

Державна служба України з надзвичайних ситуацій
Національний університет цивільного захисту України

**Сергій Миколайович Шевченко,
Євген Дмитрович Слепужніков
Семків Олег Михайлович**

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
РЕЗОНАНСУ ХИТНОЇ ПРУЖИНИ
В ЗАЛЕЖНОСТІ
ВІД ЇЇ ПАРАМЕТРІВ**

Харків·Черкаси·2022

УДК 514.18
Г 35

Рекомендовано до друку вченою радою
Національного університету цивільного захисту України
(протокол № 4 від 16.12.2021 р.)

Рецензенти:

В. М. Комяк, доктор технічних наук, професор;

С. В. Росоха, доктор технічних наук, доцент.

Геометричне моделювання резонансу хитної пружини в залежності від її параметрів / О.М. Семків, С.М. Шевченко, Є.Д. Слепужніков. – Харків-Черкаси: Видавець О. Третьяков, 2022. – 108 с.

ISBN 978-617-7827-34-3

В роботі розроблен метод геометричного моделювання резонансу хитної пружини на основі побудови траєкторії руху її вантажу з урахуванням як основних її параметрів, так і початкових умов виникнення коливань, що дозволило проілюструвати розв'язки деяких задач у галузі аварійно-рятувальної тематики.

Для наукових та науково-педагогічних працівників, докторантів, аспірантів (ад'юнктів), здобувачів вищої освіти в межах навчальної програми технічного закладу вищої освіти.

УДК 514.18

ISBN 978-617-7827-34-3

© Семків О.М., Шевченко С.М., Слепужніков Є.Д., 2022

Наукове видання

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
РЕЗОНАНСУ ХИТНОЇ ПРУЖИНИ
В ЗАЛЕЖНОСТІ
ВІД ЇЇ ПАРАМЕТРІВ

Семків Олег Михайлович
Шевченко Сергій Миколайович
Слепужніков Євген Дмитрович

Монографія

Підп. до друку 14.02.2022.

Формат 60x84/16.

Папір книжково-журнальний.

Шрифт Times. Ум. друк. арк. 6,43.

Вид № 2-01-22. Наклад 100 прим.

Видавець Третьяков Олександр Миколайович.

Свідоцтво про внесення до Державного

реєстру видавців.

Серія ДК № 4862 від 11.03.2015 р.

Україна, 18001, м. Черкаси, вул. Слави, 1, к. 24

Тел.: 063/62-555-12. E-mail: artbrama@ukr.net

ЗМІСТ

Вступ	5
Розділ 1. Відомі способи дослідження періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини	6
1.1 Комп'ютерне моделювання періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини	7
1.2 Теоретичні питання моделювання резонансу хитної пружини	10
1.3 Способи дослідження коливань хитних пружин.....	13
1.4 Спосіб проєкційного фокусування для визначення періодичних траєкторій вантажів хитних пружин	17
Розділ 2. Розрахунок періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини з рухомою точкою підвісу та систематизація її коливань	22
2.1 Хитна пружина (swinging spring) як механічна модель складних процесів у природі й техніці	22
2.2 Побудова періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини з рухомою точкою підвісу	24
2.3 Визначення взаємного зв'язку значень параметрів для забезпечення періодичних траєкторій	36
2.4 Систематизація траєкторій коливань за допомогою складеної таблиці	41
Розділ 3. Геометричне моделювання резонансу хитної пружини та спосіб ним керування	45
3.1 Необхідність досліджень проблеми обміну між собою енергії в рамках певної динамічної системи.....	45
3.2 Опис процесу руху хитної пружини з урахуванням перетікання горизонтальних коливань у вертикальні й навпаки.....	47
3.3 Умови виникнення резонансу хитної пружини залежно від відношення «пружинних» і «маятникових» частот коливання.....	53
3.4 Моделювання резонансу хитної пружини та спосіб керування ним.....	55
Розділ 4. Використання хитних пружин як аналогів процесів при розв'язанні задач аварійно-рятувальної тематики	64

4.1 Використання хитних пружин у якості механічної моделі сучасних технологічних процесів як динамічних систем.....	64
4.2 Моделювання траєкторії точки на дроті електропередачі в умовах поривів вітру	67
4.3 Моделювання процесу роздрібнення газової бульбашки на основі його аналогії з хитною пружиною	72
4.4 Розрахунок відбивача пожежного сповіщувача диму з наносенсорним чутливим датчиком.....	76
Висновки	86
Додатки	88

ВСТУП

Для пояснення складних явищ або процесів часто використовують наочні механічні інтерпретації. Зокрема для коливальних процесів у якості моделей розглядають маятникові аналоги. Класичним прикладом вважається модель оберненого маятника з віброуючою точкою кріплення (маятник Капиці), яка надала фізичне пояснення цілому класу задач. Не менш вражаючі механічні інтерпретації пов'язані з іншим видом маятника. В ідеалізованому вигляді він складається з точкового вантажу маси m , прикріпленого до кінця невагомої пружини жорсткістю k і довжиною h у ненавантаженому стані. Інший кінець пружини закріплений нерухомо (або може вібрувати). Утворена в такий спосіб коливальна система має рухатися тільки у вертикальній площині, при цьому зберігаючи вісь пружини прямолінійною. Зазначений різновид маятника в літературі одержав назву *хитної пружини* (swinging spring). В даному випадку точковий вантаж одночасно бере участь у двох видах коливань: подібних пружині – коли переміщається уздовж прямолінійної осі пружини, і подібних маятнику – коли здійснює коливання сумісно з її віссю. У поведженні такої коливальної системи були виявлені цікаві та глибокі фізичні закономірності. Мова йде про процеси із внутрішніми нелінійно пов'язаними поданнями різних коливальних компонентів. При цьому, що істотно, складові компоненти системи обмінюються енергією між собою. Використання хитної пружини приймається як парадигма вивчення таких нелінійних зв'язаних систем.

Особливе значення має дослідження умови виникнення стану резонансу хитної пружини. Тобто коли частота (або період) поздовжніх коливань точкового вантажу відрізнятиметься у кратну кількість разів від частоти (або періоду) його поперечних коливань. Переважна кількість можливих впроваджень зазначеного стану резонансу має безпосереднє відношення до порушення стійкості й керованості механічних виробів у процесі їх руху. Наприклад, при розрахунках переміщення корабля або літака необхідно враховувати обмін енергією між поперечними і шляховими (подовжніми) коливаннями як компонентами динамічної системи. В більшості випадків частоти цих коливань приймають як співвідношення 2:1.

Звичайно, стан резонансу хитної пружини виникає в разі певної комбінації значень маси вантажу, довжини пружини у ненавантаженому стані, жорсткості пружини, а також опису закону руху точки кріплення пружини. Але на стан хитної пружини ще мають впливати і початкові значення параметрів ініціювання коливань. В цьому можна переконатися, якщо резонанс інтерпретувати за допомогою траєкторії руху вантажу хитної пружини. Тому необхідно розробити ще не досліджений універсальний спосіб синтезу множини траєкторій залежно від параметрів хитної пружини і параметрів ініціювання її коливань. Увагу слід зосередити на

випадках, коли траєкторіями будуть періодичні криві, а також на важливих можливостях керувати різновидами резонансу.

В наш час теоретичними та практичними аспектами прикладної геометрії є роботи вчених: Н.М. Аушевої, Ю.І. Бадаєва, В.Д. Борисенка, В.В. Ваніна, В.М. Верещаги, В.В. Гнатушенка, С.М. Ковальова, Ю.М. Ковальова, В.М. Корчинського, Л.М. Куценка, Є.В. Мартина, В.Є. Михайленка, В.М. Найдиша, А.В. Найдиша, В.М. Несвідоміна, С.Ф. Пилипаки, О.Л. Підгорного, В.О. Плоского, Є.В. Пугачова, К.О. Сазонова, Г.Я. Тулученко, О.М. Семківа, А.Н. Хомченка, О.В. Шоман, В.П. Юрчука та їх учнів.

Розв'язанню класу задач, пов'язаних із резонансами хитних пружин, присвячено роботи вчених: Г.Т. Алдошина, Д.А. Булдакової, В.В. Вановського, М.Н. Заріпова, А.В. Кірюшина, А.А. Клименка, Ю.В. Міхлина, О.Г. Петрова, М.М. Шундерюка, А.В. Фомічова, С.П. Яковлева та їх учнів.

РОЗДІЛ 1

ВІДОМІ СПОСОБИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ ПЕРЕМІЩЕННЯ ВАНТАЖУ ХИТНОЇ ПРУЖИНИ

Під час проведення аналізу літературних джерел, з метою виявлення існуючих моделей та способів побудови періодичних траєкторій вантажу хитних пружин, перевагу було надано способу проєкційного фокусування, який запропонував О.М. Семків [89–99].

Спосіб проєкційного фокусування дозволяє визначити набір значень, коли вантаж рухався б по періодичній траєкторії. А саме, в якості узагальнених координат обрано масу вантажу, жорсткість пружини, а також кут відхилення її осі та величину подовження пружини.

В результаті проведеного аналізу літературних джерел не було знайдено досліджень стосовно розрахунку періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини з рухомою точкою підвісу, а також табличного подання геометричних форм періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружин залежно від її параметрів.

Головна ідея способу, запропонованого О.М. Семківим, полягає у наступному. Чисельно розв'яжемо диференціальні рівняння Лагранжа другого роду та побудуємо наближене зображення інтегральної кривої у фазовому просторі певної узагальненої змінної. Нехаотичні технологічні траєкторії коливання елемента маятникової механічної системи проявляються на зображеннях фазових траєкторій у вигляді «сфокусованих» кривих. Інакше це можна сформулювати так: критичне значення параметра p одержимо в момент, коли зображення проєкції інтегральної кривої на фазову площину (тобто фазової траєкторії) набуде мінімальної площі (у піксельному вимірі). У випадку критичного значення характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – перетвориться у «сфокусовану» криву.

1.1 Комп'ютерне моделювання періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини

Для практичних впроваджень інтерес являє собою дослідження особливостей коливань хитної пружини. Наприклад, із використанням моделі хитної пружини в роботі [4] досліджується атмосферний баланс планети, в роботі [5] – коливання молекули вуглекислого газу, в роботі [6] – коливання високовольтних проводів, а в роботі [7] моделюються вібрації гелікоптера. Опис коливань пружини подібний рівнянням задач «хижак–жертва» [8]. Список можна продовжувати. При цьому у всіх, на перший погляд, розрізних впровадженнях є спільна особливість – можливість їх дослідження на основі моделі хитної пружини. При цьому ключовим моментом є визначення умов забезпечення нехаотичних періодичних траєкторій вантажу хитної пружини. Такі дослідження дозволяють відмежуватися від хаотичних рухів елементів механічних пристроїв, до складу яких входять пружинні елементи. Періодична траєкторія переміщення вантажу хитної пружини ілюструє розв'язок відповідних диференціальних рівнянь, що описують її коливання. Адже ці рівняння мають природу, аналогічну диференціальним рівнянням суміжних за змістом впроваджень. Одержана геометрична форма періодичної траєкторії переміщення вантажу хитної пружини у просторі параметрів конкретної задачі допоможе ілюструвати розв'язки цієї задачі. Тобто розгляд моделі хитної пружини дозволить аналізувати характер розв'язків у суміжних за змістом задачах і виявляти серед них, у певному розумінні, оптимальні варіанти. Подібно тому, як у механіці для аналізу коливальних процесів механізмів застосовують фігури Ліссажу.

Отже, на актуальність обраної теми вказує необхідність розробки інженерного способу знаходження значень набору параметрів для забезпечення нехаотичної періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини.

Історія виникнення досліджень, присвячених коливанням хитної пружини, розпочалася із квантово-механічного пояснення ефекту розщеплення ліній у спектрі комбінаційного розсіювання на молекулі C_2 . Тоді ж було висловлено припущення, що ефект має не квантову, а класичну механічну природу коливань. А саме – ефект обумовлений внутрішніми особливостями коливань молекули, де частота коливань одного типу приблизно удвічі перевищує частоту коливань другого типу. Вчені вирішили перевірити це на моделі хитної пружини. Розрахований рух такої системи показав, що за співвідношення частот 2:1 повинно наставати періодично повне перекачування енергії з вертикальних коливань у горизонтальні й назад.

Доцільність дослідження хитної пружини виникла у зв'язку з виявленими можливостями їх «нестандартних» використань як у теоретич-

ному плані, так і на практиці. Однак більшість досліджень зосереджуються на аналітичних апроксимаціях для слабо зв'язаних систем і енергетичних обмінів, які виникають, коли підсистеми перебувають у резонансі. Ефективним механізмом енергообміну є параметричний механізм [9]. Зокрема хитна пружина із двома ступенями свободи є автопараметричною системою, що являє собою основу для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Крім того, хитна пружина має значення завдяки можливості якісного подання багатьох нелінійних сполучених систем. Серед цих подань назвемо класичний аналог для коливальних мод трьохатомних молекул, який реалізує резонанс Фермі в інфрачервоному й комбінаційному спектрах [1].

Коливання хитних пружин мають безпосереднє відношення до динаміки літаків і кораблів. Були виявлені ефекти порушення стійкості та керованості швидкохідних кораблів і надзвукових літаків. Виявилось, що найбільш інтенсивне розгойдування бічних коливань має місце, коли коливання за кутом атаки відбуваються із частотою, удвічі більшою за частоту бічних коливань [10]. У будівельній механіці важливу роль відіграє видозмінена модель хитної пружини – модель гнучкої нитки. Гнучка нитка – це своєрідна пружина, що діє тільки на розтягнення. У типовій двовимірній моделі гнучка нитка одночасно може здійснювати поперечні коливання у своїй площині (аналог кутових коливань хитної пружини з вантажем) і маятникові коливання, що поєднують опорні закріплення (аналог вертикальних коливань) [6, 11]. В разі співвідношення частот цих коливань 1:2 відбувається втрата динамічної стійкості, коли виникають поперечні коливання нитки, амплітуда яких може досягати достатньо великих значень. Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати при розрахунку різноманітних конструкцій (висячих мостів, вантово-балкових систем, канатних доріг, ліній електропередачі, різних космічних тросових систем для утримання об'єктів, гнучких шлангів, різноманітних антен тощо) [3].

В роботах [12, 13] наведено теоретичне дослідження плоских малих нелінійних коливань хитної пружини з нелінійною залежністю натягу пружини від її подовження. Використовується метод гамільтонової нормальної форми. Розв'язки гамільтонових рівнянь нормальної форми показали, що періодична перебудова коливань між вертикальною й горизонтальною модами відбувається тільки у випадку резонансу 1:1 і 2:1. У всіх інших випадках, як за наявності резонансу, так і в разі його відсутності, коливання відбуваються із двома постійними частотами.

У роботі [14] вивчаються зміни в поведінці хитної пружини, коли під контролем параметра один відгук стає нестійким і замінюється іншим. Вибірка Пуанкаре використовується для зведення проблеми опису стійкості граничного циклу до більш простої задачі визначення стійкості нерухомої точки відображенням Пуанкаре. В роботі [15] розглянуто зв'язок

нормальних мод коливань хитного маятника. Наводяться коментарі про експерименти, пов'язані з порушенням нормальних режимів. В роботі [16] досліджено системи хитної пружини поблизу резонансу за допомогою «повільного флуктуаційного» наближення, яке полягає в застосуванні тригонометричних поліномів і збереженні тільки члена з найповільнішою частотою. У роботі [17] показано, що інтегральне наближення просторової хитної пружини, налаштованої на резонанс 1:1:2, має монохромію, а ступінчастий кут прецесії площини коливання резонансного пружинного маятника є числом обертання інтегрального наближення. Стаття [18] присвячена коливанням хитного маятника, точка підвісу якого є рухомою уздовж вертикальної лінії. Періодичні розв'язки рівняння одержують із використанням детермінантів Хілла. Розроблена обчислювальна процедура використовується для визначення комбінацій параметрів системи, для яких можливі періодичні рішення. У роботі [19] досліджується просторова хитна пружина, яка має резонанс 2:1:1, наближено описаний лагранжіаном. В описах використано гамільтонові скорочення та методи виведення зразків. В результаті отримано формулу, яка описує ступінчасту прецесію азимутального кута. У роботі [20] перетікання енергії між подовжніми і маятниковими коливаннями розглядається як пульсація. Пульсація і ступінчаста прецесія є характерними особливостями динаміки хитної пружини. Для визначення повного аналітичного рішення використано гамільтонову редукцію. У статті [21] динаміка пружинного маятника досліджується з використанням асимптотичних методів. Методи теорії нелінійних нормальних форм коливань дозволили дослідити динаміку маятника не тільки для малих, але і для значних амплітуд коливань.

Але всі наведені роботи мають переважно теоретичне спрямування. Для інженерної практики необхідні способи побудови реальних нехатичних періодичних траєкторій вантажів хитних пружин. Деякі з них описані в роботі [22], де наведено приклади періодичних траєкторій, а також в [23], де проведено дослідження умов побудови періодичних траєкторій. У роботі [24] наведено програму мовою математики, за допомогою якої можна будувати періодичні траєкторії подвійного маятника. Робота [25] присвячена дослідженню зв'язку можливої траєкторії вантажу хитної пружини з фігурами Ліссажу. В роботі [26] наведено Maple-програму побудови траєкторії вантажу хитної пружини. Інший спосіб побудови траєкторій руху вантажу хитної пружини запропоновано в роботі [27]. В роботі [28] наведено приклади періодичних траєкторій хитних пружин. В роботі [29] досліджуються коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Але у відомих роботах відсутній універсальний підхід до побудови періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Також відсутні аналізи коливань за допомогою фазових траєкторій функцій, які входять до опису узагальнених координат відповідної коливної системи.

1.2 Теоретичні питання моделювання резонансу хитної пружини

У роботах [32–34] наведено багато прикладів задач, де в рамках певної динамічної системи її нелінійно зв'язані коливальні компоненти можуть обмінюватися енергією між собою. При цьому досліджуються питання залежності дійства обміну енергією від параметрів керування системою. Проблема полягає в тому, щоб визначити загальну енергію системи і правильно оцінити енергетичні величини в часі, а також їх зв'язок для кожного з компонентів.

Для ілюстрації такого підходу використовують *двовимірний пружинний маятник* як механічну модель дослідження декількох нелінійно зв'язаних систем. Двовимірний пружинний маятник в ідеалізованому вигляді складається з «точкового» вантажу масою m , прикріпленого до кінця невагомої пружини жорсткістю k і довжиною h у ненавантаженому стані. Інший кінець пружини закріплений нерухомо. Утворена в такий спосіб коливальна система має рухатися тільки у вертикальній площині, при цьому *зберігаючи вісь пружини прямолінійною*. Точковий вантаж одночасно бере участь у двох видах коливань: подібних пружині – коли переміщається уздовж прямолінійної осі пружини, і подібних маятнику – коли здійснює коливання сумісно з її віссю. Такий різновид коливальної системи в літературі одержав назву хитної пружини (*swinging spring*) [35].

За допомогою хитної пружини наочно ілюструється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями. При цьому повинен враховуватися також вплив початкових умов ініціювання коливань. Особливе значення має дослідження умов виникнення стану резонансу хитної пружини. Тобто коли частота поздовжніх коливань відрізнятиметься у кратну кількість разів від частоти поперечних коливань. Крім поширеного «класичного» випадку (резонансу 2:1), доцільно розв'язувати задачі з іншими значеннями відношення частот. Наприклад, виникає необхідність [36] побудувати траєкторії руху вантажу для випадків таких резонансів: 2:1, 7:3, 9:4, 11:2 та інших. Знайдені геометричні форми траєкторії руху вантажу хитної пружини із заданими параметрами допоможуть визначити характеристики розв'язку обраної задачі.

В роботах [32–34] наведено велику кількість можливих впроваджень на базі застосування ідеї коливань хитної пружини. Значна частка з цього переліку має безпосереднє відношення до порушення стійкості й керованості літаків або швидкохідних кораблів у процесі їх руху. При розрахунках переміщення динамічної системи у просторі (корабля або літака) необхідно враховувати обмін енергією між поперечними і шляховими (поздовжніми) коливаннями як компонентами системи. В більшості випадків частоти цих коливань приймають як співвідношення 2:1. Але для ретельніших досліджень доцільно розглядати інші відношення час-

тот. Особливо це стосується досліджень динаміки коливань літаків типу «голландський крок» (Dutch roll) [37]. Такі коливання виникають у випадку великої поперечної стійкості літака в порівнянні з малою шляховою стійкістю. Тоді бічний рух літака характеризуватиметься взаємозалежними коливаннями за креном і ковзанням. Причому коливання за ковзанням відстають по фазі від коливань за креном, що пов'язано зі слабкою шляховою й надмірною поперечною стійкістю. Крен літака є причиною виникнення ковзання літака, усунення якого відбувається із запізненням через слабку шляхову стійкість. Ковзання, яке при цьому виникає, провокує необхідність аварійного крену літака в протилежну сторону через підвищену поперечну стійкість, і процес повторюється. Для гасіння коливань на літаках застосовуються демпфери нишпорення, розрахунок яких доцільно виконувати із залученням поняття перекачування енергій хитної пружини у стані резонансу.

Зрозуміло, що стан *резонансу* хитної пружини має відбуватися у випадку певної комбінації значень параметрів хитної пружини. У тривіальному випадку – коли період вертикальних коливань буде приблизно вдвічі меншим за період горизонтальних коливань: $2T_Y = T_X$, де

$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T_Y = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}},$$

де m – маса вантажу, k – жорсткість пружини,

h – довжина пружини у ненавантаженому стані, g – прискорення земного тяжіння. Або – як двоїсте твердження – коли частота вертикальних ко-

ливань $\omega_Y = \sqrt{\frac{k}{m}}$ буде приблизно удвічі більшою за частоту горизонталь-

них коливань $\omega_X = \sqrt{\frac{g}{h}}$: $2\omega_X = \omega_Y$.

Але на стан резонансу хитної пружини ще мають впливати і початкові значення параметрів ініціювання коливань. В цьому можна переко-
натися, якщо стан резонансу інтерпретувати за допомогою траєкторії руху вантажу хитної пружини. Зазначимо – іноді й періодичної, знайде-
ної серед можливих траєкторій руху [38]. Для її знаходження необхідно розробити універсальний спосіб синтезу множини траєкторій залежно від параметрів хитної пружини, а також, що важливо, від параметрів іні-
ціювання її коливань. І увагу слід зосередити на випадках, коли траєкто-
ріями будуть періодичні криві.

Зважаючи на наведене, доцільними будуть дослідження, спрямова-
ні на геометричне моделювання траєкторій руху вантажу хитної пружини, які відповідатимуть умовам заданого типу резонансу. Тобто умовам, коли частота вертикальних коливань «точкової» маси на хитній пружині буде у кратну кількість раз більшою за частоту горизонтальних коли-

вань і буде врахована максимальна кількість параметрів коливання хитної пружини.

Зазначимо, що рух вантажу хитної пружини помітно складніший, порівняно з вантажем математичного маятника, тому ефект від використання хитної пружини в якості механічної інтерпретації буде очікувано більш глибоким. Наприклад, проведені лабораторні експерименти з хитною пружиною дають нове розуміння руху планетарних хвиль в атмосфері Землі [39].

У тривіальних випадках нестійкість руху хитної пружини можна спостерігати в лабораторних експериментах при $n = 1$, тобто $\omega_y = 2\omega_x$ та $H = 4h/3$. Докладний виклад теорії хитної пружини з позицій лабораторних експериментів для зазначених випадків можна знайти в роботі [42]. В роботах [4, 43] проблема коливання хитної пружини була вивчена у випадку тривимірного простору з координатами x, y, z . В роботі [44] показано, що знайдені математичні вирази можна використовувати для опису великомасштабних рухів прошарків атмосфери Землі, а також у випадку примусового демпфування хитної пружини. Це означає, зокрема, що лабораторні експерименти із хитною пружиною можуть надати нове розуміння динаміки первинних резонансних кластерів у довільних нелінійних хвильових системах, яким притаманні трихвилеві резонанси.

Цікавою суміжною проблемою з хитною пружиною є дослідження маятника Уїлберфорса [45], з метою перевірити, чи його рівняння руху ідентичні тим, які описують динаміку деяких загальних резонансних кластерів [40]. Маятник Уїлберфорса складається з масивного вантажу, підвішеного на довгій пружині, яка може вільно повертатися відносно своєї вертикальної осі. Такий маятник, на відміну від хитної пружини, не здійснює маятниковоподібних коливань. За умов відповідного налаштування маятник Уїлберфорса демонструє процес передачі енергії між режимом «вертикальних» коливань вантажу (догори і донизу) та режимом «обертювих» коливань вантажу навколо осі пружини. Аналіз нормальних мод для маятника Уїлберфорса можна знайти в [46] разом із докладним описом можливих лабораторних експериментів і прикладів чисельного моделювання.

В роботі [47] на аналітичному рівні було досліджено умову резонансу між двома режимами коливань, який визначається тотожністю $\omega_{angle} = \omega_{vertical}$.

Експериментально продемонстровано, що, у випадку виконання умови резонансу, «ні довжина, ні діаметр дроту, ні крок навивки пружини, ні число її обертів не вплинуть на стан резонансу» [47]. Це спостереження є надзвичайно важливим, адже тоді маятник Уїлберфорса допускає математичний опис набагато ближчий до «фізичного» маятника Уїлберфорса, порівняно, наприклад, з описом математичного маятника відносно фізичного лінійного маятника. В роботі [21] обговорюються можливі впрова-

дження такого підходу в області нелінійного резонансного аналізу хвильових турбулентних систем, виконаних у лабораторних умовах.

В роботі [48] на основі складеної програми проілюстровано параметричний резонанс хитної пружини, який проявляється в передачі енергії від вертикальних коливань вантажу до горизонтальних і навпаки. Показано, що швидкість і амплітуда передачі енергії істотно залежать від початкових умов. В роботі [49] проілюстровано «перетікання» енергії між подовжніми і поперечними коливаннями точки на хитній пружині. Але в роботі відсутня програмна реалізація цього ефекту. В циклі робіт [50–54] наведено дослідження резонансу 2:1 хитної пружини та його зв'язку із траєкторією руху вантажу хитної пружини. Але автори обмежилися дослідженням лише одного варіанта резонансу.

Підводячи підсумок, зазначимо, що відомі способи дослідження резонансу хитної пружини базуються на тотожності типу $\mu\omega_x = \omega_y$, де

$\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота вертикальних коливань, а $\omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}}$ – частота горизонтальних коливань деякої точки на пружині. Тут і далі m [кг] – маса вантажу, k [Н/м] – жорсткість пружини, h [м] – довжина пружини у ненавантаженому стані, g [м/с²] – прискорення земного тяжіння. У формулі $\mu\omega_x = \omega_y$ μ – коефіцієнт пропорційності між частотами, який, власне, і визначає тип резонансу.

Але у зазначених роботах не враховуються ще два параметри хитної пружини, які суттєво впливають на її коливання. А саме, параметри у вигляді початкових відстаней точкового вантажу хитної пружини від координатних осей обраної системи координат, а також початкових швидкостей зміни положення вантажу в напрямку координатних осей. Контролювати вплив цих параметрів на стан резонансу зручно за допомогою графічного компонента коливань – траєкторії руху вантажу хитної пружини. Для впровадження необхідно визначити значення параметрів, які забезпечать періодичну траєкторію руху. Адже саме періодичну траєкторію доцільно використовувати при впровадженнях ідеї хитної пружини. В цьому полягає проблема досліджень, яка раніше не була розв'язана.

