 1982. Print. **28.** Uilks, S. *Matematicheskaja statistika*. Ed. Ju. V. Linnik. Moscow: Nauka, 1967. Print. **29.** Uitteker, Je., and G. Robinson. *Matematicheskaja obrabotka rezul'tatov nabljudenij*. Ed. N. M. Gjunter. Moscow-Leningrad: ONTI – Glavnaja redakcija obshhetehnicheskoj literatury, 1935. Print. **30.** Hal'd, A. *Matematicheskaja statistika s tehnicheskimi prilozhenijami*. Ed. Ju. V. Linnik. Moscow: Izd-vo inostrannoj literatury, 1956. Print. **31.** Hodasevich, G. B. *Obrabotka jeksperimental'nyh dannyh na EVM. Chast' 1. Obrabotka odnomernyh dannyh. Uchebnoe posobie*. 2015. Web. 10 Jurn 2015 <http://www.dvo.sut.ru/ libr/opds/il30hodo_part/4.htm>. **32.** Hudson, D. *Statistika dlja fizikov. Lekcii po teorii verojatnostej i jelementarnoj statistike*. Ed. E. M. Lejkin. 2nd. ed. Moscow: Mir, 1970. Print. **33.** Chermenskij, O. N., and N. N. Fedotov. *Podshipniki kachenija: Spravochnik – catalog*. Moscow: Mashinostroenie, 2003. Print. **34.** Janke, E., F. Jemde and F. Ljosh. *Special'nye funkcii. (Formuly, grafiki, tablicy)*. Ed. L. I. Sedov. Moscow: Nauka, 1964. Print.

Надійшла (received) 05.06.2015

УДК 519.67:621.762.4.04+621.762.53+537.52

Ю.Г. ГУЦАЛЕНКО, ст. науч. сотр., НТУ «ХПІ»

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕССОВАНИЯ В ПРОЦЕССАХ КОНСОЛИДАЦИИ ПОРОШКОВ МЕТОДОМ СПАРК-ПЛАЗМЕННОГО СПЕКАНИЯ

Рассматривается проблема физико-математического прогнозирования рационального давления в процессах спарк-плазменного спекания порошковых композиций. Определены физические аспекты этой проблемы и представлен подход к расчету давлений в цикле прессования на стадии подготовки и экспериментальной разработки производства. Расчет основан на использовании закона Пашена применительно к рассматриваемой модели спарк-плазменной консолидации порошков под давлением. Предложена расчетная реляционная база данных по давлению в нанометрическом диапазоне средних размеров зерен исходных порошков в технологиях производства спарк-плазменным спеканием. Результаты расчетов сопоставлены с практическим опытом энергосберегающего скоростного спарк-плазменного спекания плотного керамического композита из нанопорошков Al_2O_3-WC (50/50 мас. %). Предложены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: порошковая композиция, спарк-плазменное спекание, электрический разряд, закон Пашена, давление прессования, асимптотическая зависимость.

Введение. Конкуренция технологий консолидации порошков различных материалов инструментального и конструкционного назначения определяется соперничеством прежде всего в формировании, и притом энергоэффективном, тонкодисперсных и высокоплотных структур, в единстве этих двух качеств и составляющих основу уровня их физико-механических свойств и эксплуатационных показателей в готовых изделиях [1], если решаемая задача