З наведеного аналізу випливає, що необхідно розробити універсальний спосіб синтезу траєкторії переміщення вантажу хитної пружини залежно від особливостей стану її резонансу; а саме, враховуючи не лише основні параметри хитної пружини (жорсткість, довжину в ненавантаженому стані та масу вантажу), але і початкові умови ініціювання коливань.

1.3 Способи дослідження коливань хитних пружин

У сучасному розумінні складний технологічний процес можна трактувати як динамічну систему, що складається з нелінійно зв'язаних коливальних компонентів. При цьому в рамках динамічної системи її ком-

поненти можуть обмінюватися енергією між собою. У роботі [56] розглянуто підхід до розв'язання класу задач, пов'язаних із феноменом обміну енергією між компонентами. При цьому досліджуються питання залежності цього дійства від параметрів керування системою. Метод полягає в тому, щоб визначити загальну енергію системи і правильно оцінити енергетичні величини в часі, а також їх зв'язок для кожного з компонентів.

Для ілюстрації такого підходу використовують *двовимірний пружинний маятник* як механічну модель дослідження декількох нелінійно зв'язаних систем. Такий різновид пружинного маятника в ідеалізованому вигляді складається з «точкового» вантажу масою m , прикріпленого до кінця невагомої пружини жорсткістю k і довжиною h у ненавантаженому стані. Інший кінець пружини закріплений нерухомо. Утворена в такий спосіб коливальна система має рухатися тільки у вертикальній площині, при цьому *зберігаючи вісь пружини прямолінійною*. Точковий вантаж одночасно виконує два види коливань: *подібних пружині* – коли переміщається уздовж прямолінійної осі пружини, і *подібних маятнику* – коли здійснює коливання сумісно з її віссю. На практиці хитні пружини можуть виконувати роль механічних ілюстрацій, де аналізуються поперечні (маятникові) коливання і поздовжні (пружинні) коливання. У випадку, коли відношення частот зазначених коливань відрізнятимуться приблизно у два рази, то хитна пружина буде у стані *резонансу*.

В роботах [1, 56] наведено велику кількість можливих впроваджень ідеї коливань хитної пружини. Наприклад, коливання хитних пружин мають безпосереднє відношення до багатьох механічних динамічних систем. Були виявлені ефекти порушення стійкості й керованості швидкохідних кораблів у процесі розрахунків їх динаміки в умовах несприятливих хвиль. За співвідношення 1:2 частот кормових і бокових коливань відбувається втрата динамічної стійкості [57]. Коливання хитних пружин допомагають дослідити і динаміку надзвукових літаків, коли виявляються ефекти порушення їх стійкості й керованості. Виявилось, що найбільш інтенсивне розгойдування бічних коливань має місце, коли коливання за кутом атаки відбуваються із частотою, удвічі більшою за частоту бічних коливань [3]. Ці приклади пояснюють, коли у рамках динамічної системи (корабель або літак) доцільно враховувати обмін енергією між її компонентами (подовжніми і поперечними коливаннями).

Видозмінена модель хитної пружини – модель гнучкої нитки – важливу роль відіграє у будівельній механіці. Адже гнучка нитка – це своєрідна пружина, що діє тільки на розтягнення. У типовій двовимірній моделі гнучка нитка одночасно може здійснювати поперечні коливання у своїй площині (аналог кутових коливань хитної пружини з вантажем) і маятникові коливання, що поєднують опорні закріплення (аналог вертикальних коливань) [59]. Прикладом є дроти високовольтних ліній, на стан яких впливають пориви вітру. В разі співвідношення частот 1:2 за-

значених коливань відбувається втрата динамічної стійкості, й тоді виникають поперечні коливання нитки, амплітуда яких може досягати досить великих значень. Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати при розрахунку різноманітних конструкцій будівельної механіки (вісячих мостів, вантово-балкових систем, канатних доріг, ліній електропередачі, різноманітних антен тросових систем для утримання об'єктів, гнучких шлангів тощо).

Зрозуміло, що стан *резонансу* хитної пружини має відбуватися у випадку певної комбінації значень параметрів хитної пружини. А саме, коли період вертикальних коливань буде приблизно удвічі меншим за період

горизонтальних коливань: $2T_Y = T_X$, де $T_X = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $T_Y = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$.

Тут m – маса вантажу, k – жорсткість пружини, h – довжина пружини у ненавантаженому стані, g – прискорення земного тяжіння.

Крім умов резонансу, існує ще одна можливість охарактеризувати хитну пружину. А саме, виділити *періодичні траєкторії* з можливих рухів під час коливань вантажу хитної пружини [59]. Для цього необхідно виявити закономірності утворення періодичних траєкторій залежно від параметрів хитної пружини. А також класифікувати одержані періодичні траєкторії за типом схем механічних пристроїв, що їх утворюють. І кожній періодичній траєкторії бажано поставити у відповідність певне число, яке б характеризувало її геометричну форму. Крім того, важливими будуть дослідження різновидів конструкцій, до складу яких входять хитні пружини.

Отже, доцільними будуть дослідження, спрямовані на геометричне моделювання періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини, а також різновидів конструкцій хитних пружин.

Способи одержання розв'язку динамічної системи, в основі якої знаходяться ідеї хитної пружини, звичайно використовують координати, які визначають рух пружини і маятника. При цьому передбачається можливість запису гамільтоніана у вигляді суми трьох членів, що відповідають енергіям, пов'язаним із рухами: пружини, маятника й компонента їхнього зв'язку. У результаті з'являється можливість з'ясувати, як енергія розподіляється між розглянутими трьома енергетичними величинами. Також з'являється можливість визначити, як розподіл енергії змінюється відповідно до повної енергії й керуючого параметра, що являє собою відношення частот простого маятника та маси пружини. За допомогою отриманих аналітичних виразів аналізується обмін енергією для окремих траєкторій. Також одержують глобальні характеристики розподілу енергії хитної пружини шляхом обчислення просторових і середніх за часом компонентів енергії для великої кількості траєкторій (періодичних, квазіперіодичних і хаотичних) на всьому протязі фазового простору.

У роботі [14] вивчаються зміни в поведінці хитної пружини, коли під контролем параметра один відгук стає нестійким і замінюється іншим. Вибірка Пуанкаре використовується для зведення проблеми опису стійкості граничного циклу до більш простої задачі визначення стійкості нерухомої точки відображенням Пуанкаре. В роботі [5] досліджено вплив амплітуди та частоти базового руху на періодичну реакцію системи й аналізуються біфуркаційні характеристики періодичного розв'язку. Установлено, що біфуркація Хопфа може відбуватися в періодичному відгуку системи, що відповідає деяким базовим частотам і амплітуді. Методи теорії нелінійних нормальних форм коливань дозволили дослідити динаміку маятника не тільки для малих, але і для значних амплітуд коливань.

В роботі [60] проведено експериментальні спостереження й наведено прості пояснення руху вантажу пружини, у тому числі добре відомий випадок, коли частота коливань у вертикальному напрямку удвічі більше, ніж для руху маятника. Наведено теоретичне дослідження плоских малих нелінійних коливань хитної пружини з нелінійною залежністю натягу пружини від її подовження. Використовується метод гамільтонової нормальної форми. Розв'язки гамільтонових рівнянь нормальної форми показали, що періодична перебудова коливань між вертикальною й горизонтальною модами відбувається тільки у випадку резонансів 1:1 і 2:1. У всіх інших випадках, як за наявності резонансу, так і за його відсутності, коливання відбуваються із двома постійними частотами. В роботі [20] перетікання енергії між подовжними і маятниковими коливаннями розглядається як пульсація. Пульсація і ступінчаста прецесія є характерними особливостями динаміки хитної пружини. Для визначення повного аналітичного рішення використано гамільтонову редукцію.

У статті [61] хитний маятник описано як механічну систему із двома ступенями свободи. Для цього з використанням рівнянь Якобі – Леві – Чивіти складено та чисельно розв'язано скалярне диференціальне рівняння. В роботі [62] досліджено періодичний процес перекачування енергії хитної пружини від однієї моди до іншої. Знайдений аналітичний опис із високою точністю відображає процес при будь-яких початкових відхиленнях маятника. Проведено порівняння даного алгоритму з алгоритмами класичного методу нормальної форми. У роботі [17] показано, що інтегральне наближення просторової хитної пружини, налаштованої на резонанс 1:1:2, має монохромію, а ступінчастий кут прецесії площини коливання резонансного пружинного маятника є числом обертання інтегрального наближення.

В роботі [9] коливання хитної пружини аналізуються з позицій енергообміну в рамках параметричного механізму. Зокрема хитна пружина із двома ступенями свободи є автопараметричною системою, що являє собою основу для вивчення нелінійних зв'язаних систем. В роботі [63] використовується інваріантна нормальна форма, яка дозволила у

рамках єдиного підходу не розділяти коливання хитної пружини на випадки автономні – неавтономні, чи резонансні – нерезонансні. Робота [64] присвячена дослідженню зв'язку можливої траєкторії вантажу хитної пружини з фігурами Ліссажу.

Але ці глибокі теоретичні роботи часто не дають чітких алгоритмів побудови нехаотичних періодичних траєкторій вантажу хитної пружини. Для інженерної практики, крім теоретичних досліджень, необхідні способи побудови реальних нехаотичних *періодичних* траєкторій вантажів хитних пружин. Деякі з них описані в роботі [22], де наведено приклади періодичних траєкторій, а також в [23], де проведено дослідження умов побудови періодичних траєкторій. У роботі [65] наведено приклади періодичних траєкторій хитних пружин. В роботі [66] подано приклад побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини. В роботі [67] описано динаміку хитної пружини двома різними способами: за допомогою рівнянь Лагранжа й застосуванням другого закону Ньютона.

У роботі [68] наведено велику кількість періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. При цьому вивчаються рухи пружинного маятника в залежності від двох його параметрів управління (відношення частот пружини і маятника). Показано, що в межах дуже малих і дуже великих значень параметрів траєкторія вантажу пружинного маятника переважно регулюється, а зміни параметрів більшості початкових умов приводять до хаотичних траєкторій.

В роботі [26] наведено *maple*-програму побудови траєкторії вантажу хитної пружини. В роботі [69] наведено спосіб побудови зазначених траєкторій. У праці [70] на основі складеної програми проілюстровано параметричний резонанс хитної пружини, який проявляється в передачі енергії від вертикальних коливань вантажу до горизонтальних і навпаки. Показано, що швидкість і амплітуда передачі енергії істотно залежать від початкових умов.

В результаті огляду літературних джерел були виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, зокрема стосовно розробки універсального способу побудови періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини та класифікації цих траєкторій залежно від основних параметрів хитної пружини.

1.4 Спосіб проєкційного фокусування для визначення періодичних траєкторій вантажів хитних пружин

В якості огляду відомих результатів наведемо спосіб визначення параметрів для забезпечення нехаотичних коливань елементів маятникових систем шляхом наближеного розв'язання диференціальних рівнянь (частіше – системи рівнянь) Лагранжа другого роду з використанням фазової площини. Згідно з цим розв'язок рівняння має вигляд елемента сім'ї інтегральних кривих у фазовому просторі функції, що визначає одну з

узагальнених змінних задачі. При цьому конкретний елемент сім'ї маємо залежно від вибору початкових умов інтегрування диференціального рівняння. Оскільки робота присвячена консервативним коливальним системам, то розглянуто геометричні форми інтегральних кривих і фазових траєкторій, типових для цього випадку.

Головна ідея способу, запропонованого О.М. Семківим [55], полягає в наступному. Чисельно розв'яжемо диференціальні рівняння Лагранжа другого роду та побудуємо наближене зображення інтегральної кривої у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ узагальненої змінної u (як приклад). Зображення складатиметься із множини відрізків, що з'єднують послідовні точки, одержані в результаті наближеного розв'язання рівняння. Це унаочнення залежатиме від певного значення «керуючого» параметра задачі або значення початкової умови (позначимо його як p). При випадкових значеннях p у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ утвориться «плутана» інтегральна крива, проєкція якої на фазову площину $\{u, Du\}$ також буде «плутаною» фазовою траєкторією (рис. 1.1, а). Це призводить до хаотичних коливань елемента маятника. У разі зміни значень «керуючого» параметра p має змінюватися і характер фазової траєкторії.

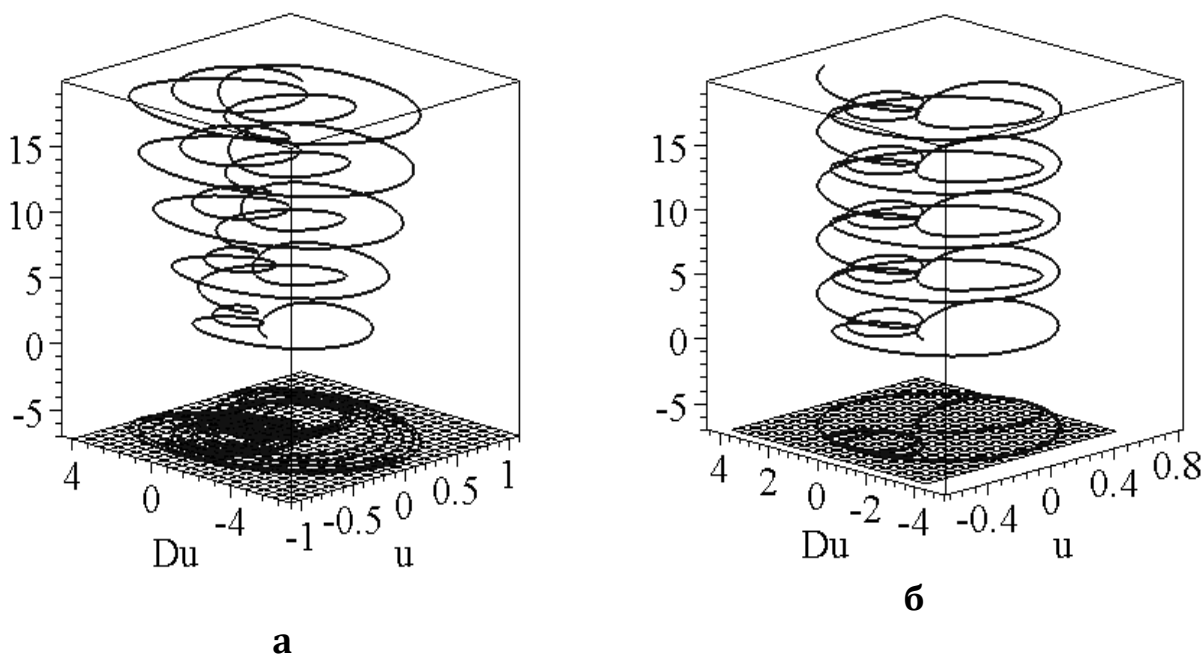


Рис. 1.1 – Інтегральні криві та фазові траєкторії для:

а) випадкового значення p ; б) обчисленого значення $p=p_0$

За критичного значення $p = p_0$ характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – перетвориться у «сфокусовану» криву (рис. 1.1, б). На фазовій площині $\{u, Du\}$ ніби відбудеться оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій (далі це названо

проекційним фокусуванням). Урахування значення параметра $p = p_0$ у процесі розв'язання рівняння Лагранжа другого роду дозволяє обчислити координати точок, які мають розташуватися на нехаотичній траєкторії сліду маятника.

Отже, нехаотичні технологічні траєкторії коливання елемента маятничкової механічної системи проявляються на зображеннях фазових траєкторій у вигляді «сфокусованих» кривих. Інакше це можна сформулювати так: критичне значення параметра p одержимо в момент, коли зображення проекції інтегральної кривої на фазову площину (тобто фазової траєкторії) набуде мінімальної площі (у піксельному вимірі).

Для автоматизації пошуку критичного значення «керуючого» параметра C розглянемо поняття фокусування сім'ї кривих, описаної рівнянням $f(x, y, C) = 0$. Нехай зображення кривої побудовано за допомогою послідовності пікселів.

Визначення 1. Фокусуванням параметричної сім'ї кривих, описаної рівнянням $f(x, y, C) = 0$, називається процес визначення значення параметра C сім'ї, при якому зображення її елементів на координатній площині Oxy складатиметься з мінімальної кількості пікселів.

Приклад 1. Розглянемо сім'ю ліній, описану рівняннями:

$$x = \cos(2C + t) \sin(t + C); \quad y = 0,5 \sin(3 + tC) \cos(t - C), \quad (1.1)$$

де параметр C змінюється у межах $3,1 < C < 3,9$.

Складено програму визначення кількості пікселів, які утворюють зображення сім'ї ліній залежно від значення C . На рис. 1.2 наведено елементи сім'ї кривих для деяких C та графік залежності кількості пікселів від C .

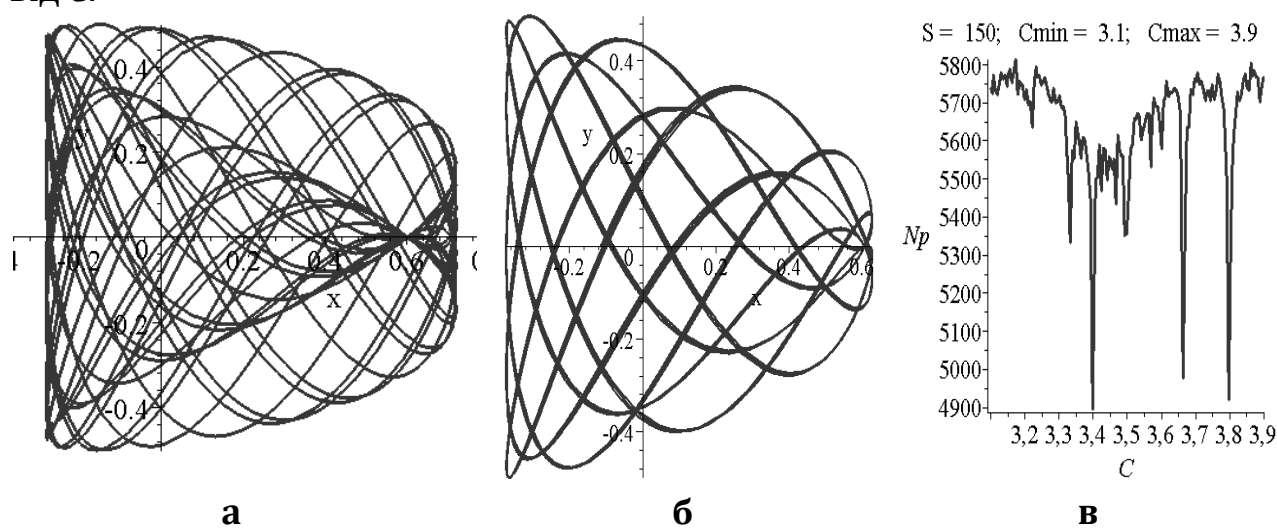


Рис. 1.2 – Елементи сім'ї (1) для випадкового значення C (а); для критичного значення $C = 3,3986$ (б); графік залежності кількості пікселів від C (в)

Визначення 2. Проекційним фокусуванням параметричної сім'ї кривих, описаної рівнянням $f(x, y, C) = 0$, називається процес визначення значення параметра C сім'ї, при якому зображення елементів її проекції на координатній площині Oxy матиме мінімальну площу (в піксельному вимірі).

Приклад 2. Розглянемо сім'ю ліній, описану рівняннями:

$$x = \exp(\cos(Ct)) + 5\sin^2(t + C); \quad y = \exp(\sin(Ct)) + 2,5\cos(t - C), \quad (1.2)$$

де параметр C змінюється у межах $2,2 < C < 4,5$.

За допомогою складеної програми можна визначати кількість пікселів, які входять до зображення сім'ї проекцій на площині Oxy залежно від значення параметра C . На рис. 1.3, а, б наведено елементи проекцій сім'ї кривих для випадкових значень C . На рис. 1.3, в зображено випадок для критичного значення.

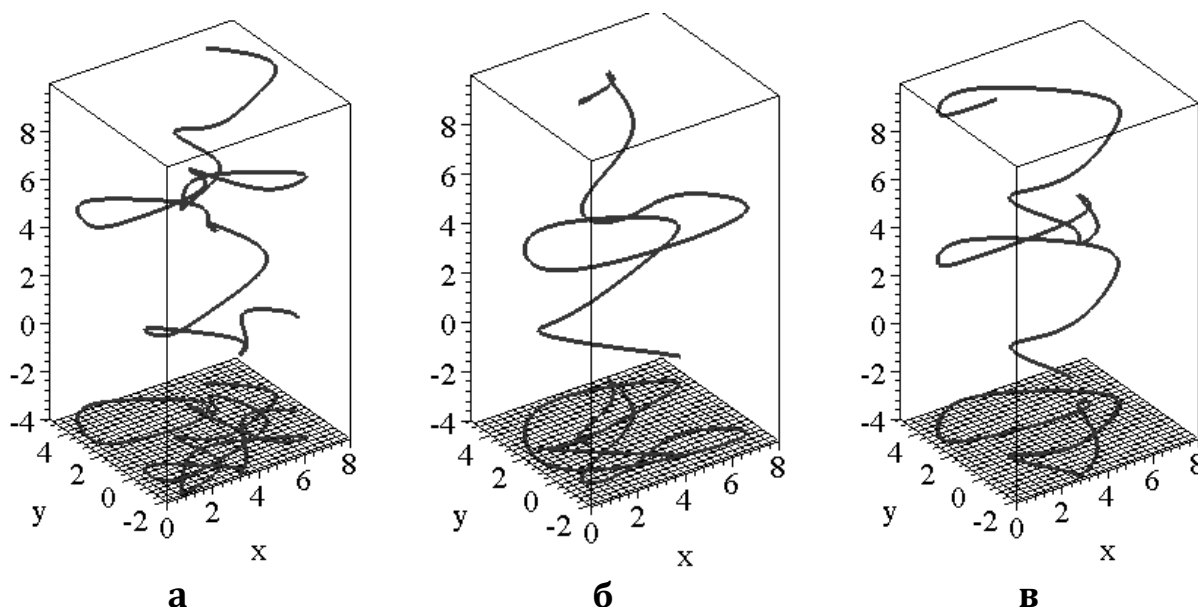


Рис. 1.3 – Елементи проекцій сім'ї кривих для випадкових значень C (а, б) та для критичного значення $C = 3$ (в)

Як тривіальний приклад у роботі розглянуто подвійний маятник, рівняння Лагранжа другого роду якого наведено в підручниках із теоретичної механіки. Позначимо через $u(t)$ і $v(t)$ кути між вертикаллю і першою та другою ланками.

Приклад 3. Визначити довжину першої ланки L_1 подвійного маятника, яка б забезпечила нехаотичну траєкторію коливань вантажу другої ланки з такими параметрами: $L_2 = 1$; $m_1 = 2$; $m_2 = 1$; $u_0 = 2p/3$; $Du_0 = 0$; $v_0 = p/3$; $Dv_0 = 0$.

На рис. 1.4, а зображено інтегральні криві та фазові траєкторії для обчисленого критичного значення $L_1 = 0,5375$ та вигляд початкового положення маятника і траєкторії коливань вантажу другої ланки маятника.

Отже, для ідеалізованих умов знайдено параметри подвійного маятника, які забезпечують його нехаотичні коливання. З використанням проєкційного фокусування можна визначити нехаотичні траєкторії коливання маятника з рухомою точкою підвісу, нехаотичні траєкторії коливання вантажу сферичного маятника, а також нехаотичні траєкторії коливань вантажу маятника Атвуда [89–99].

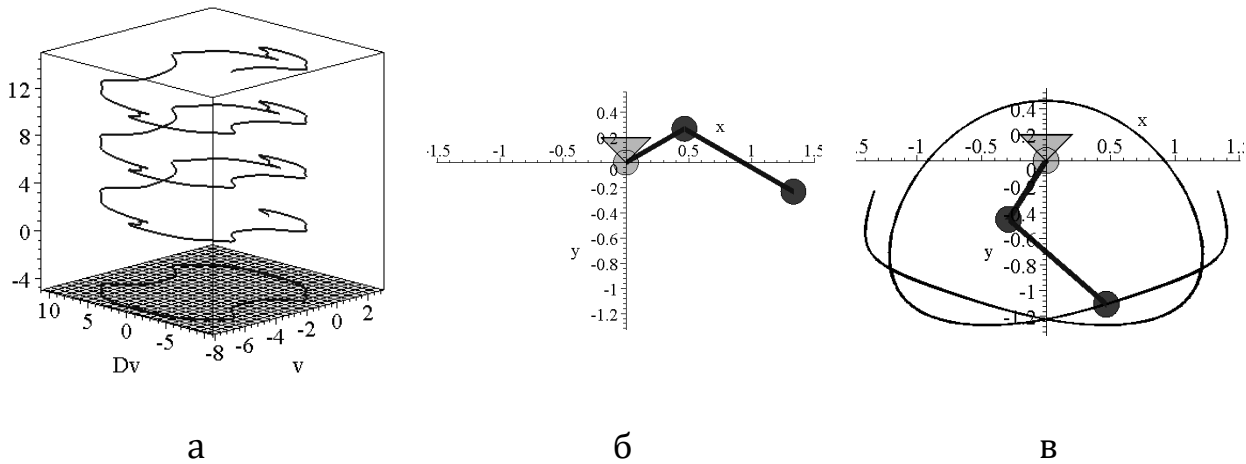


Рис. 1.4 – Фазові траєкторії для критичного значення $L_1 = 0,5375$ (а), початкове положення маятника (б) та траєкторії коливань вантажу другої ланки маятника (в)

Отже, в роботах [89–99] наведено спосіб визначення параметрів для забезпечення нехаотичних коливань елементів маятникових систем. Спосіб полягає у наближеному розв'язанні диференціальних рівнянь (частіше – системи рівнянь) Лагранжа другого роду з подальшим використанням графічних побудов на фазовій площині.

РОЗДІЛ 2

РОЗРАХУНОК ПЕРІОДИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ ПЕРЕМІЩЕННЯ ВАНТАЖУ ХИТНОЇ ПРУЖИНИ З РУХОМОЮ ТОЧКОЮ ПІДВІСУ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЇЇ КОЛИВАНЬ

Розглянуто випадки руху вантажу хитної пружини, коли задано функцію $x = f(t)$ опису коливання точки підвісу уздовж осей Ox . Одержано координати рухомого точкового вантажу. Визначено лагранжіан як різницю кінетичної та потенційної енергій. Складено систему рівнянь Лагранжа другого роду відносно функцій - узагальнених координат. Для прикладу було визначено значення маси, яка б періодично рухалася б по траєкторії переміщення вантажу хитної пружини заданих жорсткості й довжини у ненавантаженому стані. Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь Лагранжа другого роду із заданими початковими умовами. В результаті виконання наведених вище дій знайдемо наближене зображення на площині траєкторії руху вантажу.

Проведені дослідження дозволили скласти таблицю геометричних форм періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини залежно від її параметрів. При цьому вдалося систематизувати коливання хитних пружин. Для цього було визначено значення жорсткості пружини, яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу заданих маси хитної пружини та її довжини у ненавантаженому стані. В результаті обчислень одержано миттєві положення хитної пружини і періодичні траєкторії руху вантажу заданої маси залежно від значень коефіцієнта жорсткості.

Наведено класифікацію періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Складено таблицю, де наведено значення відношення горизонтальних періодів коливань до вертикальних залежно від геометричної форми траєкторій руху для періодичних траєкторій. Також наведено значення мас вантажів для відповідних значень коефіцієнта жорсткості.

2.1 Хитна пружина (swinging spring) як механічна модель складних процесів у природі й техніці

Для пояснення складних процесів, що відбуваються у природі, часто застосовують наочні механічні інтерпретації. Зокрема для коливальних процесів як моделі використовують маятникові аналоги. Класичним прикладом вважається модель оберненого маятника з вібруючою точкою кріплення. Фізичну модель цього маятника покладено в основу теорії динамічної стабілізації. Ключова ідея теорії полягає у необхідності розділяти рух на «швидкі» й «повільні» складові, що знайшло відображення у понятті ефективного потенціалу. За допомогою методу ефективного потенціалу пояснено принцип стійкості високочастотного генератора «ніготронома» [2]. До речі, для того щоб не виникало проблем із секретністю під час публікації методу, було залучено фізичну модель маятника

з вібруючим підвісом, яка б ілюструвала принцип стійкості генератора. Цим самим було розпочате математичне дослідження маятника з вібруючим підвісом.

Не менш вражаючі механічні інтерпретації пов'язані з іншим видом маятника. В ідеалізованому вигляді маятник має вигляд вертикально підвішеної невагомої пружини, до кінця якої прикріплено точковий вантаж. Пружина, крім подовжніх коливань, здійснює коливання подібно до маятника у вертикальній площині, зберігаючи при цьому прямолінійність своєї осі. Помічено, що якщо вантаж одночасно здійснює коливання уздовж осі пружини і маятникові коливання, то зазначена дія відкриває феномен коливань пружини із зовсім несподіваної сторони. У поведженні такої коливальної системи були виявлені цікаві та глибокі фізичні закономірності [3].

Модель пружини, що коливається подібно до маятника – в літературі її називають хитною пружиною (swinging spring) – знаходить широке застосування як механічна модель більш складних процесів у природі й техніці. Мова йде про процеси із внутрішніми нелінійно пов'язаними системами надання різних коливальних компонентів. При цьому, що істотно, складові компоненти системи обмінюються енергією між собою. У роботі [1] представлено аналіз таких енергетичних обмінів, з метою з'ясування того, як це залежить від параметрів керування системою. Для ілюстрації автори використовують хитну пружину як парадигму для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Для хитної пружини ідентифікуються три енергетичні компоненти, схожі на рухи пружини, маятника, а також зв'язку між ними. Представлена процедура може бути застосована, у принципі, до довільних нелінійних зв'язаних систем, щоб показати, як зв'язок опосередковує внутрішні енергетичні обміни і як розподіл енергії змінюється відповідно до параметрів системи.

Особливість феномена хитної пружини проілюструємо графічно. Для цього порівнюємо траєкторії переміщення точкового вантажу у двох випадках – хитної пружини (рис. 2.1, а) й параметричного маятника (рис. 2.1, б).

Для параметричного маятника вплив параметра проявляється у зміні довжини маятника, який здійснюється завдяки зовнішньому джерелу енергії. При цьому цікавим є випадок, коли у нижнім положенні довжину трохи збільшувати, а у крайніх положеннях її дещо скорочувати. Тоді максимальне розгойдування досягатиметься у випадку, коли частота зміни параметра системи (довжини підвісу) у два рази перевищуватиме власну частоту коливань системи. Прикладом є коливання дитячих гойдалок. Для тривалої підтримки їхніх коливань необхідно швидко присідати в момент найбільшого відхилення гойдалок від положення рівноваги й також швидко вставати під час проходження нижнього положення.

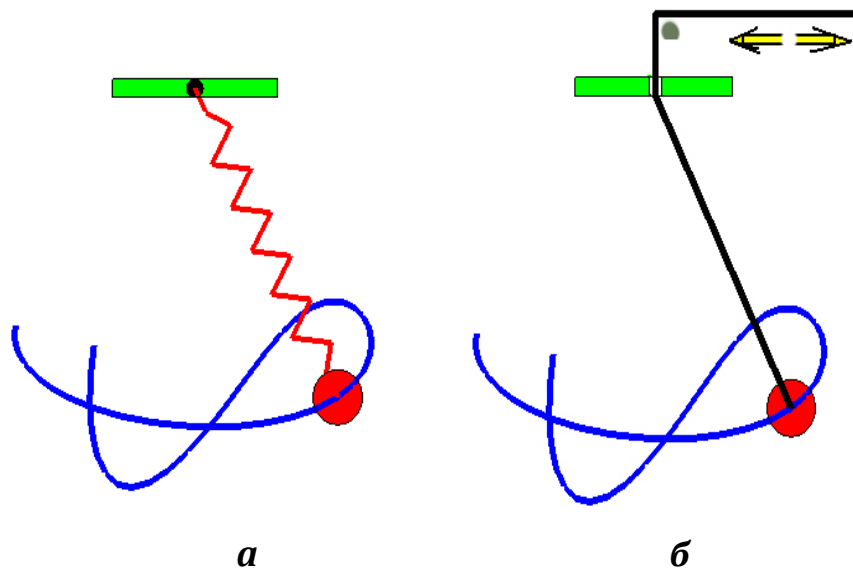


Рис. 2.1 – Аналогія між кутовими коливаннями:

а) хитної пружини; б) математичного параметричного маятника

Однак існує принципова відмінність між маятником «хитна пружина» і маятником «гойдалка». У хитній пружині відсутнє зовнішнє джерело енергії, і маятники такого виду повинні самі «забезпечувати» існування подібних коливань. З дослідів випливає, що наростання кутових коливань хитної пружини супроводжуються загасанням подовжніх коливань. Потім відбувається зворотнє явище – розгойдування подовжніх коливань за рахунок зменшення енергії кутових коливань. Далі весь процес постійно повторюється. Повторюване послідовне перекачування енергії від одних коливань до інших відбувається доти, поки всі коливання не загаснуть через тертя.

Нелінійні зв'язані системи із взаємодіючими підсистемами наявні в багатьох галузях – від фізики й техніки до біології та соціальних наук. Приклади зв'язаних систем містять у собі хвильове об'єднання у фізиці плазми, накачки лазерів, біологічних осциляторних мережах, нейронних мережах і генетичних ланцюгах (відповідні посилання на літературу наведено в роботі [1]).

2.2 Побудова періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини з рухомою точкою підвісу

Наведемо спосіб визначення набору параметрів для забезпечення умовно періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення, а також побудуємо фазові траєкторії функцій узагальнених координат хитної пружини (значень кутів відхилення осі пружини від вертикалі та подовження) з метою оцінки діапазону змін зазначених величин та їх швидкостей. Слід розробити спосіб

комп'ютерного моделювання періодичної траєкторії переміщення точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення (підвісу).

Розглянемо розрахунок періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Для цього наведемо спосіб визначення траєкторії переміщення по вертикальній площині Oxy вантажу хитної пружини залежно від маси m вантажу, початкової довжини h пружини у ненавантаженому стані, жорсткості k пружини і початкових умов для виникнення коливань.

Задамо умови ідеалізації коливань хитної пружини:

- коливання здійснюються у вертикальній площині, якій належить точка кріплення (підвісу);
- маса вантажу зосереджена в одній точці, розташованій на осі пружини з незакріпленого кінця;
- пружина є невагомою і вісь пружини залишається прямолінійною у процесі коливань;
- опори у вузлах і опір повітря під час коливань відсутні;
- процес розсіювання енергії відбувається повільно в порівнянні з характерними масштабами часу (коливальна система є консервативною);
- параметри і початкові умови задаються в умовних числових одиницях.

Опис закону руху точки підвісу оберемо у вигляді функції $x = f(t)$. Зазначимо, що у випадку рухомої точки підвісу з причини суттєвої нелінійності коливальної системи можна очікувати не лише чітких періодичних траєкторій вантажу хитної пружини, а і умовно періодичних. Тобто таких траєкторій переміщення вантажу, які не виходитимуть за межі певної смуги на площині Oxy .

Для опису коливань хитної пружини в якості першої узагальненої координатної функції $u(t)$ оберемо значення кута, який вісь хитної пружини утворює з вертикальною віссю Oy . Другу узагальнену координатну функцію $v(t)$ пов'яжемо з подовжньою зміною пружини в часі; через h позначимо довжину хитної пружини в ненавантаженому стані (рис. 2.2).

В монографії розглянуто два випадки руху точки підвісу – уздовж осі Ox та уздовж осі Oy .

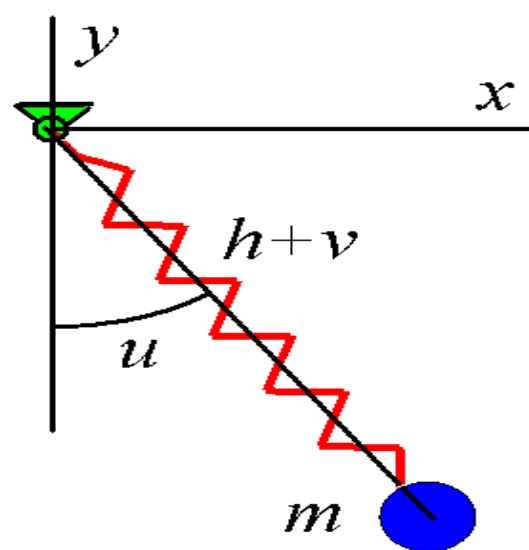


Рис. 2.2 – Схема хитної пружини

Випадок 1. Нехай точка підвісу хитної пружини рухається уздовж осі Ox за законом $x = f(t)$. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами:

$$x = (h + v)\sin u; y = -(h + v)\cos u. \quad (2.1)$$

Лагранжіан задамо як різницю кінетичної й потенційної енергій ($g = 9,81$):

$$L = 0,5m \left[\left(\frac{df}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + (h + v) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] + \\ + m \frac{df}{dt} \left(\frac{dv}{dt} \sin u + (h + v) \frac{du}{dt} \sin u \right) - 0,5kv^2 + mg(h + v)\cos u \quad (2.2)$$

Тоді систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d^2f}{dt^2} \sin u - (h + v) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + kv - g \cos u = 0; \quad (2.3)$$

$$(h + v) \frac{d^2u}{dt^2} - \left(\frac{df}{dt} \right)^2 \cos u + 2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \sin u = 0.$$

Приклад 1. Визначимо значення маси m , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю k та її довжиною h у ненавантаженому стані. У початковому положенні хитна пружина розташована вертикально, тобто $u(0) = 0$. Ініціювання коливань здійснюється за допомогою імпульсу, наданого вантажу пружини у напрямку осі Ox : $du(0) = 1$. Це значення можна характеризувати як початкову швидкість зміни в часі величини кута u . Початкові значення для параметра v подовження пружини мають вигляд $v(0) = 2$; $dv(0) = 0$. Нехай $k = 50$ і $h = 2$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $f(t) = \sin(2t)$. В якості керуючого параметра коливання хитної пружини оберемо значення маси m вантажу.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (2.3) із початковими умовами: $u(0) = 0$; $du(0) = 1$; $v(0) = 2$; $dv(0) = 0$. На рис. 2.3 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m = 5,142$. Час інтегрування $T = 16$.

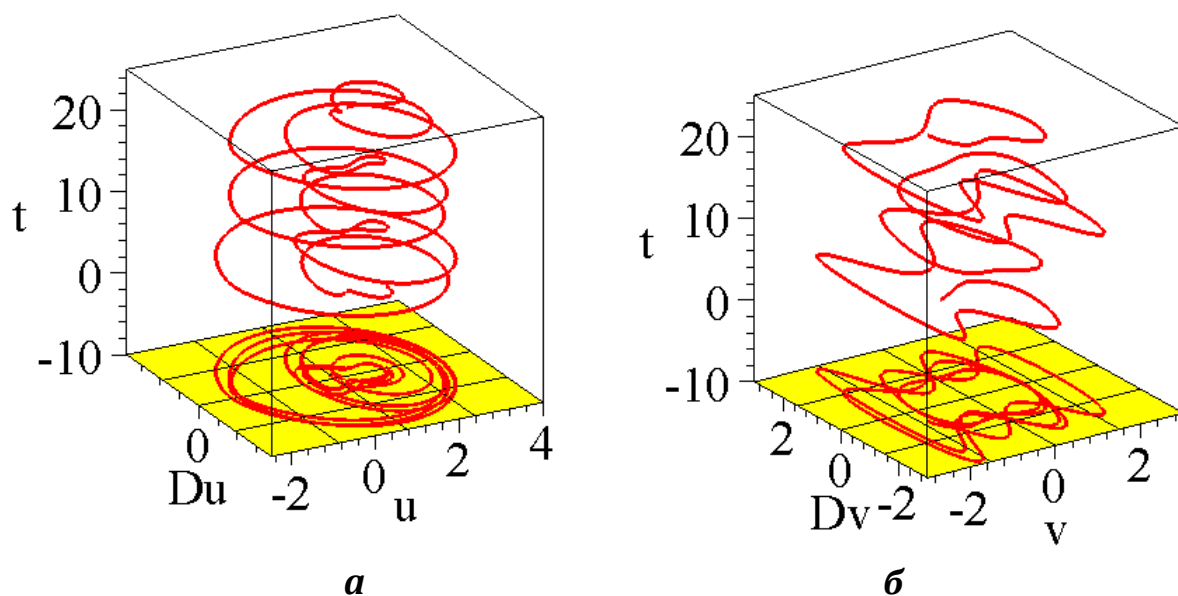


Рис. 2.3 – Інтегральні криві для критичного значення $m=5,142$ у фазових просторах:
 а) $\{u, Du, t\}$; б) $\{v, Dv, t\}$

На рис. 2.4 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін.

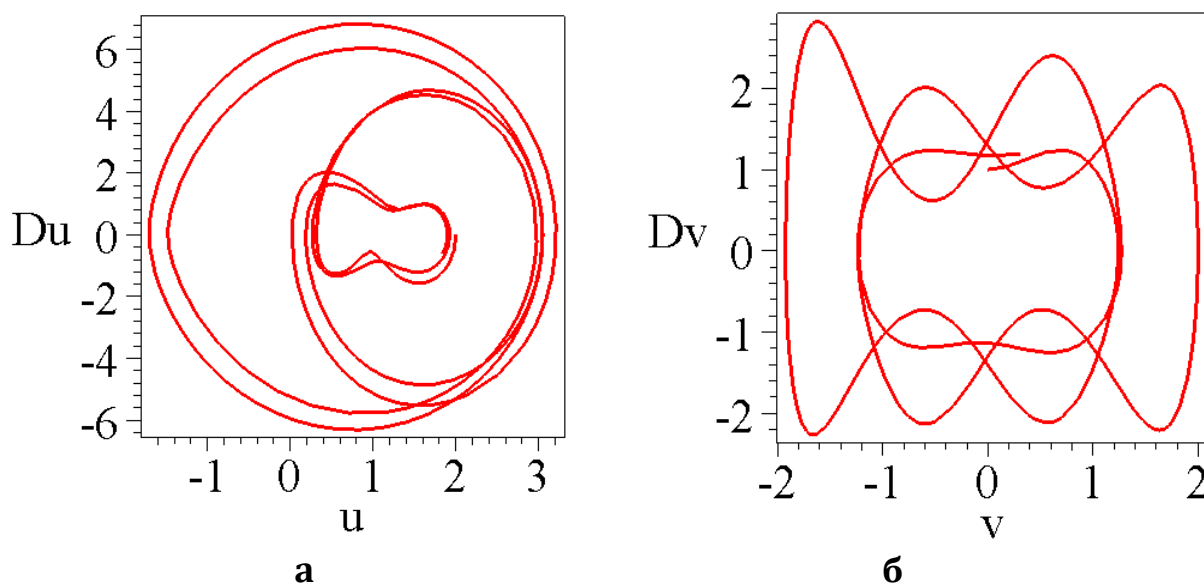


Рис. 2.4 – Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$:

а) координатної функції $u(t)$; б) координатної функції $v(t)$

Бачимо, що фазові траєкторії не вдається «сфокусувати» як у попередніх прикладах. Тому для коректності одержані далі траєкторії руху вантажу хитної пружини вважатимемо умовно періодичними.

Для підтвердження значення $m = 5,142$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 2.5). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається за критичного значення керуючого параметра $m_0 = 5,142$.

Після обчислення $m_0 = 5,142$ необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (2.3) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t = t_i$ (де $i = 1 \dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у виразі (2.1) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно з'єднати ламаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для випадку 1 (рис. 2.6). Оскільки фазові траєкторії не вдалося «сфокусувати» як у попередніх прикладах, то одержану траєкторію руху вантажу хитної пружини будемо вважати умовно періодичною. Зоровий аналізатор підтверджує природність коливань хитної пружини з рухомою точкою підвісу, в чому можна перекопатися з комп'ютерних анімацій на сайті [32].

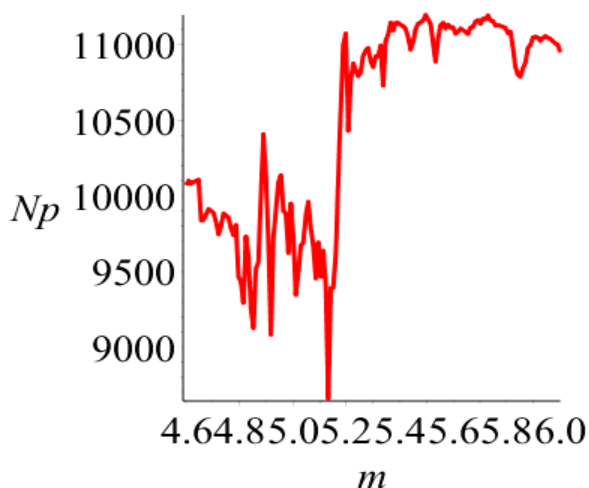


Рис. 2.5 — . Графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення m

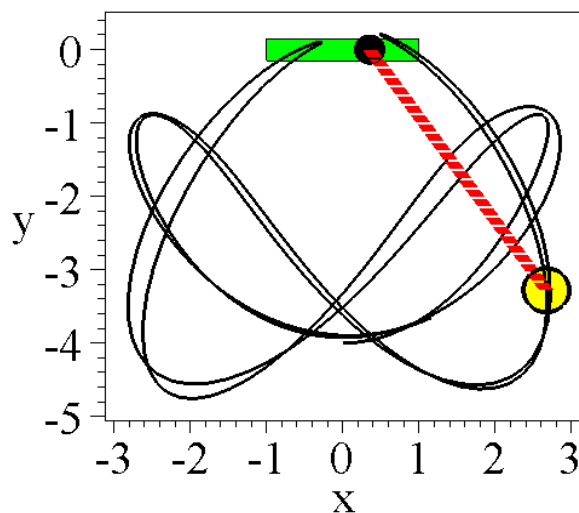


Рис. 2.6 — Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 1

Приклад 2. Змінимо напрямок дії імпульсу ініціювання руху хитної пружини на протилежний, тобто оберемо $du(0) = -1$. Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (2.3) з початковими умовами $u(0) = 0$; $du(0) = -1$; $v(0) = 2$; $dv(0) = 0$.

На рис. 2.7 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m=16,571$. Час інтегрування $T=16,7$. На рис. 2.8 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін.

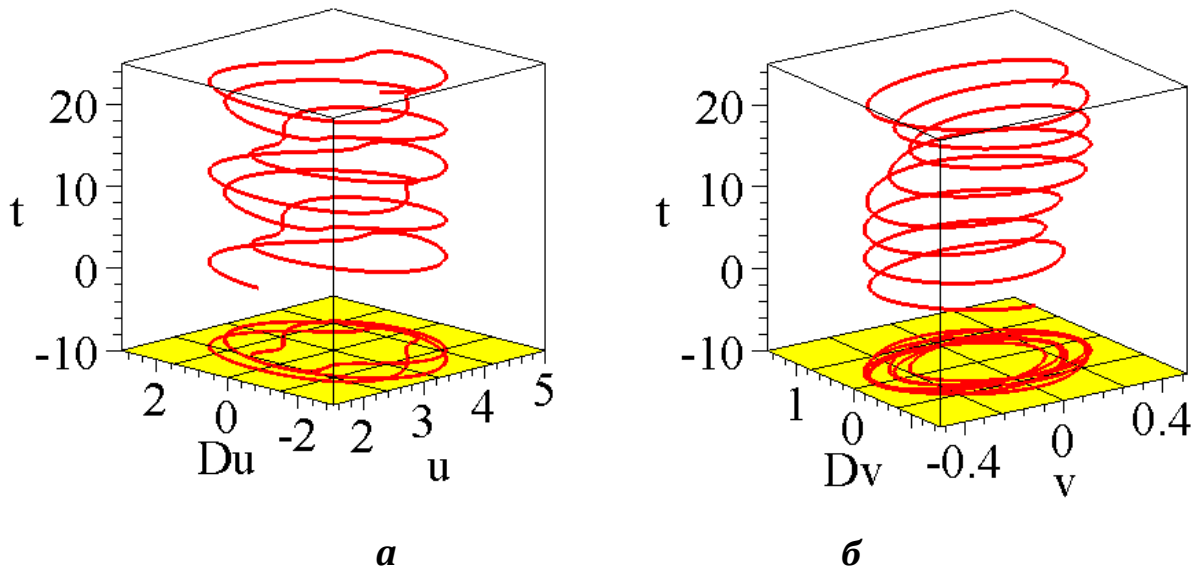


Рис. 2.7 – Інтегральні криві для критичного значення $m=16,571$ у фазових просторах:
а) – $\{u, Du, t\}$; б) – $\{v, Dv, t\}$

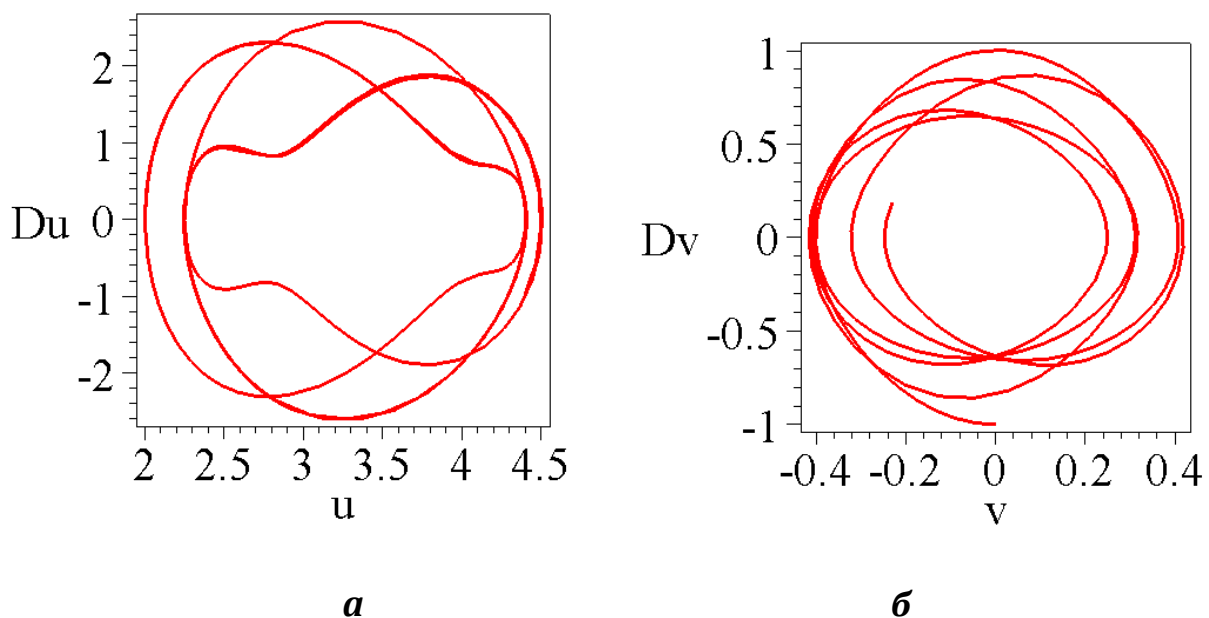


Рис. 2.8 – Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$:

а) координатної функції $u(t)$; б) координатної функції $v(t)$

Для підтвердження значення $m=16,571$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 2.9). Мінімальна

кількість пікселів зображення досягається за критичного значення керуючого параметра $m_0 = 16,571$.

Після обчислення $m_0 = 16,571$ необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (2.3) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t = t_i$ (де $i = 1 \dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у вирази (2.1) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно з'єднати ламаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для випадку 1 (рис. 2.10).

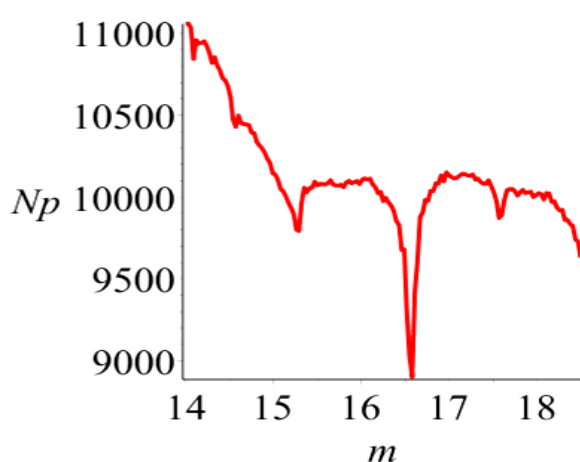


Рис. 2.9 — Графік залежності кількості пікселів Np зображення фазової траєкторії від значення m

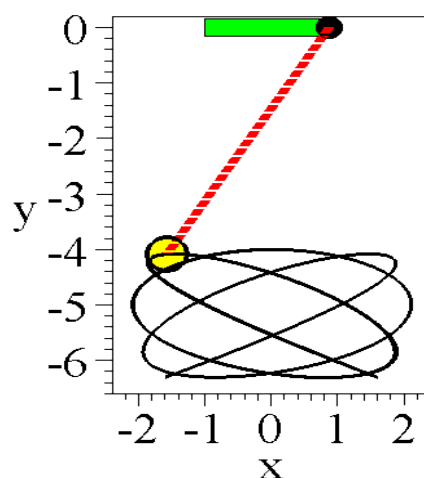


Рис. 2.10 — Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 2

Таким чином, можна констатувати, що, змінюючи напрямок дії імпульсу ініціювання руху хитної пружини з $du(0) = 1$ на протилежний $du(0) = -1$, можна одержати періодичну або умовно періодичну траєкторію.

Випадок 2. Нехай точка підвісу хитної пружини рухається уздовж осі Oy за законом $y = f(t)$. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами (2.1). Лагранжیان задамо як різницю кінетичної й потенційної енергій ($g = 9,81$):

$$L = 0,5m \left(\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + v^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right) -$$

$$-0,5k(v-h)^2 - m \left(g + \frac{d^2 f}{dt^2} \right) v \cos u$$
(2.4)

Систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$2m \frac{d^2 v}{dt^2} + m \frac{d^2 f}{dt^2} \cos u - 2mv \left(\frac{du}{dt} \right)^2 +$$

$$+k(v-h) + mg \cos u = 0;$$
(2.5)

$$-2v \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d^2 f}{dt^2} \sin u - 4 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \sin u = 0.$$

Визначимо значення маси m , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю k та її довжиною h у ненавантаженому стані.

Приклад 3. Нехай початкове положення хитної пружини визначається кутом $-\pi/4$, тобто $u(0) = -\pi/4$. Швидкість зміни величини кута $du(0) = 0$. Початкові значення для параметра v подовження пружини мають вигляд $v(0) = 2$; $dv(0) = 0$. Оберемо $k = 450$ і $h = 2,5$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $y = 0,5 \cos(4t)$. Як керуючий параметр коливання хитної пружини оберемо значення маси m вантажу.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (2.5) із початковими умовами $u(0) = -\pi/4$; $du(0) = 0$; $v(0) = 2$; $dv(0) = 0$. На рис. 2.11 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m = 22,57$.

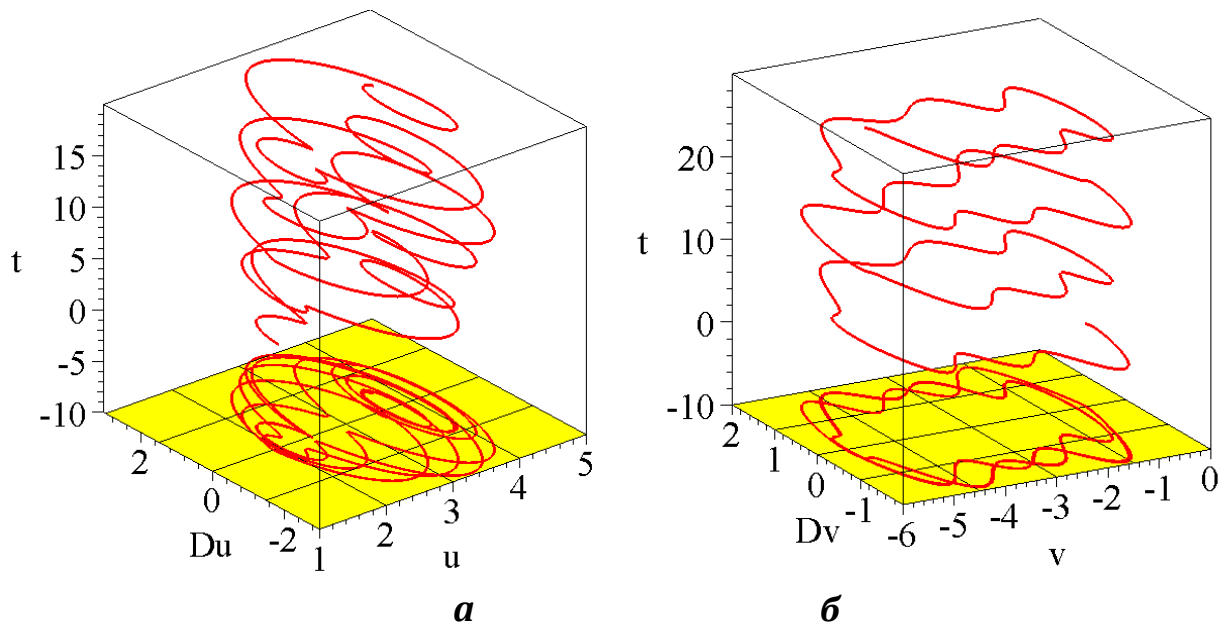


Рис. 2.11 – Інтегральні криві для критичного значення $m=22,57$ у фазових просторах:

а) $\{u, Du, t\}$; б) $\{v, Dv, t\}$

Час інтегрування $T=17,2$. На рис. 2.12 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін. Фазові траєкторії не вдається «сфокусувати» як у попередніх прикладах. Тому траєкторію руху вантажу хитної пружини вважатимемо умовно періодичною.

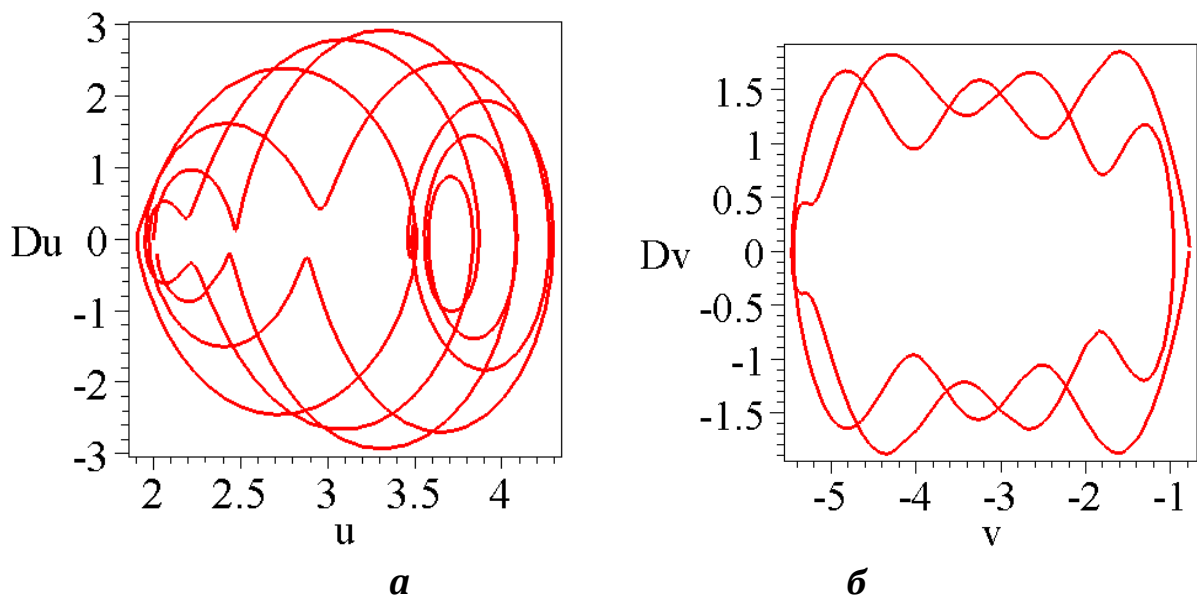


Рис. 2.12 – Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$:

а) координатної функції $u(t)$; б) координатної функції $v(t)$

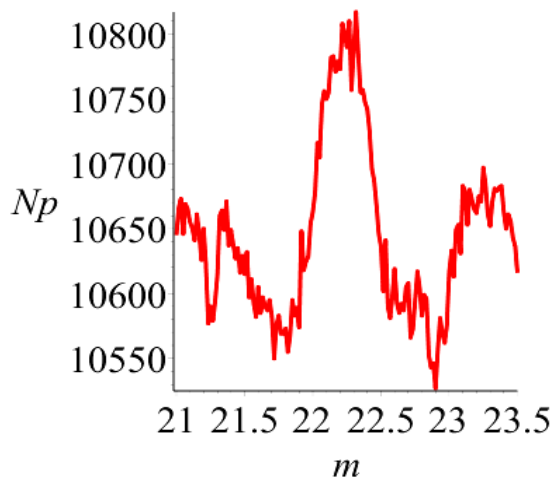


Рис. 2.13 – Графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення m

Для підтвердження значення $m = 22,57$ скористаємося графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 2.13). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається за критичного значення керуючого параметра $m_0 = 22,57$.

Після обчислення $m_0 = 22,57$ необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (2.5) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i) при $t = t_i$ (де $i = 1 \dots S$). Для

побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у вирази (2.1) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно з'єднати ламаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для випадку 2 (рис. 2.14).

Приклад 4. Розглянемо другий варіант, коли у початковому положенні хитна пружина розташована під кутом $\pi/3$, тобто $u(0) = \pi/3$. Швидкість зміни кута $du(0) = 0$. Початкові значення для параметра v подовження пружини мають вигляд $v(0) = 2$; $dv(0) = 0$. Нехай $k = 50$ і $h = 2,5$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $y = \cos(3t)$. Як керуючий параметр колювання хитної пружини оберемо значення маси m вантажу.

Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (2.5) із початковими умовами $u(0) = \pi/3$; $du(0) = 1$; $v(0) = 2$; $dv(0) = 0$. На рис. 2.15 зображено інтегральні криві у фазових просторах $\{u, Du, t\}$ і $\{v, Dv, t\}$ для знайденого критичного значення $m = 5,7557$. Час інтегрування $T = 25,3$.

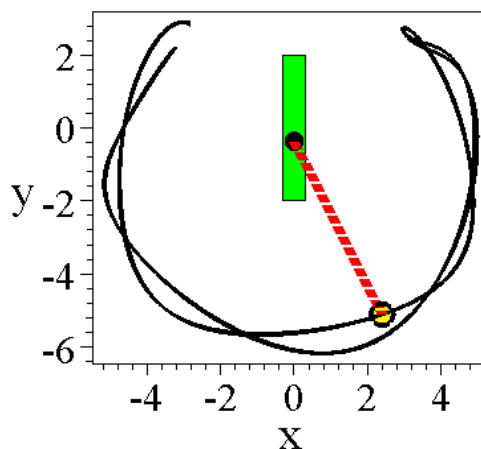


Рис. 2.14 – Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 3

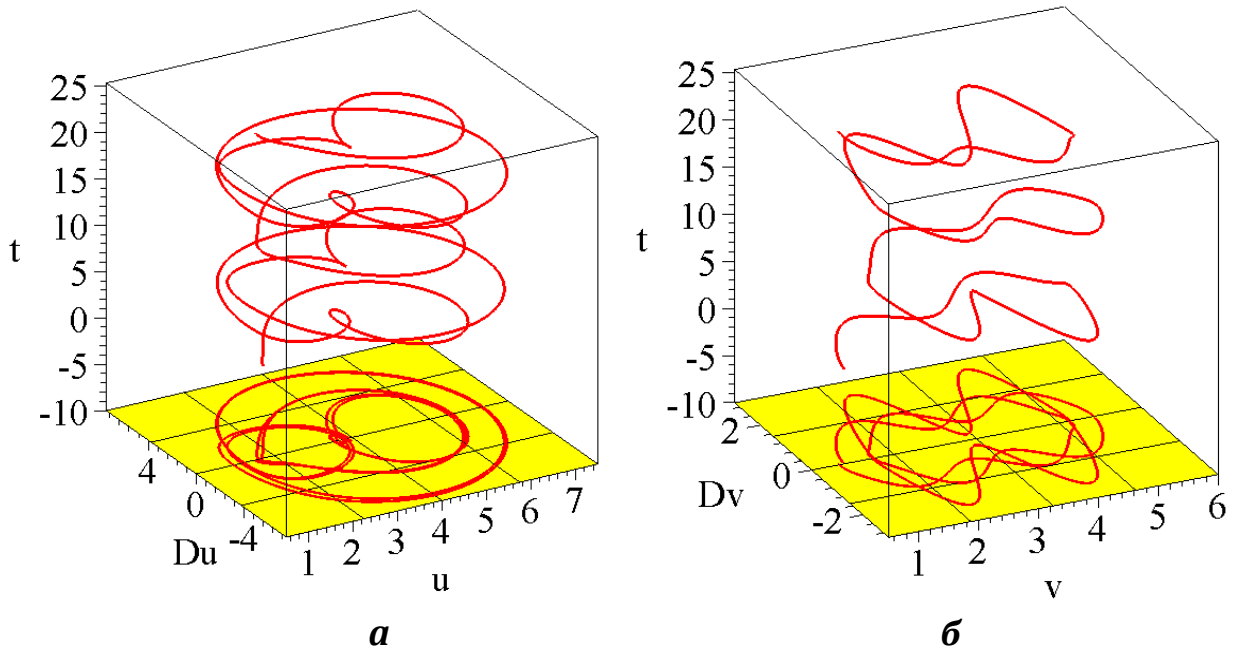


Рис. 2.15 – Інтегральні криві для критичного значення $m=5,7557$ у фазових просторах:
 а) $\{u, Du, t\}$; б) $\{v, Dv, t\}$

На рис. 2.16 наведено фазові траєкторії відповідних узагальнених координатних функцій, за допомогою яких можна визначити їх діапазони змін. Бачимо, що фазові траєкторії не вдається «сфокусувати» як у попередніх прикладах. Тому треба очікувати траєкторію руху вантажу хитної пружини умовно періодичною.

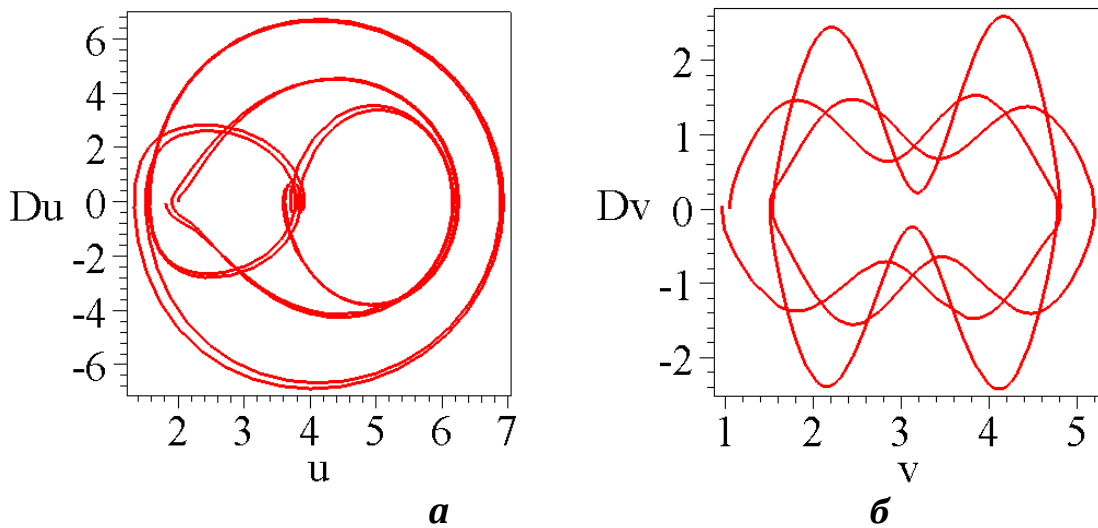


Рис. 2.16 – Фазові траєкторії на площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$:
 а) координатної функції $u(t)$; б) координатної функції $v(t)$

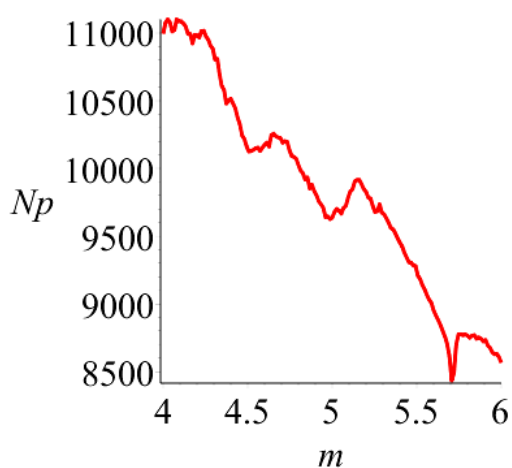


Рис. 2.17 — Графік залежності кількості пікселів N_p зображення фазової траєкторії від значення m

Для підтвердження значення $m = 5,7557$ можна скористатися графіком насиченості зображення лінії фазової траєкторії (рис. 2.17). Мінімальна кількість пікселів зображення досягається за критичного значення керуючого параметра $m_0 = 5,7557$.

Після обчислення $m_0 = 5,7557$ необхідно його значення підставити на місце m в систему рівнянь Лагранжа другого роду (2.5) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Одержимо послідовність значень (u_i, v_i)

при $t = t_i$ (де $i = 1 \dots S$). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині Oxy слід у виразі (2.1) віртуальних координат (x, y) підставити послідовність значень (u_i, v_i) . Одержані близькі точки необхідно з'єднати ламаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині Oxy періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для прикладу 4 (рис. 2.18).

Одержані у цьому і попередньому приклади умовно періодичні траєкторії можна пояснити суттєвою нелінійністю задачі про коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Залучаючи зоровий аналізатор у процесі унаочнення коливань, одержаних за допомогою комп'ютерної анімації, можна переконатися у природному характері коливань хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Підтвердження цього можна знайти на сайті [102], де наведені комп'ютерні анімації коливань різновидів хитних пружин.

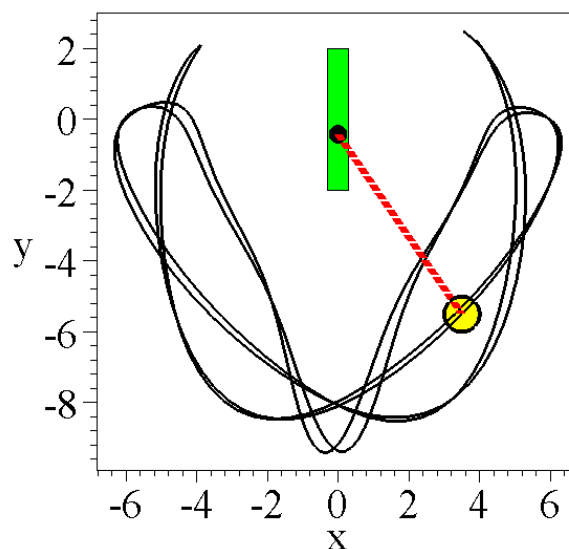


Рис. 2.18 — Траєкторія руху вантажу хитної пружини для прикладу 4

2.3 Визначення взаємного зв'язку значень параметрів для забезпечення періодичних траєкторій

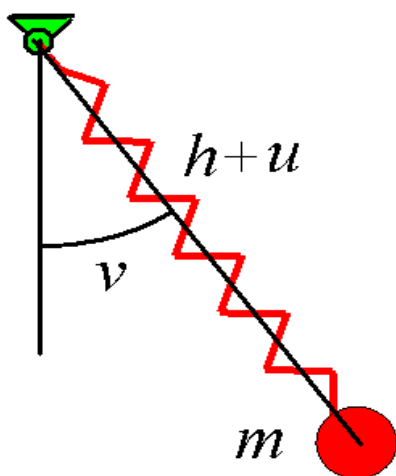


Рис. 2.19 — Схема хитної пружини

Визначимо траєкторії переміщення по вертикальній площині вантажу хитної пружини залежно від маси вантажу, початкової довжини пружини у ненавантаженому стані, жорсткості пружини і початкових умов для виникнення коливань. Схему хитної пружини зображено на рис. 2.19.

В якості першої узагальненої координатної функції $v(t)$ оберемо значення кута, який вісь пружини утворює з вертикальною віссю Oy . Другу узагальнену координатну функцію $u(t)$ пов'яжемо з подовженням пружини в часі; через h позначимо довжину пружини в ненавантаженому стані. Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами:

$$x = (h + u) \sin v; \quad y = -(h + u) \cos v. \quad (2.6)$$

Лагранжیان задамо як різницю кінетичної й потенційної енергій:

$$L = 0,5m \left(\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + (h + u) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right) - 0,5ku^2 - 9,81m(h + u)(1 - \cos v) - 9,81mu. \quad (2.7)$$

Для складання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду використаємо співвідношення (точка означає похідну за часом):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0. \quad (2.8)$$

В результаті систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$(u + h) \frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{du}{dt} + 9,81 \sin v = 0; \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} - (u + h) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{ku}{m} - 9,81 \cos v = 0.$$

Постановка задачі. Визначити значення жорсткості k пружини, яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу маси m хитної пружини довжиною h у ненавантаженому стані. У початковому положенні хитна пружина розташована вертикально, тобто $v(0) = 0$. Ініціювання коливань здійснюється за допомогою імпульсу, наданого вантажу пружини у напрямку осі Ox : $dv(0) = 0,5$. Величину $0,5$ можна характеризувати як початкову швидкість зміни в часі величини кута $v(t)$.

Застосовуючи алгоритми і складені програми розв'язуємо систему рівнянь (2.9) зі значеннями параметрів і з початковими умовами $v(0) = 0$; $dv(0) = 0,5$; $u(0) = 1$; $du(0) = 0$. В результаті розв'язання одержуємо інтегральні криві і фазові траєкторії. Фазові траєкторії характеризуються кількістю пікселів на їх зображеннях. На рис. 2.20 наведено графіки зміни кількості пікселів Np залежно від значення жорсткості k для «одиничних» значень $m = 1$ і $h = 1$. Одержано екстремальні локально мінімальні значення. Це дозволило (після уточнення) визначити шість головних критичних значень коефіцієнтів жорсткості k : 7,99; 9,55; 12,67; 18,12; 22,96; 28,84.

На рис. 2.21 наведено миттєві положення хитної пружини і періодичні траєкторії руху вантажу масою $m = 1$ залежно від значень коефіцієнта жорсткості k . Звернемо увагу, що зображення одержаних геометричних форм траєкторій руху вантажу відповідають локальним мінімумам кількостей пікселів на рис. 2.20. На сайтах [100,102] наведено анімації відповідних коливань.

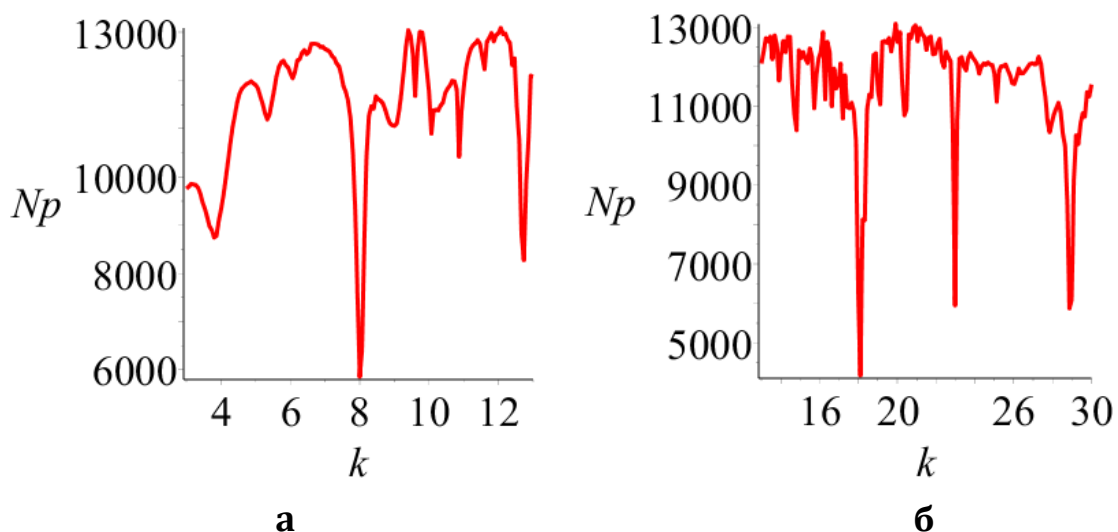


Рис. 2.20 — Графіки зміни кількості пікселів залежно від k для $m = 1$: а – у межах $3 < k < 13$; б – у межах $13 < k < 30$

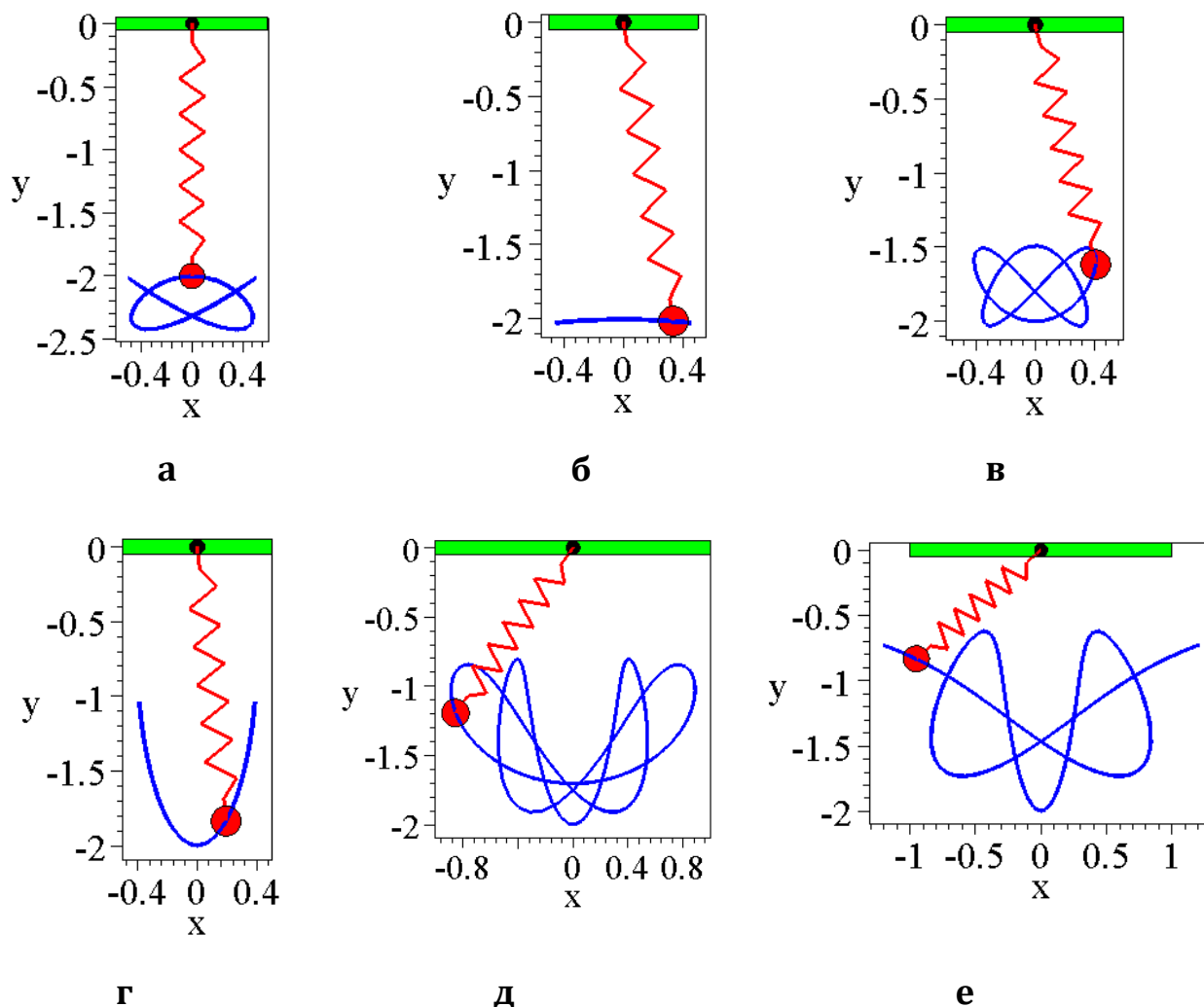
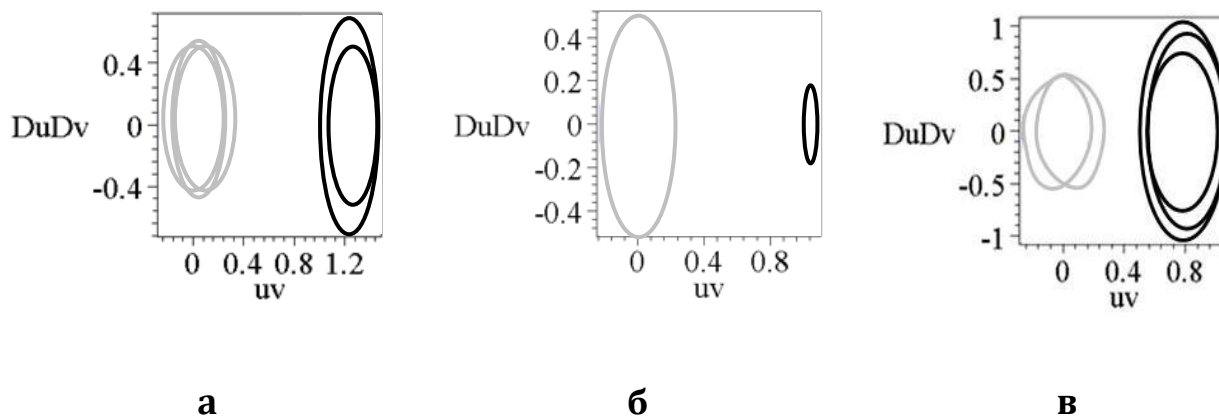


Рис. 2.21 – Періодичні траєкторії вантажу на пружині для:

а) $k=7,99$; б) $k=9,55$; в) $k=12,67$; г) $k=18,12$; д) $k=22,96$; е) $k=28,84$

На рис. 2.22 наведено зображення фазових траєкторій функцій узагальнених координат, відповідних періодичним траєкторіям рис. 2.21. Побудовані на координатних фазових площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$, які на рисунку зображено сумісно.

Чорним кольором позначено фазову траєкторію функції $u(t)$, а сірим – фазову траєкторію функції $v(t)$. Нагадаємо, що функція $u(t)$ описує довжину пружини, а функція $v(t)$ – кут відхилення пружини від вертикалі.



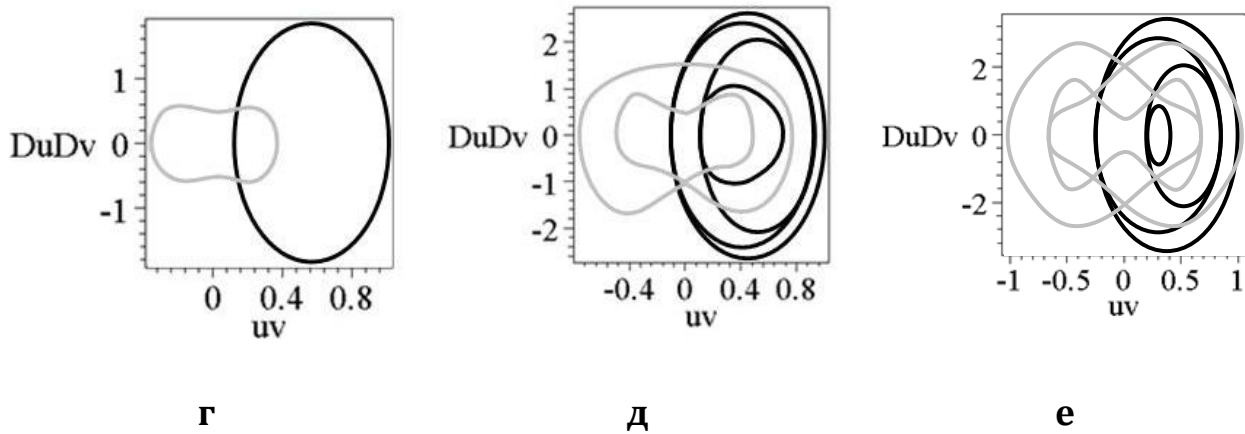


Рис. 2.22 – Фазові траєкторії на фазових площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$

Отже, за допомогою фазових траєкторій (рис. 2.22) можна визначити діапазони зміни функцій узагальнених координат, а також швидкості їх зміни. Фазові траєкторії на фазових площинах $\{u, Du\}$ і $\{v, Dv\}$ маємо для:

- $a - k=7,99; 1 < u(t) < 1,4; -0,6 < Du(t) < 0,6; -0,3 < v(t) < 0,3; -0,45 < Dv(t) < 0,45;$
- $б - k=9,55; 0,9 < u(t) < 1; -0,2 < Du(t) < 0,2; -0,3 < v(t) < 0,3; -0,44 < Dv(t) < 0,44;$
- $в - k=12,67; 0,6 < u(t) < 0,9; -1,1 < Du(t) < 1,1; -0,35 < v(t) < 3,5; -0,6 < Dv(t) < 0,6;$
- $г - k=18,12; 0,2 < u(t) < 1; -1,8 < Du(t) < 1,8; -0,4 < v(t) < 0,4; -0,5 < Dv(t) < 0,5;$
- $д - k=22,96; 0 < u(t) < 1; -2,5 < Du(t) < 2,5; -0,8 < v(t) < 0,8; -1,5 < Dv(t) < 1,5;$
- $е - k=28,84; 0 < u(t) < 1; -3 < Du(t) < 3; -1 < v(t) < 1; -2,5 < Dv(t) < 2,5.$

На наступному етапі виявимо пропорції між коефіцієнтом жорсткості пружини k і масою вантажу m , які б забезпечили *однакові* за геометричною формою траєкторії руху вантажів (довжина $h=1$ пружини у ненавантаженому стані є відомою). Для цього необхідно виразити величину маси вантажу m як функцію коефіцієнта жорсткості k . Початковими умовами ініціювання коливань задамо вертикальне положення підвішеної пружини $v(0)=0$, якій надано початкову кутову швидкість $Dv(0)=0,5$. Нехай $u(0)=1; du(0)=0$.

Періодичну траєкторію визначимо для змінної маси m , зафіксувавши значення жорсткості пружини. Використовуючи методику, наведену в роботах [80–99], побудуємо графік зміни кількості пікселів на зображенні фазових траєкторій залежно від маси m , наприклад, для значення $k=18,12$ (рис. 2.23). Локально мінімальні екстремальні значення графіка дозволяють визначити критичні значення маси m : 0,627; 0,788; 1; 1,43; 1,88; 2,24.

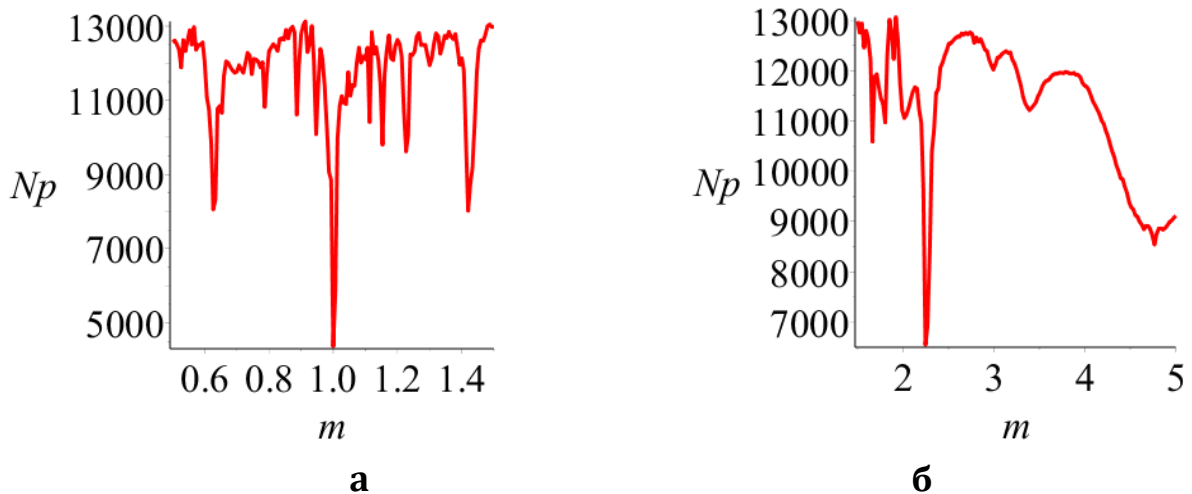


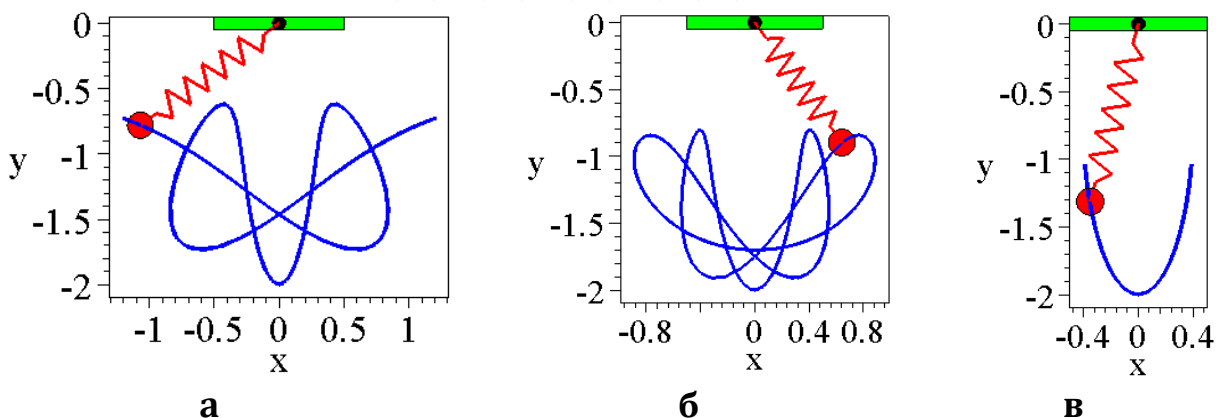
Рис. 2.23 – Графіки зміни кількості пікселів залежно від m для $k=18.12$:

а) у межах $0.5 < m < 1.5$; б) у межах $1.5 < m < 5$

На рис. 2.24 зображено миттєві положення хитної пружини жорсткості $k=18,12$, а також періодичні траєкторії руху вантажу для обчислених величин мас вантажів. Бачимо, що періодичні траєкторії на рис. 2.24 подібні за геометричними формами до траєкторій з рис. 2.21. Це вказує на існування певної закономірності «генерування» періодичних траєкторій.

Зміст рис. 2.21 і рис. 2.24 переконує в тому, що ряд геометричних форм періодичних траєкторій повторюється у певній послідовності. Для перевірки цього спостереження і для узагальнення методики розглянемо інший варіант коливання пружини, наприклад, за умов жорсткості $k=28,84$.

На рис. 2.25 наведено графік зміни кількості пікселів на зображенні фазових траєкторій залежно від маси m для значення $k=28,84$. Локально мінімальні екстремальні значення графіка дозволяють визначити критичні значення маси m : 1; 1,26; 1,59; 2,28; 3; 3,6.



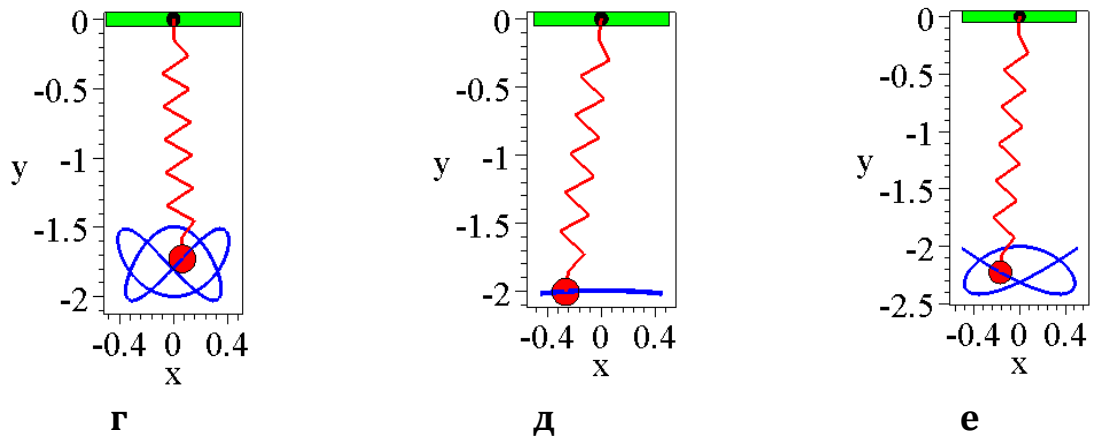


Рис. 2.24 – Періодичні траєкторії вантажу на пружині для:

а)– $m=0,627$; б) $m=0,788$; в) $m=1$; г) $m=1,43$; д) $m=1,88$; е) $m=2,26$

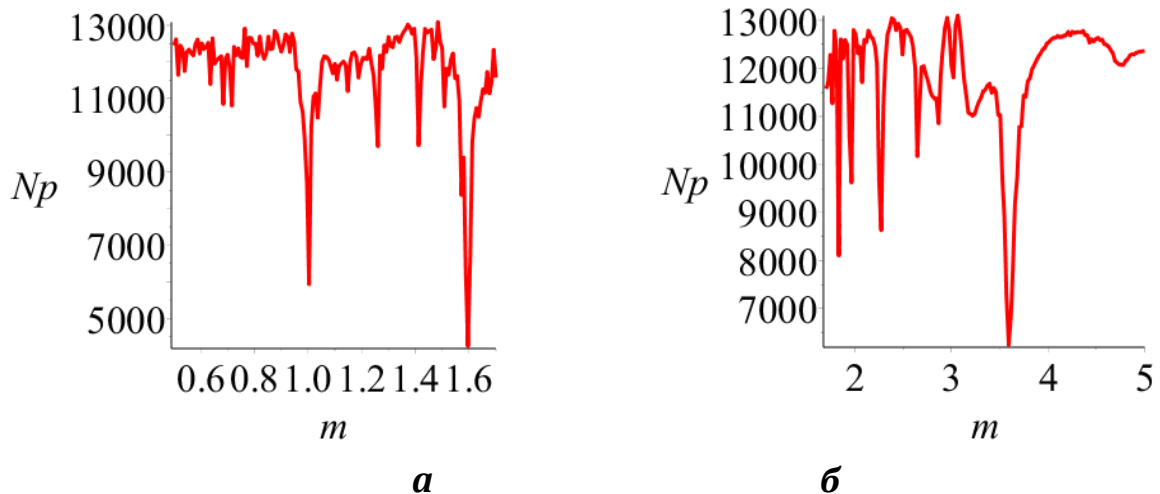


Рис. 2.25 – Графіки зміни кількості пікселів залежно від m для $k=28,84$:

а) у межах $0,5 < m < 1,6$; б) у межах $1,6 < m < 5$

2.4 Систематизація траєкторій коливань за допомогою складеної таблиці

Виявляється, що побудовані періодичні траєкторії руху вантажу матимуть вигляд однакових за формою, зображених на рис. 2.24. Але за інших значень маси: $m=1$ (а); $m=1,26$ (б); $m=1,59$ (в); $m=2,28$ (г); $m=3$ (д); $m=3,6$ (е). Це цікаве із позицій геометрії спостереження сприяло побудові таблиці для класифікації величин параметрів m і k , які б забезпечили існування періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини ($h=1$).

Розглянемо класифікацію періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Ідентифікувати геометричну форму періодичних траєкторій будемо за допомогою відношення періодів вертикальних

$T_y = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ і горизонтальних $T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ коливань вантажу. Цікаво було б

дослідити варіювання параметрів співвідношення $\frac{mg}{kh} = \frac{1}{4}$, де m – маса вантажу, k – жорсткість пружини, h – довжина пружини у ненавантаженому стані, $g=9,81$.

Перевіряємо, за яких умов виконується це співвідношення із прийнятною точністю і як це впливає на зображення періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини. В табл. 2.1 наведено значення відношення горизонтальних періодів коливань до вертикальних залежно від геометричної форми траєкторій руху, стосовно періодичних траєкторій. Також подано значення мас вантажів m для відповідних значень коефіцієнта жорсткості k . Всі величини подано в умовних одиницях.

Таблиця 2.1 – Значення мас вантажів для періодичних траєкторій, відповідних жорсткостям k







Значення коефіцієнтів жорсткості →	7,99	9,5	12,67	18,12	22,96	28,87	Значення відношень періодів ↓
Форма траєкторії ↓							
	0,276	0,33	0,44	0,63	0,8	1	1,71
	0,35	0,415	0,554	0,793	1	1,25	1,525
	0,44	0,23	0,7	1	1,26	1,58	1,36
	0,63	0,75	1	1,423	1,8	2,27	1,14
	0,83	1	1,32	1,9	2,4	3	0,986
	1	1,18	1,58	2,26	2,85	3,6	0,9

Табл. 2.1 дозволяє визначити значення мас вантажів і форм траєкторій лише для дискретних значень k . Для того, щоб визначити допустиме значення маси m для довільного $10 < k < 35$, з метою одержати певну траєкторію вантажу (наприклад, для перевірки – зображену на рис. 2.24, а), використаємо інтерполяційну формулу для двох точок із координатами (28,84; 1) і (18,12; 0,627).

Після обчислень одержуємо функцію:

$$m(k) = 0,0348k - 0,00348.$$

Аналогічно одержуємо інші функції:

$$\begin{aligned}m(k) &= 0,044k - 0,00923; \\m(k) &= 0,055k + 0,00272; \\m(k) &= 0,0792k - 0,00675; \\m(k) &= 0,104k - 0,0131; \\m(k) &= 0,127k - 0,0588,\end{aligned}\tag{2.10}$$

які відповідатимуть траєкторіям вантажу, зображених на рис. 2.24, б–е.

Отже, для обчислення величини маси m при її переміщенні уздовж періодичної траєкторії за заданої величини коефіцієнта жорсткості k , необхідно скористатись однією з формул (2.10). При цьому з'явилася можливість не лише побудувати періодичну траєкторію, але і наперед *обрати* одну з геометричних форм траєкторій, зображених на рис. 2.24.

Наприклад, для коефіцієнта жорсткості $k=22,96$, щоб одержати періодичні траєкторії, зображені на рис. 2.24, а–е, необхідно обрати величини мас, відповідно: $m=0,8$; $m=1$; $m=1,27$; $m=1,8$; $m=2,38$; $m=2,85$.

Цим проілюстровано можливість не лише побудувати періодичну траєкторію руху вантажу хитної пружини, але й обрати одну з них, використовуючи як прототип зображену на рис. 2.24. Таким чином, було розв'язано, у певному розумінні, обернену задачу визначення періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Тобто розроблена класифікація та складена таблиця періодичних траєкторій дозволяють розв'язувати обернені задачі. А саме – долучити до переліку числових параметрів хитної пружини ще й періодичні криві як параметри у графічній формі. Величини відношення горизонтальних і вертикальних періодів коливань хитної пружини дозволяють визначити числові значення таких параметрів, які б забезпечили існування наперед заданої з шести вказаних форм періодичної траєкторії руху вантажу. Крім того, розроблений спосіб побудови періодичних траєкторій дозволяє оцінювати їх довжини шляхом підрахунку кількості пікселів, що складають зображення траєкторії. Тобто у випадку необхідності з'явилася можливість вказати періодичну траєкторію певної довжини, яку слід враховувати під час дослідження динамічних систем, між частинами яких відбувається «перетікання» енергії.

Результати роботи можна використати як парадигму для вивчення нелінійних зв'язаних систем, а також при розрахунках варіантів механічних пристроїв, де пружини впливають на коливання їх елементів. А також у випадках, коли в технологіях використання механічних пристроїв необхідно відмежуватися від хаотичних переміщень вантажів і забезпечити періодичні траєкторії їх руху. Наведені в роботі оцінки меж та швидкостей зміни маятникових кутів, а також відповідних подовжень і швидкостей подовжень пружини, дозволяють досліджувати модифікації хитної пружини, на-

приклад, у вигляді підвішеної до рухомого візка. Відсутність системного підходу до моделювання періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини та її різновидів ускладнювало алгоритмічну реалізацію аналогічних впроваджень.

Отже в роботі показано, що існує принаймні *шість* основних геометричних форм періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини, які відповідають заданим коефіцієнтам жорсткості k та значенням маси m . За допомогою відношення горизонтальних і вертикальних періодів коливань вантажу вдалося визначити шість чисел: 1,71; 1,525; 1,36; 1,14; 0,986; 0,9, які відповідають одержаним геометричним формам періодичних траєкторій руху.

РОЗДІЛ 3

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕЗОНАНСУ ХИТНОЇ ПРУЖИНИ ТА СПОСІБ НИМ КЕРУВАННЯ

Розглянуто опис процесу «перетікання» енергії під час коливань хитної пружини у стані її резонансу типу 2:1. Для цього використано опис коливань хитної пружини з особливою «добавкою», яка породжує взаємодію між коливаннями – завдяки такій взаємодії коливання по вертикалі впливатимуть на горизонтальні коливання й навпаки. Добавки у правих частинах рівнянь вказують на існування сили, яка змушує додатково розгойдувати коливання. Якщо частоти вертикальних і горизонтальних коливань є довільними, то ця сила мала і не виявляється ні в якому істотному ефекті. Але якщо виконується співвідношення частоти вертикальних коливань у два рази більше частоти горизонтальних коливань, то настає стан резонансу.

Розглянуто спосіб керування резонансом періодичних траєкторій вантажу. На першому етапі для обраного типу резонансу за допомогою складеної програми визначаються значення маси, довжини в ненавантаженому стані й жорсткості, які б забезпечили цей резонанс. Критерій існування резонансу базується на зображенні двох характерних графіків функцій, які описують відстань точкового вантажу до відповідних координатних осей. На другому етапі обирається один із параметрів у якості змінної величини. Далі у вигляді комп'ютерної анімації будується множина траєкторій руху вантажу, залежно від обраного параметра. В результаті обираються значення параметра, які відповідають періодичним траєкторіям руху вантажу хитної пружини, зображеним на відповідних кадрах анімації.

Наведено приклади знайдених варіантів розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною. Отже, особливість керування резонансом хитної пружини полягає в урахуванні початкових умов виникнення коливань. З'являється можливість вибору різновиду резонансу, керуючись графічними характеристиками траєкторії хитної пружини.

3.1 Необхідність досліджень проблеми обміну між собою енергії в рамках певної динамічної системи

В розділі 1 розглянуто підхід до розв'язання класу задач, коли в рамках певної динамічної системи її нелінійно зв'язані коливальні компоненти можуть обмінюватися енергією між собою. У роботах [1, 56] наведено багато прикладів таких задач. При цьому досліджуються питання залежності дійства обміну енергією від параметрів керування системою. Проблема полягає в тому, щоб визначити загальну енергію системи і

правильно оцінити енергетичні величини в часі, а також їх зв'язок для кожного з компонентів.

Нагадаємо, що для ілюстрації такого підходу використовують двовимірний пружинний маятник як механічну модель дослідження декількох нелінійно зв'язаних систем. Двовимірний пружинний маятник в ідеалізованому вигляді складається з «точкового» вантажу масою m , прикріпленого до кінця невагомої пружини жорсткістю k і довжиною h у невантаженому стані. Інший кінець пружини закріплений нерухомо. Утворена в такий спосіб коливальна система має рухатися тільки у вертикальній площині, при цьому зберігаючи вісь пружини прямолінійною. Точковий вантаж одночасно бере участь у двох видах коливань: подібних пружині – коли переміщається уздовж прямолінійної осі пружини, і подібних маятнику – коли здійснює коливання сумісно з її віссю.

За допомогою хитної пружини наочно ілюструється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями. При цьому повинен враховуватися також вплив початкових умов ініціювання коливань. Особливе значення має дослідження умов виникнення стану резонансу хитної пружини, тобто коли частота поздовжніх коливань відрізнятиметься в кратну кількість разів від частоти поперечних коливань. Крім поширеного «класичного» випадку (резонансу 2:1) доцільно розв'язувати задачі з іншими значеннями відношення частот. Наприклад, виникає необхідність [36] побудувати траєкторії руху вантажу для випадків таких резонансів: 2:1, 7:3, 9:4, 11:2 та інших. Знайдені геометричні форми траєкторії руху вантажу хитної пружини із заданими параметрами допоможуть визначити характеристики розв'язку обраної задачі.

Значна частка переліку можливих впроваджень на базі застосування ідеї коливань хитної пружини має безпосереднє відношення до порушення стійкості й керованості літаків або швидкохідних кораблів у процесі їх руху. При розрахунках переміщення динамічної системи у просторі (корабля або літака) необхідно враховувати обмін енергією між поперечними і шляховими (подовжніми) коливаннями як компонентами системи. В більшості випадків частоти цих коливань приймають як співвідношення 2:1. Але для ретельніших досліджень доцільно розглядати інші відношення частот. Особливо це стосується досліджень динаміки коливань літаків типу «голландський крок» (Dutch roll). Такі коливання виникають у випадку великої поперечної стійкості літака в порівнянні з малою шляховою стійкістю. Тоді бічний рух літака характеризуватиметься взаємозалежними коливаннями за креном і ковзанням. Причому, коливання за ковзанням відстають по фазі від коливань за креном, що пов'язано зі слабкою шляховою й надмірною поперечною стійкістю. Крен літака є причиною виникнення ковзання літака, усунення якого відбувається із запізненням через слабку шляхову стійкість. Ковзання, яке при

цьому виникає, провокує необхідність аварійного крену літака у протилежний бік через підвищену поперечну стійкість, і процес повторюється.

Для гасіння коливань на літаках застосовуються демпфери нишпорення, розрахунок яких доцільно виконувати із залученням поняття перекачування енергій хитної пружини у стані резонансу. Зрозуміло, що стан *резонансу* хитної пружини має відбуватися у випадку певної комбінації значень параметрів хитної пружини. У тривіальному випадку – коли період вертикальних коливань буде приблизно удвічі меншим за період горизонтальних коливань: $2T_Y = T_X$, де $T_X = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $T_Y = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$. Тут m

– маса вантажу, k – жорсткість пружини, h – довжина пружини у ненавантаженому стані, g – прискорення земного тяжіння. Або – як двоїсте твердження – коли частота вертикальних коливань $\omega_Y = \sqrt{\frac{k}{m}}$ буде приблизно

удвічі більшою за частоту горизонтальних коливань: $\omega_X = \sqrt{\frac{g}{h}}$; $2\omega_X = \omega_Y$.

Зважаючи на наведене, доцільними будуть дослідження, спрямовані на геометричне моделювання траєкторій руху вантажу хитної пружини, які відповідатимуть умовам заданого типу резонансу. Тобто умовам, коли частота вертикальних коливань «точкової» маси на хитній пружині буде у кратну кількість разів більшою за частоту горизонтальних коливань і буде врахована максимальна кількість параметрів коливання хитної пружини. Зазначимо, що рух вантажу хитної пружини є помітно складнішим порівняно з вантажем математичного маятника, тому ефект від використання хитної пружини в якості механічної інтерпретації буде очікувано більш глибоким. Наприклад, проведені лабораторні експерименти з хитною пружиною дають нове розуміння руху планетарних хвиль в атмосфері Землі.

3.2 Опис процесу руху хитної пружини з урахуванням перетікання горизонтальних коливань у вертикальні й навпаки

Для визначення траєкторій вантажу хитної пружини, за умови її резонансу, необхідно дослідити феномен «перетікання» енергії під час коливань хитної пружини у стані її резонансу типу 2:1. Розглянемо хитну пружину з вантажем масою m , жорсткістю k і довжиною L_0 у ненавантаженому стані. У полі тяжіння із прискоренням вільного падіння $g=9,81$

період коливання такої пружини становить $T_Y = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ Положення рівно-

ваги вантажу при цьому зміститься донизу на висоту $\Delta L = mg/k$. При такому подовженні пружини сила пружності компенсує силу ваги. Але пе-

ріод вертикальних коливань відносно нового положення рівноваги з розтягнутою пружиною залишиться тим же. Період горизонтальних коливань розтягнутої хитної пружини виражається через прискорення вільного падіння g та її повну довжину $L=L_0+\Delta L$, тобто $T_x = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Аналіз додаткового розтягнення пружини в полі тяжіння дозволяє визначити [49] співвідношення між періодами:

$$\frac{T_x}{T_y} = \sqrt{\frac{L_0 + \Delta L}{L_0}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta L}{L_0}} > 1. \quad (3.1)$$

Отже, у хитної пружини період горизонтальних коливань завжди більше періоду вертикальних: $T_x > T_y$. Хитна пружина є найпростішим прикладом реалізації резонансу Фермі. Такий резонанс виникає тоді, коли періоди вертикальних і горизонтальних коливань будуть зв'язані наближеним співвідношенням $T_x = 2T_y$. Або, використовуючи частоти незалежних коливань по вертикалі ω_y й горизонталі ω_x , співвідношенням $\omega_y = 2\omega_x$. Тобто горизонтальні й вертикальні коливання починають ніби перетікати одне в інше. Енергія коливань буде перекачуватися з вертикальних коливань у горизонтальні й навпаки. При цьому, що є дивним, власне вертикальні коливання виявляються нестійкими.

Виникнення співвідношення $T_x:T_y = 2:1$ можна пояснити так [49]. На декартовій площині Oxy позначимо через $X(t)$ і $Y(t)$ координати відхилення в часі t вантажу від положення рівноваги. За умов такого відхилення потенційна енергія виростає на величину:

$$\Delta U = \frac{k}{2} \left(\left(\sqrt{(L-Y)^2 + X^2} - L_0 \right)^2 - (\Delta L)^2 \right) + mgY. \quad (3.2)$$

Якщо обрати координати X і Y істотно меншими L , то вираз (3.2) наближено дорівнюватиме:

$$\Delta U \approx \frac{k}{2} Y^2 + \frac{mg}{2L} X^2 - \frac{L_0}{L^2} X^2 Y = U_Y + U_X + U_{XY} \quad (3.3)$$

плюс інші складові, які характеризуються більш високими ступенями відхилень. Величини U_Y і U_X – це потенційні енергії, які виникають внаслідок вертикальних і горизонтальних коливань. А величина $U_{XY} = -\frac{L_0}{L^2} X^2 Y$ – це особлива добавка, яка породжує взаємодію між зазначеними коли-

ваннями. Завдяки такій взаємодії коливання по вертикалі впливатимуть на горизонтальні коливання й навпаки.

Для пояснення зручно ввести нові позначення: $\omega_x^2 = \frac{g}{L}$; $\omega_y^2 = \frac{k}{m}$;

$c = \frac{L_0}{2L^2} \omega_y^2$ і одержати систему рівнянь коливань по горизонталі й вертикалі:

$$\ddot{X} + \omega_x^2 X = 2cXY \tag{3.4}$$

$$\ddot{Y} + \omega_y^2 Y = cX^2.$$

Без прямих частин у рівняннях (3.4) одержуємо описи незалежних коливань по вертикалі й горизонталі з частотами ω_y і ω_x . А добавки у прямих частинах вказують на існування сили, яка змушує додатково розгойдувати коливання. Якщо частоти ω_y і ω_x довільні, то ця сила мала і не виявляється ні в якому істотному ефекті. Але якщо виконується співвідношення $\omega_y = 2\omega_x$, то настає стан резонансу. Адже сила, яка є рушієм коливань, для обох типів коливань містить компоненту з тією ж частотою, що й саме коливання. У результаті ця сила сприятиме розгойдуванню одного типу коливань і придушенню іншого типу [49]. Саме так горизонтальні й вертикальні коливання перетікають одне в інше.

Для підтвердження «перетікання» енергії між подовжніми і поперечними коливаннями точки на хитній пружині було складено комп'ютерну програму. Наведемо три приклади, які ілюструють зазначений ефект. Для цього оберемо значення параметрів хитної пружини, які б наближено задовольняли стану її резонансу. Наприклад, $m=0,35$; $k=150$;

$L_0 = 0,1$. Тоді $\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20,702$; $\omega_x = \sqrt{\frac{g}{L_0}} = 9,905$, звідки $\omega_y / \omega_x = 2,09$.

Тобто наближено умова виникнення резонансу типу 2:1 виконується. Повну довжину пружини оберемо $L = 0,5$. Систему диференціальних рівнянь (3.4) розв'язуємо чисельно методом Рунге-Кутта. Графіки будуюмо за допомогою 5000 одержаних точок.

Приклад 1. Систему рівнянь (3.4) розв'язуємо з такими початковими умовами: $x_0 = 0,1$; $Dx_0 = 0$; $y_0 = -0,2$; $Dy_0 = 0$. Тобто для точки з початковими координатами руху $X(0) = 0,1$; $Y(0) = -0,2$ і відсутністю надання їм швидкостей в напрямках координатних осей.

На рис. 3.1 наведено траєкторію руху точки з координатами $X(t), Y(t)$ за час $T = 35$.

На рис. 3.2 зображено графіки відхилень вантажу для відповідних координат. На рис. 3.3 наведено графіки потенційних енергій для коливань уздовж відповідних координат, а також графік добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями.

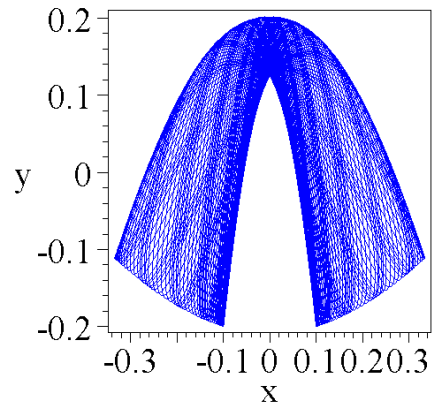
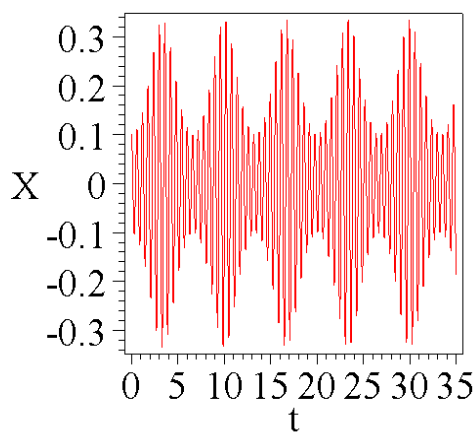
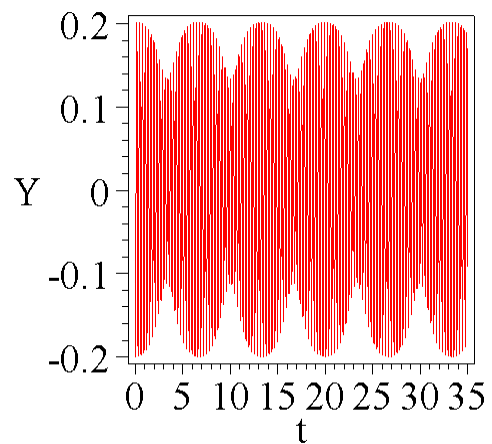


Рис. 3.1 – Траєкторія руху точки для прикладу 1



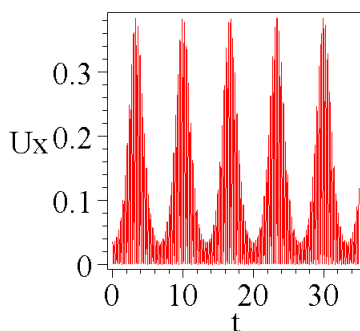
а



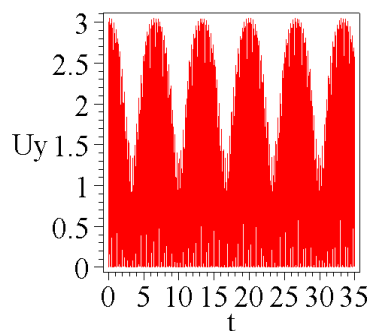
б

Рис. 3.2 – Графіки відхилень вантажу:

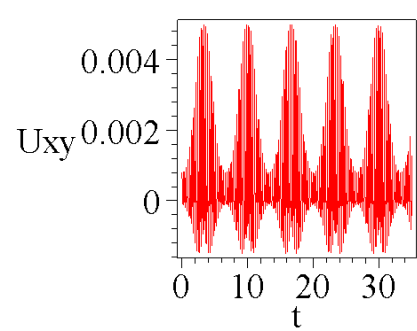
а) для координати X ; б) для координати Y



а



б



в

Рис. 3.3 – Графіки потенційних енергій для:

а) коливань уздовж координати X ; б) коливань уздовж координати Y ; в) добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями

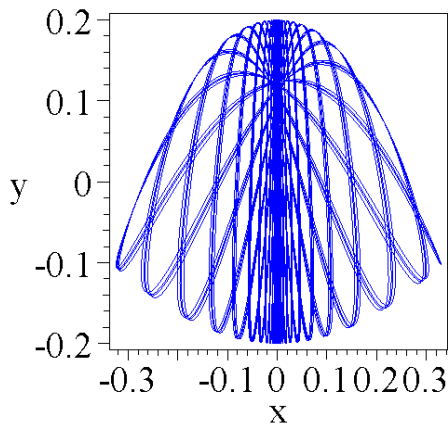
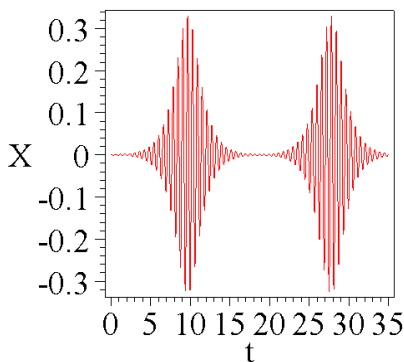


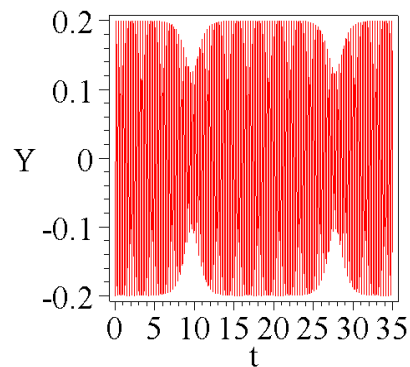
Рис. 3.4 — Траєкторія руху точки для прикладу 2

Приклад 2. Систему рівнянь (3.4) розв'язуємо з такими початковими умовами: $x_0 = 0,001$; $Dx_0 = 0$; $y_0 = -0,2$; $Dy_0 = 0$, тобто для точки, яка перед початком руху розташована «майже» на осі Oy .

На рис. 3.4 наведено траєкторію руху точки з координатами $X(t), Y(t)$ за час $T=35$. На рис. 3.5 зображено графіки відхилень вантажу для відповідних координат. На рис. 3.6 наведено графіки потенційних енергій для коливань уздовж відповідних координат, а також графік добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями.



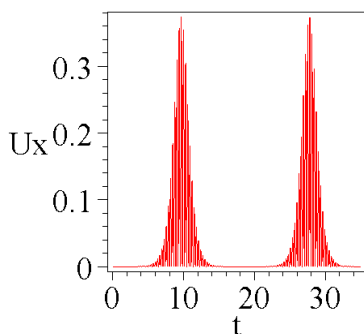
а



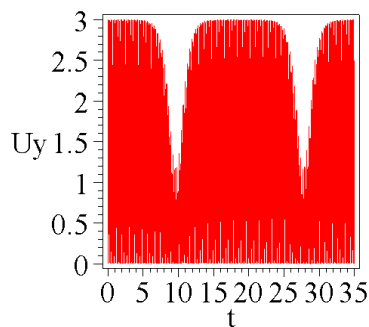
б

Рис. 3.5 — Графіки відхилень вантажу:

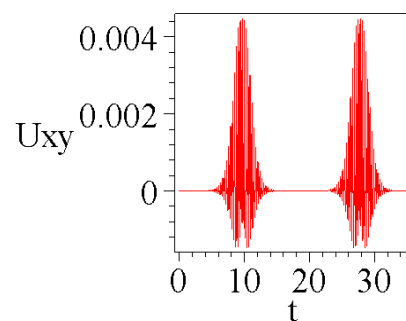
а) для координати X ; б) для координати Y



а



б



в

Рис. 3.6 — Графіки потенційних енергій для:

а) коливань вздовж координати X ; б) коливань вздовж координати Y ; в) добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями

Приклад 3. Систему рівнянь (3.4) розв'язуємо з такими початковими умовами: $x_0=0$; $Dx_0=0,25$; $y_0=-0,2$; $Dy_0=0$, тобто для точки, яка розташована на осі Oy і якій для руху надали імпульс величиною 0,25 умовних одиниць.

На рис. 3.7 наведено траєкторію руху точки з координатами $X(t)$, $Y(t)$ за час $T=35$.

На рис. 3.8 зображено графіки відхилень вантажу.

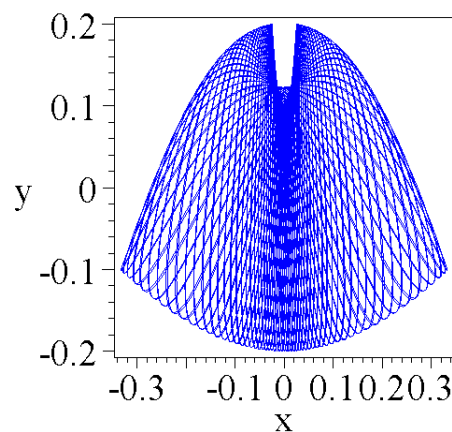
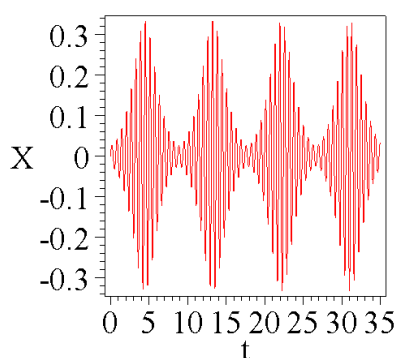
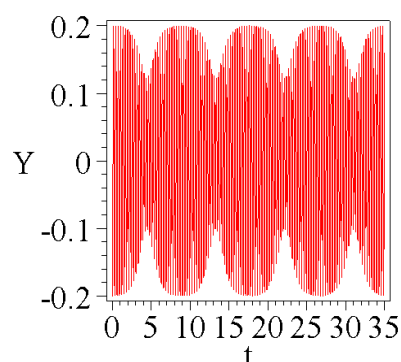


Рис. 3.7 – Траєкторія руху точки для прикладу 3



а



б

Рис. 3.8 – Графіки відхилень вантажу:

а – для координати X ; б – для координати Y

На рис. 3.9 наведено графіки потенційних енергій та графік добавки. Звертаємо увагу на те, що коли вибір параметрів хитної пружини буде довільним, траєкторія руху її вантажу може не підпорядковуватися ніякому закону. Траєкторія руху може навіть заповнювати деяку область на площині. Далі розглянемо спосіб знаходження конкретних періодичних траєкторій руху вантажу. При цьому послідовність досліджень буде наступною.

На першому етапі для обраного типу резонансу $\mu\omega_x = \omega_y$ за допомогою складеної програми визначаються значення параметрів m , h і k , які б забезпечили цей резонанс. Нехай точковий вантаж має координати (X_0, Y_0) . Тоді критерій існування резонансу базується на зображенні двох графіків функцій $X(t)$ і $Y(t)$, які описують відстань точкового вантажу до відповідних координатних осей. Одержані графіки повинні мати таку особливість: максимальні значення одного графіка мають досягатися за мінімальних значень другого графіка.

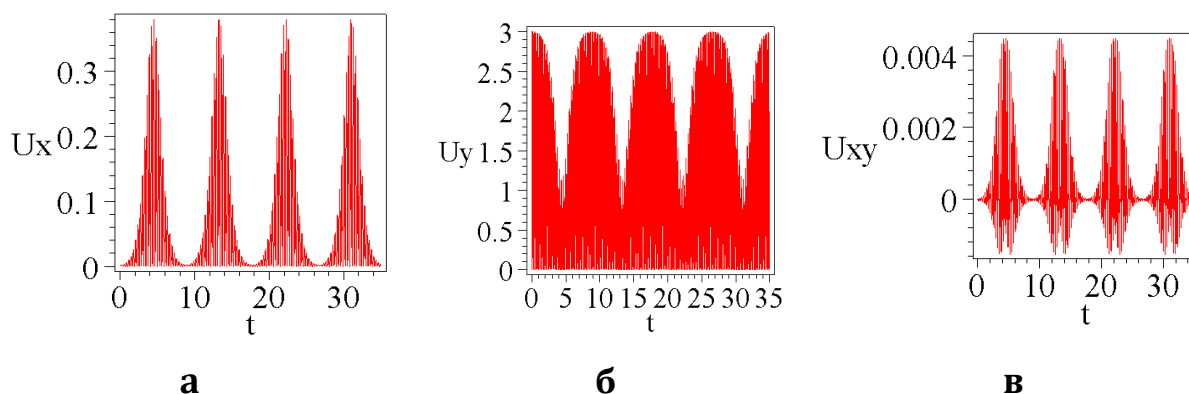


Рис. 3.9 – Графіки потенційних енергій для:

а) коливань уздовж координати X ; б) коливань уздовж координати Y ; в) добавки, яка породжує взаємодію між зазначеними коливаннями

На другому етапі обирається один із параметрів (наприклад Y_0 або DY_0) в якості змінної величини. Далі у вигляді комп'ютерної анімації будується множина траєкторій руху вантажу, залежно від параметра Y_0 . В результаті обираються значення параметра Y_0 , які відповідають періодичним траєкторіям руху вантажу хитної пружини, зображеним на відповідних кадрах анімації.

Ідею використання хитних пружин в якості механічної моделі доцільно розвивати для аналізу сучасних технологічних процесів як динамічних систем. Ці системи можуть складатися з нелінійно зв'язаних коливальних компонентів, які обмінюються енергією між собою.

3.3 Умови виникнення резонансу хитної пружини залежно від відношення «пружинних» і «маятникових» частот коливання

Розглянемо на вертикально розташованій площині з декартовими координатами Oxy коливальну систему типу «хитна пружина». Система складається з невагомої пружини, до якої з одного кінця прикріплено вантаж масою m , а інший кінець зафіксовано в точці O початку координат. Вважається, що під час маятниковоподібних коливань вісь пружини зберігає прямолінійність. Жорсткість пружини позначимо як k ; через h позначимо довжину пружини без вантажу, а через H – довжину пружини з вантажем у рівноважному (вертикальному) стані.

Рівняння руху хитної пружини матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}(t) &= -T \sin v; \\
 m\ddot{y}(t) &= -T \cos v - mg,
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

де T – натяг пружини; v – кут відхилення пружини від вертикалі; g – прискорення земного тяжіння. Тоді змінна довжина пружини буде функцією часу з очевидною фізичною інтерпретацією:

$$u(t) = \sqrt{x(t)^2 + [H - y(t)]^2}. \quad (3.6)$$

Враховуючи, що

$$T = k[u(t) - h]; k[H - h] = mg; \quad (3.7)$$

$$\sin v = \frac{x(t)}{u(t)}; \cos v = \frac{H - y(t)}{u(t)},$$

одержимо рівняння руху хитної пружини у вигляді [40]:

$$\ddot{x}(t) + \omega_x^2 x(t) = \lambda x(t) y(t), \quad (3.8)$$

$$\ddot{y}(t) + \omega_y^2 y(t) = \lambda x(t)^2 / 2,$$

де $\omega_x = \frac{g}{H}; \omega_y = \frac{k}{m}; \lambda = k \frac{h}{H^2}.$

Частота ω_x визначає коливання математичного «лінійного маятника», а значення ω_y описує частоту, з якою «точкова» маса на пружині коливається вертикально. Якщо $\lambda=0$, то рівняння (3.8) можна розв'язати незалежно, але маятникові та пружинні рухи будуть зв'язані через нелінійні умови [40]. Вичерпне дослідження всіх можливих рухів хитної пружини наведено в роботі [41] у термінах параметра μ , визначеного як:

$$0 \leq \mu^2 = \frac{\omega_x}{\omega_y} \leq 1. \quad (3.9)$$

Проміжні випадки для μ були вивчені з використанням перетинів Пуанкаре і біфуркаційних діаграм. В роботі [41] надано описи для всіх комбінацій можливих рухів хитної пружини.

Посилаючись на роботу [40], розглянемо випадок, коли «пружинний» рух хитної пружини домінує над її «маятниковоподібним» рухом. Тобто, коли $x(t) \ll y(t)$. В цьому випадку:

$$\ddot{x}(t) + \omega_x^2 x(t) = \lambda x(t) y(t); \quad (3.10)$$

$$\ddot{y}(t) + \omega_y^2 y(t) \gg 0.$$

Звідки:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) + \omega_x^2 x(t) &= \lambda x(t) y(t); \\ y(t) &= y(0) \cos(\omega_y t).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Остаточно маємо:

$$\ddot{x}(t) + \left[\omega_x^2 - \lambda y(0) \cos(\omega_y t) \right] x(t) = 0.\tag{3.12}$$

Рівняння (3.12) відоме як рівняння Матьє [21], і його розв'язки є нестійкими коли:

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\tag{3.13}$$

Співвідношення (3.13) надає послідовність можливих умов виникнення резонансу хитної пружини і пояснює необхідність аналізувати відношення частот коливання «пружинних» ω_y і «маятникових» ω_x для визначення резонансного стану хитної пружини.

В роботі [49] наведено варіант визначення резонансного стану хитної пружини за допомогою співвідношення між параметрами h і H : $\frac{H}{H-h} = \frac{4}{n^2}$. Але для практичного застосування зручніше застосовувати графічні побудови.

3.4 Моделювання резонансу хитної пружини та спосіб керування ним

Розглянемо множину траєкторій руху вантажу хитної пружини для резонансу коливань типу 2:1. У процесі побудови зображень траєкторій хитної пружини спиратимемося на результати розділу 2. Проміжні результати будемо опускати і наводитимемо лише готові результати. Траєкторію переміщення по вертикальній площині Oxy вантажу хитної пружини визначимо із системи диференціальних рівнянь (3.4) залежно від маси вантажу m , початкової довжини пружини у ненавантаженому стані h , жорсткості пружини k і початкових умов для виникнення коливань. Повну довжину пружини позначимо L .

Вважається, що для всіх задач виконується головна умова ідеалізації руху вантажу: процес розсіювання енергії відбувається повільно, в порівнянні з характерними масштабами часу (тобто коливальна система є консервативною). Нагадаємо, що через $\omega_y = \sqrt{k/m}$ позначено частоту

поздовжніх коливань точки на невідхиленій пружині, а через $\omega_x = \sqrt{g/h}$ – частоту бічних коливань точки на осі пружини як математичному маятнику ($g=9.81$).

Множину траєкторій будемо за умови зміни початкових значень x_0, Dx_0, y_0, Dy_0 положення точки на площині Oxy . Систему диференціальних рівнянь (3.8) тут і далі будемо розв'язувати чисельно методом Рунге-Кутта. Графіки будемо за допомогою 1500 одержаних точок.

Оберемо значення параметрів хитної пружини: $m=1,91; h=0,5; k=150; L=1,5$. Тоді $\omega_y / \omega_x = 2$. Тобто умова резонансу типу 2:1 буде виконуватися.

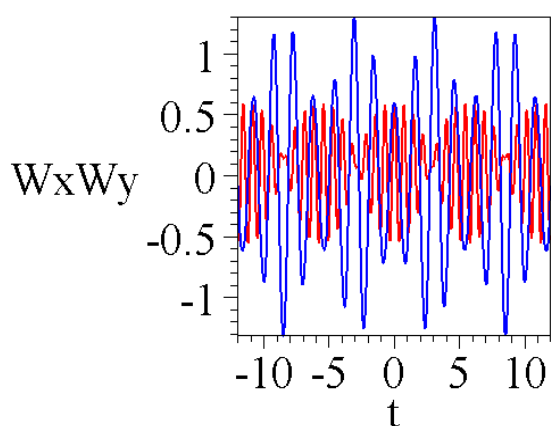


Рис. 3.10 – Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,6$ (випадок 1)

Випадок 1. Нехай $x_0=0,6; Dx_0=0; Dy_0=0$, а параметр y_0 змінюється в межах $0,1 < y_0 < 0,6$. На рис. 3.10 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,6$. У випадку довільно обраних параметрів траєкторія вантажу хитної пружини може заповнювати деяку область площини. За допомогою обрання значення параметра y_0 можна досягти того, що траєкторія матиме вигляд періодичної кривої. Вибір y_0 впливає на співвідношення амплітуд графіків відхилень коливань. На рис.

3.11 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною. В роботі [102] це проілюстровано за допомогою побудованої комп'ютерної анімації.

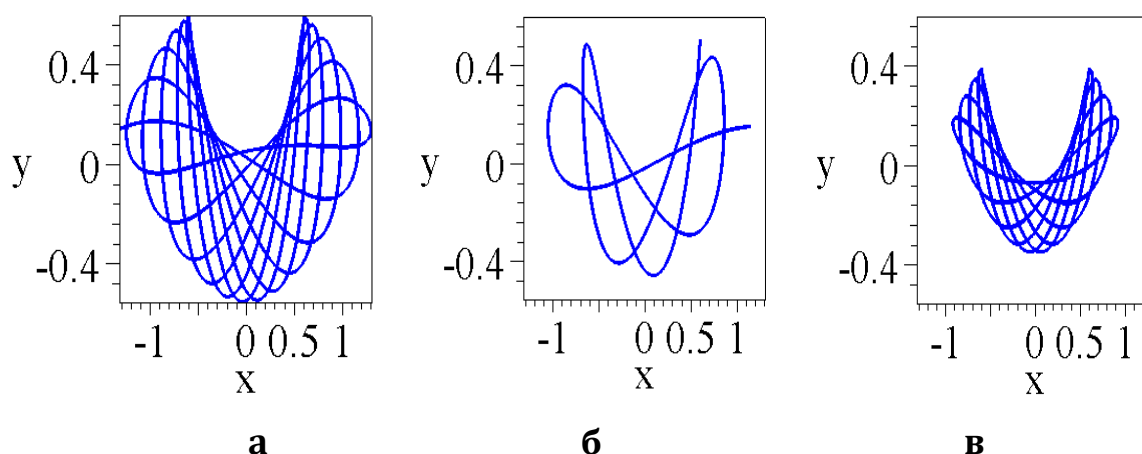


Рис. 3.11 – Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 1:

а) $y_0=0,6$; б) $y_0=0,5$; в) $y_0=0,39$

Випадок 2. Для порівняння наведемо розв'язок із параметрами $x_0=0,1$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$, а параметр y_0 змінюється в межах $0,1 < y_0 < 0,6$. На рис. 3.12 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,6$. На рис. 3.13 зображено варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

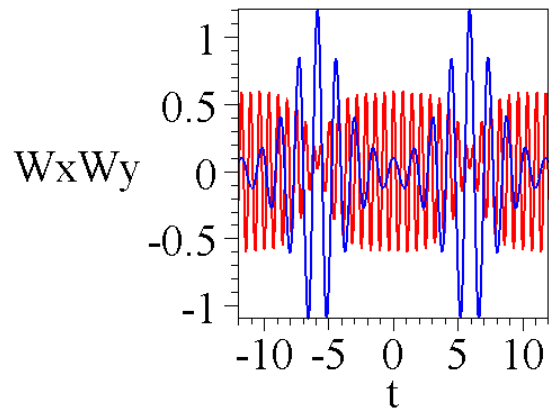


Рис. 3.12 — Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,6$ (випадок 2)

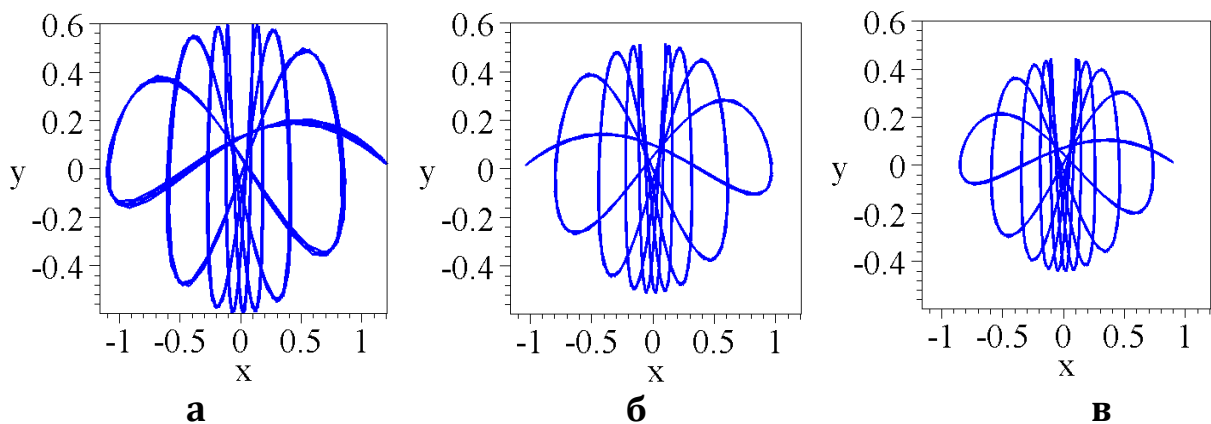


Рис. 3.13 — Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 2:

а) $y_0=0,6$; б) $y_0=0,52$; в) $y_0=0,445$

Випадок 3. Нехай змінною величиною буде початкова швидкість уздовж осі Oy , яка змінюється в межах $0,1 < Dy_0 < 6$. Наведемо розв'язок із параметрами $x_0=1$; $Dx_0=0$; $y_0=0$. На рис. 3.14 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=4,112$. На рис. 3.15 зображено варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

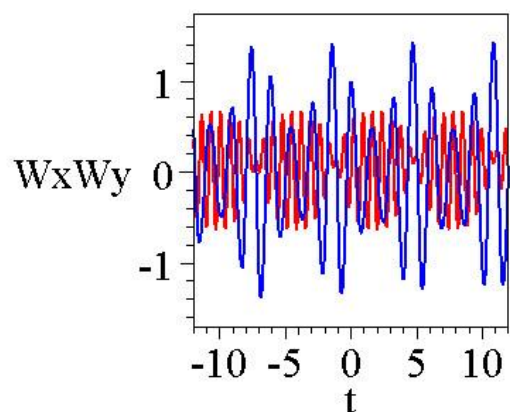


Рис. 3.14— Графіки відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=4,112$ (випадок 3)

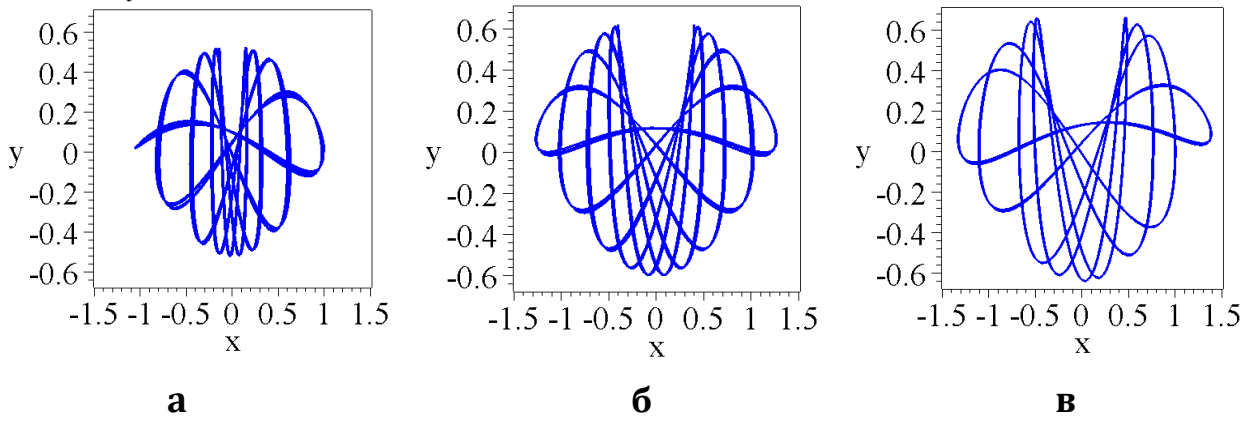


Рис. 3.15 – Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 3:

а) $Dy_0=1,428$; б) $Dy_0=3,463$; в) $Dy_0=4,122$

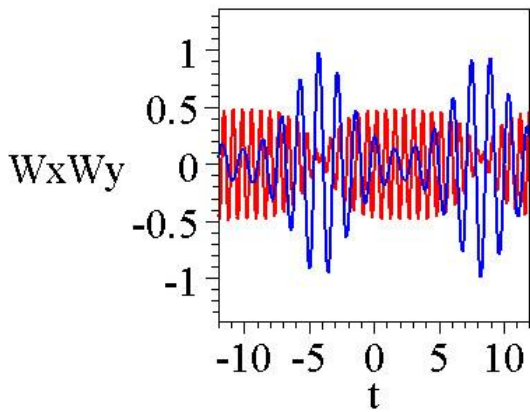


Рис. 3.16 – Графіки відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=4,17$ (випадок 4).

Випадок 4. Нехай змінною величиною також буде початкова швидкість уздовж осі Oy , яка змінюється в межах $0,1 < Dy_0 < 6$. Наведемо розв'язок із параметрами $x_0=0,25$; $Dx_0=0$; $y_0=0$. На рис. 3.16 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=4,17$. На рис. 3.17 зображено варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

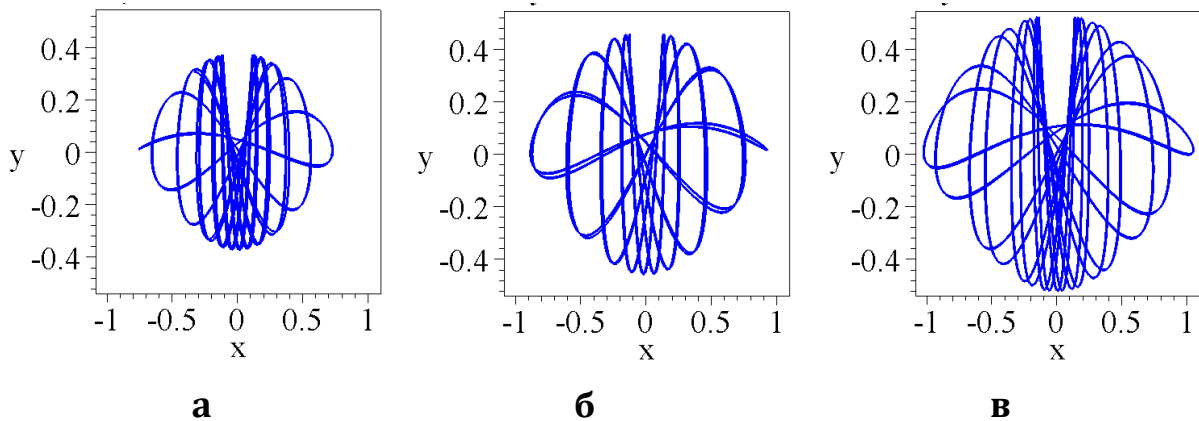


Рис. 3.17 – Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 4:

а) $Dy_0=3,139$; б) $Dy_0=3,935$; в) $Dy_0=4,525$

Отже, за виглядом одержаних періодичних траєкторій легко порівнювати особливості одного і того ж типу резонансу.

Множина траєкторій руху вантажу хитної пружини для резонансу коливань 7:3. Множину траєкторій будемо за умови зміни початкових значень x_0, Dx_0, y_0, Dy_0 положення точки на площині Oxy . Оберемо значення параметрів хитної пружини: $m=0,28; h=0,1; k=150; g=9,81$. Тоді частота вертикальних коливань буде $\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}} = 23.11$, а частота горизонтальних коливань $\omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}} = 9.9$. Звідси $\omega_y / \omega_x = 7 / 3$. Тобто умова резонансу типу 7:3 буде виконуватися.

Випадок 5. Нехай $x_0=0,1; Dx_0=0; Dy_0=0; L=0,5$, а параметр y_0 змінюється в межах $0,2 < y_0 < 0,6$. На рис. 3.18 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,6$. На рис. 3.19 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

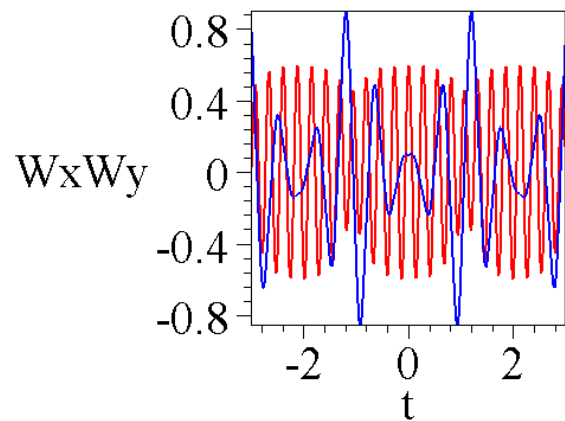


Рис. 3.18 – Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,6$ (випадок 5)

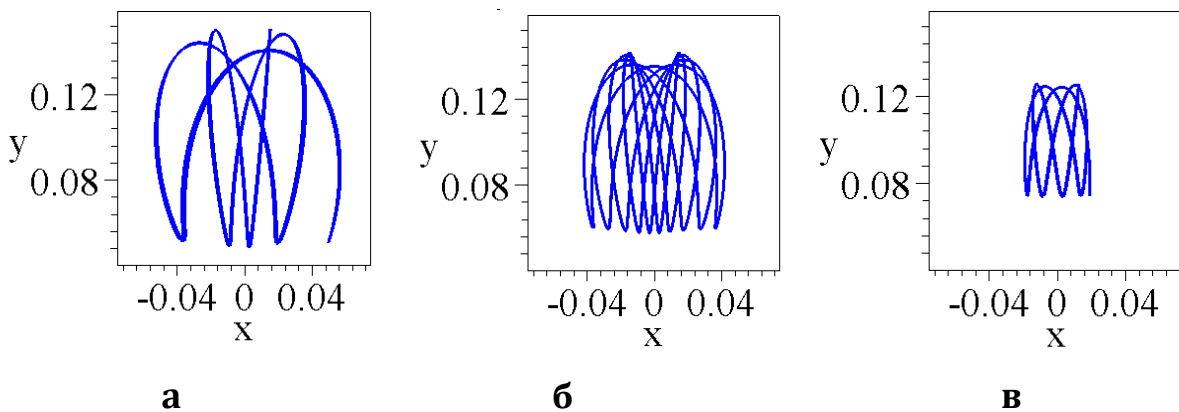


Рис. 3.19 – Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 5:

а) $y_0=0,516$; б) $y_0=0,426$; в) $y_0=0,264$

Випадок 6. Нехай $x_0=1; Dx_0=0; y_0=0; L=1,3$, а параметр Dy_0 змінюється в межах $0,2 < Dy_0 < 6,5$. На рис. 3.20 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=6,5$.

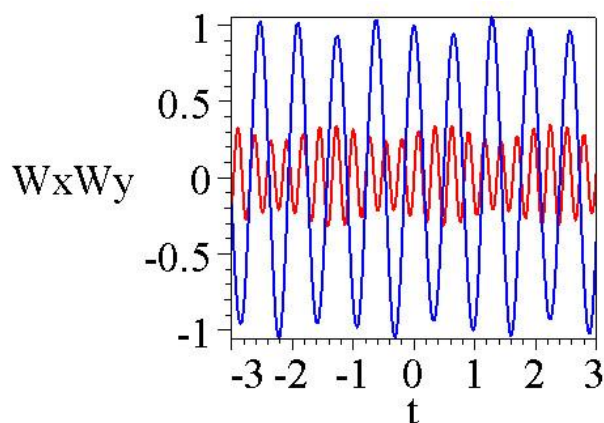


Рис. 3.20 — Графіки відхилень точки від відповідних осей для $Du_0=6,5$ (випадок 6)

На рис. 3.21 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

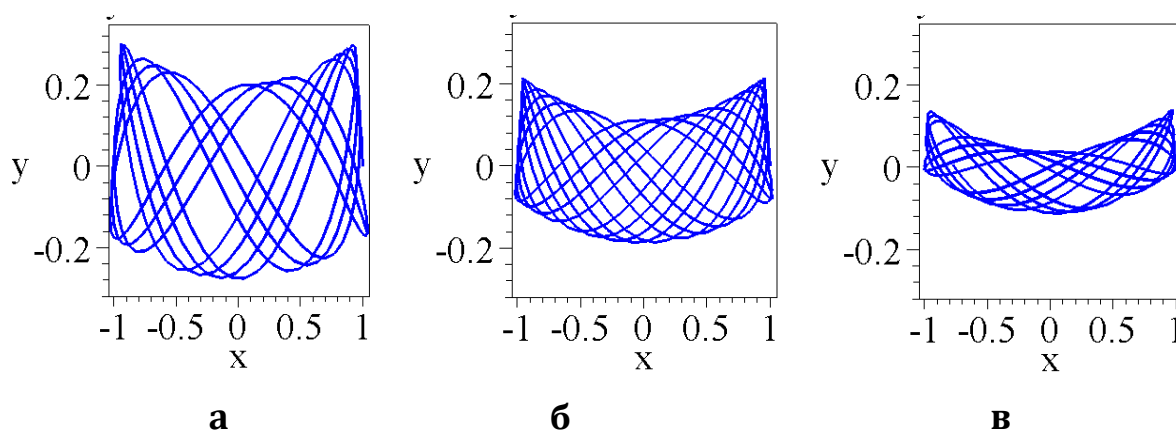


Рис. 3.21 — Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 6:

а) $Du_0=5,332$; б) $Du_0=3,223$; в) $Du_0=1,2431$

В роботі [36] йдеться про доцільність побудови траєкторій руху вантажу для резонансу 7:3.

Множина траєкторій руху вантажу хитної пружини для резонансу коливань 9:4. Оберемо значення параметрів хитної пружини: $m=4,893$; $h=9$; $k=27$; $g=9,81$. Тоді частота вертикальних коливань буде

$$\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2,35, \text{ а частота горизонтальних коливань } \omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}} = 1,04. \text{ Звідси } \omega_y / \omega_x = 9 / 4.$$

Тобто умова резонансу типу 9:4 буде виконуватися.

Випадок 7. Нехай $x_0=0,2$; $Dx_0=0$; $y_0=0$; $L=5$, а параметр Du_0 змінюється в межах $0,1 < Du_0 < 1,5$. На рис. 3.22 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $Du_0=1,42$. На рис. 3.23 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

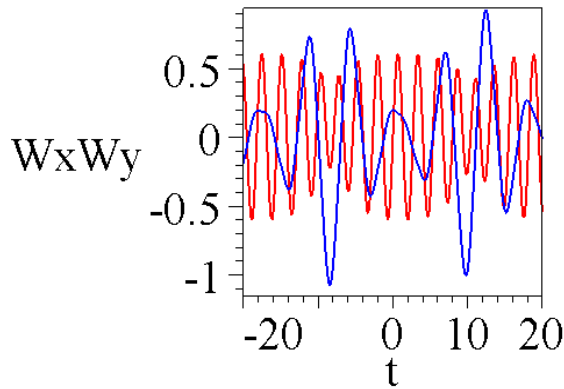


Рис. 3.22 — Графіки відхилень точки від відповідних осей для $D\gamma_0=1,42$ (випадок 7)

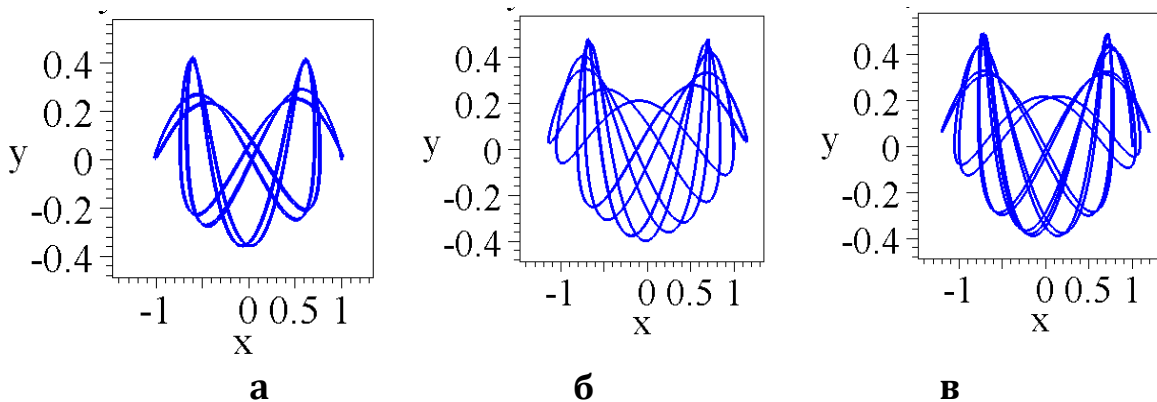


Рис. 3.23 — Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 7:

а) $D\gamma_0=0,142$; б) $D\gamma_0=0,513$; в) $D\gamma_0=0,569$

Випадок 8. Нехай $x_0=0,1$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$; $L=5$, а параметр y_0 змінюється в межах $0,1 < y_0 < 1,52$. На рис. 3.24 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,52$. На рис. 3.25 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

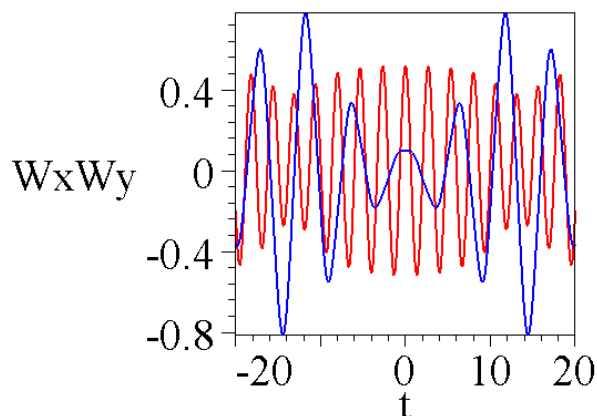


Рис. 3.24 — Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,52$ (випадок 8)

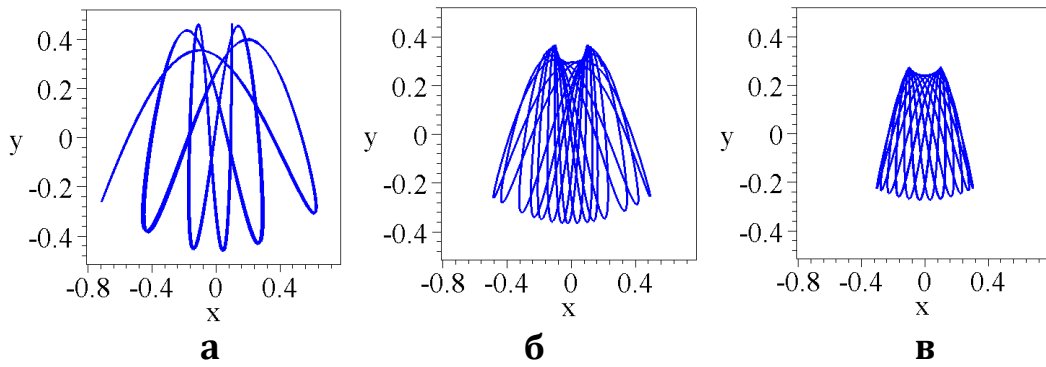


Рис. 3.25 – Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 8:

а) $y_0=0,46$; б) $y_0=0,37$; в) $y_0=0,27$

В роботі [36] йдеться про доцільність побудови траєкторій руху вантажу для резонансу 9:4.

Множина траєкторій руху вантажу хитної пружини для резонансу коливаний 11:2. Оберемо значення параметрів хитної пружини: $m=37,51$; $h=9$; $k=207$; $g=9,81$. Тоді частота вертикальних коливаний буде $\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5,45$, а частота горизонтальних коливаний $\omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}} = 0,99$. Звідси $\omega_y / \omega_x = 11/2$. Тобто умова резонансу типу 11:2 буде виконуватися.

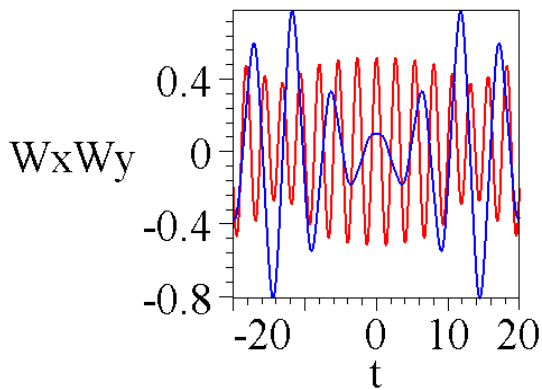


Рис. 3.26 – Графіки відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,52$ (випадок 9)

Випадок 9. Нехай $x_0=0,1$; $Dx_0=0$; $Dy_0=0$; $L=5$, а параметр y_0 змінюється в межах $0,1 < y_0 < 0,52$. На рис. 3.26 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $y_0=0,52$. На рис. 3.27 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

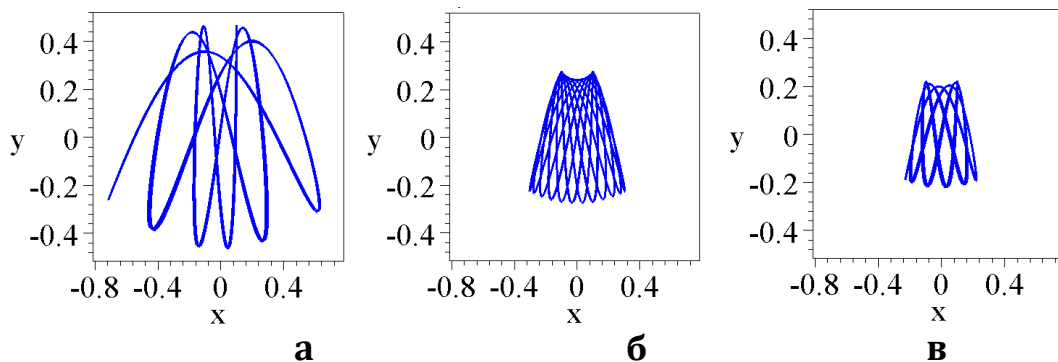


Рис. 3.27 – Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 9:

а - $y_0=0,457$; б - $y_0=0,3898$; в - $y_0=0,226$

Випадок 10. Нехай $x_0=0,1$; $Dx_0=0$; $y_0=0$; $L=5$, а параметр Dy_0 змінюється в межах $0,1 < Dy_0 < 1,65$. На рис. 3.28 наведено вигляд графіків відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=1,65$. На рис. 3.29 зображено знайдені варіанти розв'язків, коли траєкторія руху вантажу хитної пружини буде періодичною.

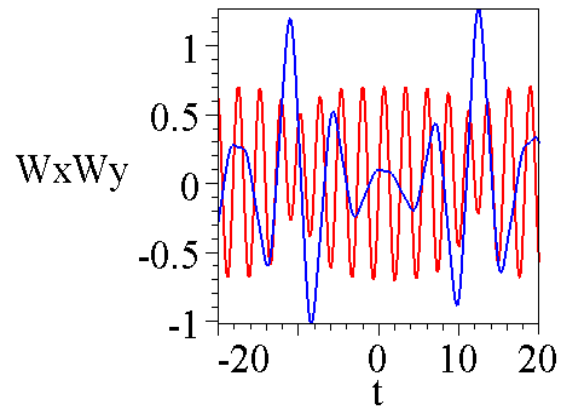


Рис. 3.28 — Графіки відхилень точки від відповідних осей для $Dy_0=1.65$ (випадок 10)

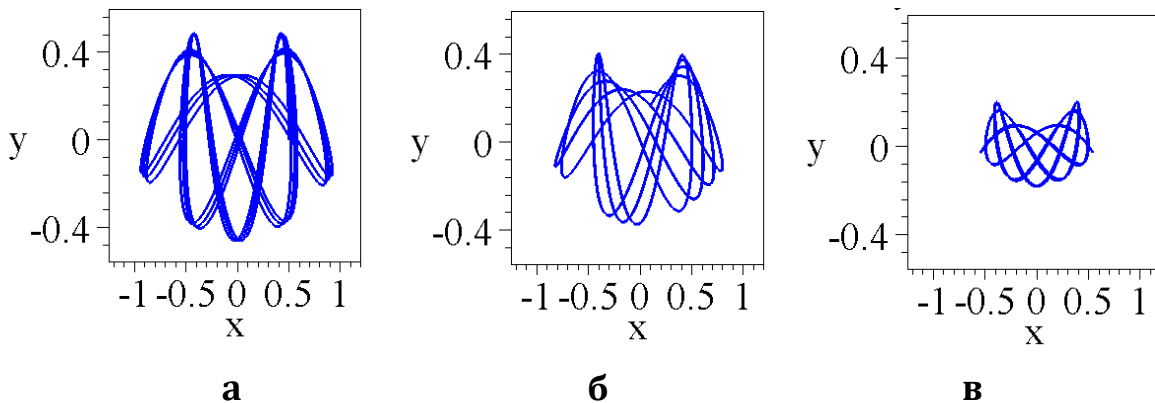


Рис. 3.29 — Варіанти періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини для випадку 10:

а) $Dy_0=1,0455$; б) $Dy_0=0,8285$; в) $Dy_0=0,2628$

Звертаємо увагу на те, що за виглядом одержаних періодичних траєкторій можна порівнювати особливості одного і того ж типу резонансу. В роботі [36] йдеться про доцільність побудови траєкторій руху вантажу для резонансу 11:2. На сайті [102] наведено комп'ютерні анімації, які ілюструють одержані результати.

РОЗДІЛ 4

ВИКОРИСТАННЯ ХИТНИХ ПРУЖИН ЯК АНАЛОГІВ ПРОЦЕСІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ АВАРІЙНО-РЯТУВАЛЬНОЇ ТЕМАТИКИ

Задача 1. Моделювання траєкторії точки на дроті електропередачі в умовах поривів вітру. Особливість досліджень полягає у використанні для цього механічного аналогу – хитної пружини. Доцільність такого аналогу пояснюється необхідністю вивчення динамічної системи «провід у поривах вітру», коли нелінійно зв'язані коливальні компоненти обмінюються енергією між собою. Дійсно, у випадку коливання точки на дроті (у нормальній площині) відбувається обмін енергіями між поперечними (горизонтальними) і поздовжніми (вертикальними) коливаннями точки.

Задача 2. Моделювання процесу роздрібнення газової бульбашки на основі його аналогії з хитною пружиною. Доцільність вибору хитної пружини як аналогу пояснюється необхідністю вивчення роздрібнення бульбашки за умови, що нелінійно зв'язані коливальні компоненти обмінюються енергією між собою. У бульбашки відбувається обмін енергіями між радіальними і деформаційними коливаннями. Цей факт у нашій монографії досліджується за допомогою математичного апарату хитної пружини, де аналогічно здійснюється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями.

Задача 3. Спосіб розрахунку відбивача пожежного сповіщувача диму з наносенсорним чутливим датчиком. Для підвищення ефективності дії сповіщувачів диму з наноконпозиційними матеріалами доцільно доповнити їх конструкції пристроями (відбивачами) для концентрування часток диму на чутливій поверхні наносенсорного датчика. У випадку рухомого відбивача, на який діють вібрації, його геометрична форма може змінюватися. Це позначиться на якості фокусування. У випадку рухомого відбивача стабільність форми його профілю для наносенсорного чутливого датчика можна погодити з періодами вертикальних і горизонтальних коливань хитної пружини.

4.1 Використання хитних пружин у якості механічної моделі сучасних технологічних процесів як динамічних систем

В роботі розглянуто підхід до розв'язання класу задач, коли в рамках певної динамічної системи її нелінійно зв'язані коливальні компоненти можуть обмінюватися енергією між собою. У роботах [1, 56] наведено багато прикладів таких задач. При цьому досліджуються питання залежності дійства обміну енергією від параметрів керування системою. Проблема полягає в тому, щоб визначити загальну енергію системи і правильно оцінити енергетичні величини в часі, а також їх зв'язок для кожного з компонентів.

Для ілюстрації такого підходу використовують *двовимірний пружинний маятник* як механічну модель дослідження декількох нелінійно зв'язаних систем. Двовимірний пружинний маятник в ідеалізованому вигляді складається з «точкового» вантажу маси m , прикріпленого до кінця невагомої пружини жорсткістю k і довжиною h у ненавантаженому стані. Інший кінець пружини закріплений нерухомо. Утворена в такий спосіб коливальна система має рухатися тільки у вертикальній площині, при цьому зберігаючи вісь пружини *прямолінійною*. Точковий вантаж одночасно бере участь у двох видах коливань: подібних пружині – коли переміщається уздовж прямолінійної осі пружини, і подібних маятнику – коли здійснює коливання сумісно з її віссю. Такий різновид коливальної системи в літературі одержав назву хитної пружини (*swinging spring*).

За допомогою хитної пружини наочно ілюструється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями. При цьому повинен враховуватися також вплив початкових умов ініціювання коливань. Особливе значення має дослідження умов виникнення стану резонансу хитної пружини. Тобто коли частота поздовжніх коливань відрізнятиметься у кратну кількість разів від частоти поперечних коливань. Крім поширеного «класичного» випадку (резонансу 2:1) доцільно розв'язувати задачі з іншими значеннями відношення частот. Наприклад, виникає необхідність [36] побудувати траєкторії руху вантажу для випадків таких резонансів: 2:1, 7:3, 9:4, 11:2 та інших. Знайдені геометричні форми траєкторії руху вантажу хитної пружини із заданими параметрами допоможуть визначити характеристики розв'язку обраної задачі.

В роботах [1, 56] наведено велику кількість можливих впроваджень на базі застосування ідеї коливань хитної пружини. Значна частка з цього переліку має безпосереднє відношення до порушення стійкості й керованості літаків або швидкохідних кораблів у процесі їх руху. При розрахунках переміщення динамічної системи у просторі (корабля або літака) необхідно враховувати обмін енергією між поперечними і шляховими (подовжніми) коливаннями як компонентами системи. В більшості випадків частоти цих коливань приймають як співвідношення 2:1. Але для ретельніших досліджень доцільно розглядати інші відношення частот. Особливо це стосується досліджень динаміки коливань літаків типу «голландський крок» (Dutch roll) [37]. Такі коливання виникають у випадку великої поперечної стійкості літака в порівнянні з малою шляховою стійкістю. Тоді бічний рух літака характеризуватиметься взаємозалежними коливаннями за креном і ковзанням. Причому коливання за ковзанням відстають по фазі від коливань за креном, що пов'язано зі слабкою шляховою й надмірною поперечною стійкістю. Крен літака є причиною виникнення ковзання літака, усунення якого відбувається із запізненням через слабку шляхову стійкість. Ковзання, яке при цьому вини-

кає, провокує необхідність аварійного крену літака у протилежний бік через підвищену поперечну стійкість, і процес повторюється. Для гасіння коливань на літаках застосовуються демпфери нищпорення, розрахунок яких доцільно виконувати із залученням поняття перекачування енергій хитної пружини у стані резонансу.

Видозмінена модель хитної пружини – модель гнучкої нитки – важливу роль відіграє у будівельній механіці. Адже гнучка нитка – це своєрідна пружина, що діє тільки на розтягнення. У типовій двовимірній моделі гнучка нитка одночасно може здійснювати поперечні коливання у своїй площині (аналог кутових коливань хитної пружини з вантажем) і маятникові коливання, що поєднують опорні закріплення (аналог вертикальних коливань). Прикладом є дроти високовольтних ліній, на стан яких впливають пориви вітру. У випадку співвідношення частот 1:2 зазначених коливань відбувається втрата динамічної стійкості, й тоді виникають поперечні коливання нитки, амплітуда яких може досягати досить великих значень. Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати при розрахунку різноманітних конструкцій будівельної механіки (висячих мостів, вантово-балкових систем, канатних доріг, ліній електропередачі, різноманітних антен тросових системи для утримання об'єктів, гнучких шлангів тощо).

Ідею використання хитних пружин у якості механічної моделі доцільно розвивати для аналізу сучасних технологічних процесів як динамічних систем. Ці системи можуть складатися з нелінійно зв'язаних коливальних компонентів, які обмінюються енергією між собою. Коливання хитної пружини доцільно розглядати у сукупності з геометричним компонентом – траєкторією руху її вантажу. У результаті чого з'явилася можливість характеризувати резонанс коливання хитної пружини за допомогою періодичних траєкторій, виділених із можливих рухів під час коливань вантажу хитної пружини. Причому для синтезу траєкторії необхідно використовувати не лише головні параметри хитної пружини, але й параметри початкових умов ініціювання коливань. Адже в цьому випадку найбільш ефективно відбувається кутове розгойдування хитної пружини за рахунок енергії цієї пружини. Розвиток випадкового поперечного збурення відбуватиметься до фіксованого значення амплітуди, оскільки запаси енергії пружини є вичерпними. Після досягнення такої амплітуди в ході коливань хитної пружини знову відбувається розтягування (або стискання) пружини.

У роботі [103] наведено феноменологічний спосіб побудови контуру вертикального перерізу поверхні рідини в ємності, яка коливається завдяки руху цієї ємності. Зазначені контури називають хвилями Фарадея. Спосіб оснований на механічній «маятниковій» аналогії процесу коливання рідини. А саме, хвилі Фарадея інтерпретуються як траєкторії руху вантажу математичного маятника (не пружини), підвішеного до рухо-

мого візка. Обговорюються питання складання формул, які б наближено пов'язали параметри рідини з параметрами маятника під візком. Базуючись на ідеї цього прикладу розглянемо наступне.

Як гіпотезу сформулюємо передумову використання моделі хитної пружини. Для відшукування розв'язку розглянутого класу задачі необхідно в її постановці визначити дві (як приклад) нелінійно зв'язані коливальні компоненти, які обмінюються енергією між собою. Далі слід визначити головні параметри системи (які суттєво впливають на розв'язок) та поставити їх у відповідність параметрам хитної пружини - її жорсткості, довжині у ненавантаженому стані та масі вантажу. А також параметрам, які визначають початкові умови коливань хитної пружини - початковому куту відхилення пружини та швидкості його зрушення. Тоді шуканий розв'язок поставленої задачі можна пов'язати з періодичною траєкторією руху вантажу хитної пружини. І серед множини періодичних траєкторій руху необхідно шукати траєкторію найменшої довжини. Порівнювати особливості резонансних траєкторій можна за умови щільності пікселів, які складають зображення певної траєкторії. Згідно із загальним принципом «мінімальної енергії» логічно вважати, що саме випадок з найкоротшою періодичною траєкторією (вірніше, з одним її періодом) буде цікавим під час реалізації конкретного впровадження. Одержану періодичну траєкторію руху вантажу завжди можна представити у цифровому вигляді як послідовність координат точок, що її складають.

Із зазначених позицій цікаво буде дослідити нелінійні зв'язані системи із взаємодіючими підсистемами на прикладах задач техніки.

Труднощі розвитку досліджень у цьому напрямку виникнуть при спробі визначати резонансний стан у разі дослідження коливань просторової хитної пружини.

4.2 Моделювання траєкторії точки на дроті електропередачі в умовах поривів вітру

Розглядається модель прольоту лінії електропередачі в умовах поривів вітру. Для цього обрано уявну площину, розташовану по нормалі до напрямку прольоту (нормальну площину). На площині оберемо точку, що є слідом перерізу дроту лінії електропередачі. В роботі наведено спосіб побудови траєкторії обраної точки за умови, що на дрот впливають пориви вітру. Особливість досліджень полягає у використанні для цього механічного аналогу - хитної пружини (swinging spring). Тобто різновиду маятника, який складається з точкового вантажу, приєднаного до невагомої пружини. Другий кінець пружини фіксується нерухомо. Досліджуються маятниковоподібні коливання пружини у вертикальній площині, за умови збереження прямолінійності її осі. Доцільність вибору такого аналогу пояснюється необхідністю вивчення динамічної системи «провід у поривах вітру», коли нелінійно зв'язані коливальні компоненти обміню-

ються енергією між собою. Дійсно, у випадку коливання точки на дроті (у нормальній площині) відбувається обмін енергіями між поперечними (горизонтальними) і поздовжніми (вертикальними) коливаннями точки. Цей феномен можна дослідити за допомогою математичного апарату хитної пружини, яка ілюструє обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями.

При цьому особливе значення має можливість дослідження стану резонансу. Для проводів резонанс настає тоді, коли частота горизонтальних коливань відрізняється у два рази від частоти вертикальних коливань точки на дроті (у нормальній площині). Аналогічне має місце і для хитної пружини, де у випадку резонансу частота поздовжніх коливань відрізняється у два рази від частоти поперечних коливань. Дослідження базуються на головних положеннях механіки Лагранжа, за допомогою якої були описані траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини.

Для передачі електричного струму на великі відстані використовуються повітряні лінії високої напруги. Протяжність таких ліній може досягати декількох кілометрів, на яких встановлені високовольтні опори для відділення дротів від землі. У прольотах опор дроти можуть вільно коливатися. Під впливом поривів вітру на лініях виникає танець дротів, здатний порушити нормальний режим роботи енергосистеми. Вплив вітру відбувається за умов будь-якого напрямку потоку, як у горизонтальній площині, так і під якимось кутом. І що характерно – навіть припинення пориву вітру не означає закінчення вібрації, адже через велику протяжність ліній в них виникають власні коливання – горизонтальні й вертикальні (у площині, перпендикулярній до напрямку прольоту). Ці коливання не потребують підтримки, а тривають за рахунок резонансних явищ.

При цьому нелінійно зв'язані коливальні компоненти системи обмінюються енергією між собою. За допомогою хитної пружини ілюструється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями. Це актуально і для коливання дротів електропередач, особливо з урахуванням їх стану резонансу – коли частота вертикальних коливань точки на дроті у нормальній площині відрізняється у два рази від частоти горизонтальних коливань.

Гасіння вібрацій і танців дротів відбувається завдяки встановленню спеціальних пристроїв. Для визначення їх ефективності під час проектування актуальними будуть дослідження, спрямовані на моделювання траєкторії коливання точки у нормальній площині, розташованої, наприклад, на середній частині прольоту лінії електропередачі.

У статтях [104, 105] наведено огляди робіт, присвячених дослідженню коливання дротів. Чисельне моделювання руху проводу ЛЕП під дією вітру розглянуто у роботі [106]. Пояснення фізичних причин виникнення танців дротів викладено у роботах [107, 108]. Цікавою є робота

[109], де наведено спосіб моделювання траєкторії точки на дроті з використанням аналогу хитної пружини. Але відкритим залишилося дослідження впливу на резонанс параметрів хитної пружини – наприклад, її жорсткості.

Побудуємо траєкторію руху по нормальній площині вантажу хитної пружини та визначимо стан її резонансу залежно від її жорсткості.

Розглянемо на нормальній площині з декартовими координатами Oxy коливальну систему типу «хитна пружина». Нехай пряма, натягнута між точками A і B кріплення дроту, перетинає площину в точці C (рис. 4.1), яка вважається нерухомою.

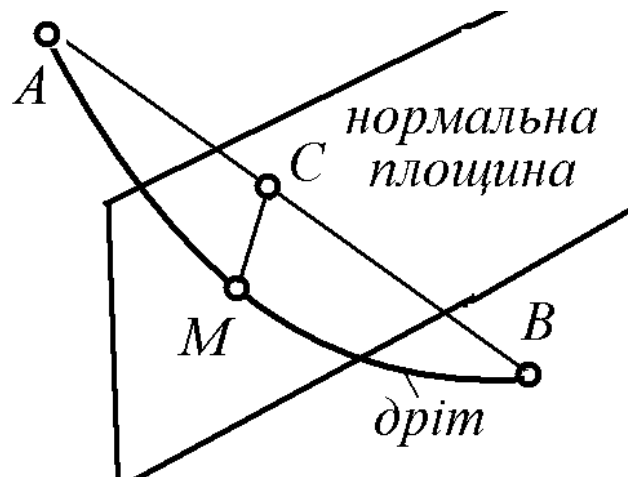


Рис. 4.1 – Нормальна площина та хитна пружина CM

Слід провисаючого дроту на площині позначимо як M . Тоді відрізок CM буде умовним зображенням хитної пружини з вантажем у точці M . Жорсткість пружини позначимо як k , через h позначимо довжину пружини без вантажу, масу вантажу позначимо m , а через H – довжину пружини з вантажем у рівноважному (вертикальному) стані, g – прискорення земного тяжіння. Точка M в момент часу t матиме координати $M(X(t); Y(t))$. Ці координати матиме і вантаж пружини.

Рівняння руху хитної пружини має вигляд [49]:

$$\ddot{x}(t) + \omega_x^2 x(t) = \lambda x(t) y(t); \tag{4.1}$$

$$\ddot{y}(t) + \omega_y^2 y(t) = \lambda x(t)^2 / 2,$$

де $\omega_x = \frac{g}{H}$; $\omega_y = \frac{k}{m}$; $\lambda = k \frac{h}{H^2}$. Частота ω_x визначає коливання точкової маси горизонтально, а значення ω_y описує частоту по вертикалі. Якщо $\lambda=0$, то рівняння (4.1) описують незалежні коливання точки.

Для застосування пружинної аналогії фізичні характеристики дротів слід зіставити з параметрами хитної пружини. Масу вантажу m логічно пов'язати із приведеною масою дроту, через h позначити довжину проєкції на нормальну площину дроту у спокої, а через H – довжину проєкції дроту на нормальну площину, який вже знаходиться у навантаженому вітром стані.

При цьому (x_0, y_0) – початкові координати рухомої точки на нормальній площині, а Dx_0 і Dy_0 – спричинені миттєвим поривом вітру початкові швидкості рухомої точки уздовж відповідних осей координат. Змінним параметром обрано жорсткість пружини k , яку – у випадку дротів – можна пов'язати з їх фізико-механічними та конструктивними характеристиками.

В якості тесту розв'яжемо систему рівнянь (4.1) з такими значеннями параметрів: $h = 0,5$; $H = 1,9$; $m = 1$; $g = 9,81$, та з початковими умовами: $x_0 = 0$; $Dx_0 = 0,3$; $y_0 = -0,2$; $Dy_0 = 0$. Всі величини подано в умовних одиницях.

На рис. 4.2–4.4 зображено траєкторії руху (позиції «а») по нормальній площині вантажу хитної пружини (що є слідом дроту) та графіки відстані рухомої точки до відповідних координатних осей (позиції «б» і «в») за умов жорсткостей $k = 75$; $k = 79$ і $k = 85$ відповідно.

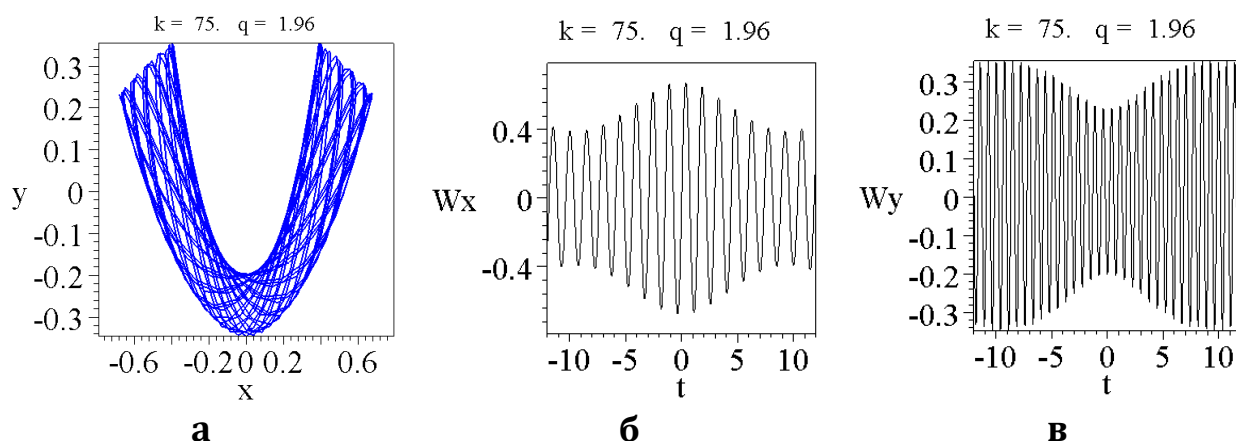


Рис. 4.2 – Траєкторія і графіки відстані при $k = 75$ і $q = 1,96$

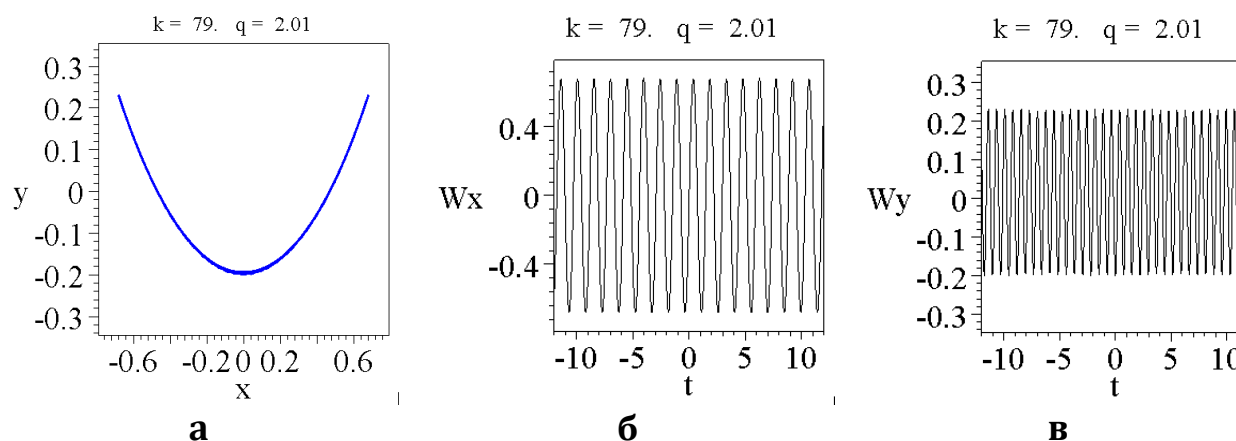


Рис. 4.3 – Траєкторія і графіки відстані при $k = 79$ і $q = 2,01$

Там же наведено обчислене відношення $q = \omega_y / \omega_x$, яке визначає

резонанс за умови, коли $\omega_x = \sqrt{\frac{g}{h}}$ і $\omega_y = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частоти коливань точки по

горизонталі й вертикалі. При $k = 79$ одержуємо значення $q = 2,01$, що вказує на резонанс хитної пружини (і дроту).

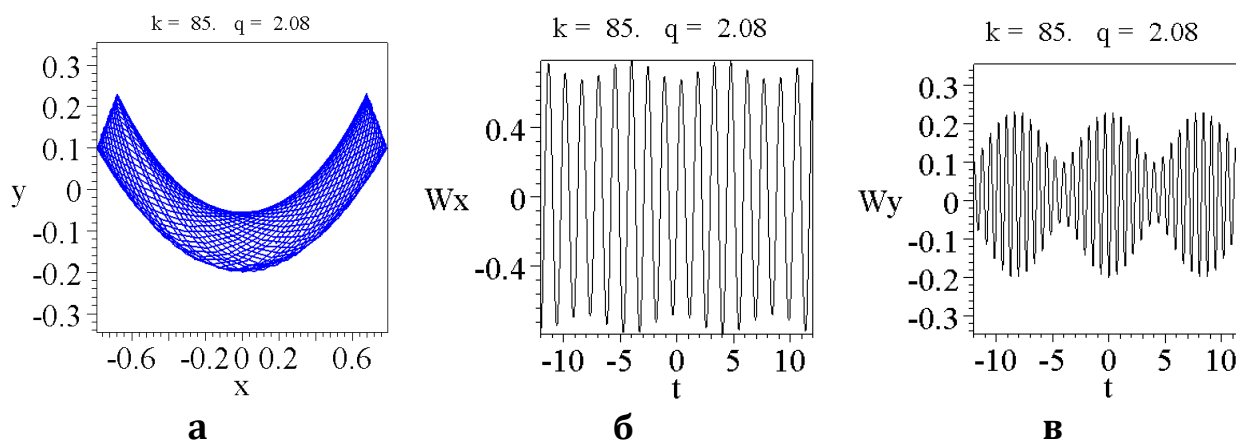


Рис. 4.4 – Траєкторія і графіки відстані при $k = 85$ і $q = 2,08$

Для перевірки скористаємося результатами роботи [109]. Систему рівнянь (4.1) там розв'язано з умовами: $h = 0,6614$ м; $H = 0,82$ м; $m = 0,0485$ кг; $k = 2,3$ Н/м; $g = 9,81$ м/с², $x_0 = 0$ м; $Dx_0 = 0,78$ м/с; $y_0 = -0,1$ м; $Dy_0 = 0$ м/с. На рис. 4.4 зображено траєкторію руху (позиція «а») та графіки відстані точки до координатних осей (позиції «б» і «в»), які є близькими до результатів роботи [6]. При цьому $\omega_y / \omega_x = 1,722$, що не є резонансом. Але коли обрати $k = 3$ Н/м, то одержимо $\omega_y / \omega_x = 2,042$, що ближче до стану резонансу. На рис. 4.5 наведено траєкторію руху та графіки відстані точки до координатних осей для $k = 3$ Н/м.

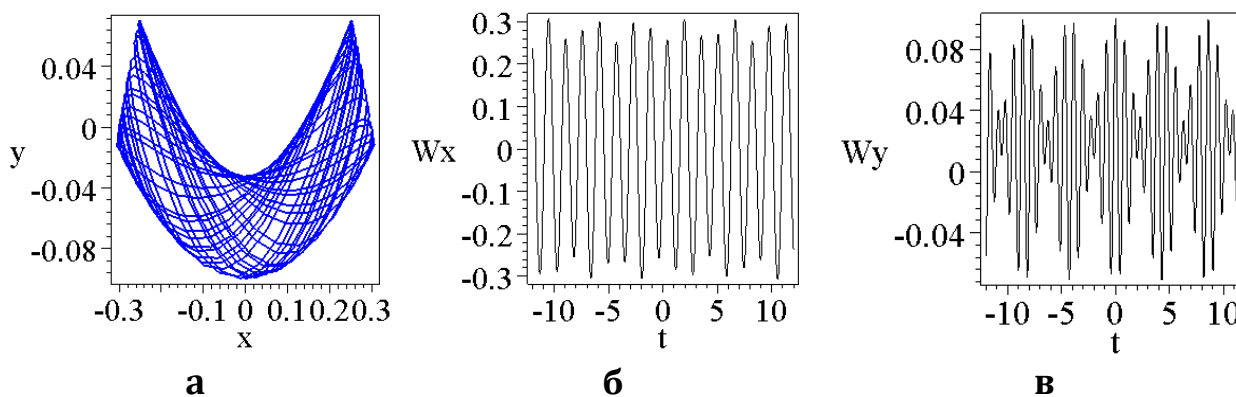


Рис. 4.5 – Траєкторія і графіки відстані, одержані в роботі [109]

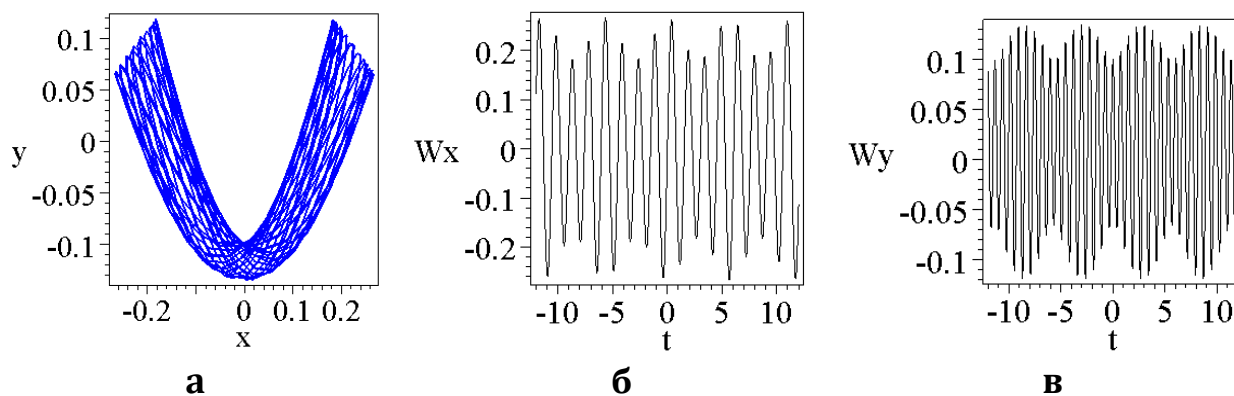


Рис. 4.6 – Траєкторія і графіки відстані для $k = 3 \text{ Н/м}$

Побудована траєкторія руху по нормальній площині вантажу хитної пружини дозволяє аналізувати коливання дроту під поривами вітру, а також опосередковано визначити стан резонансу дротів на основі аналогії їх коливань із коливаннями хитної пружини.

4.3 Моделювання процесу роздрібнення газової бульбашки на основі його аналогії з хитною пружиною

Гасіння газорідними сумішами пожеж у вертикальних резервуарах, що містять легкозаймисті рідини, повинно супроводжуватись постійним роздрібнюванням у цих сумішах газових бульбашок. Механічний спосіб дозволяє роздрібнювати бульбашки завдяки акустичним хвилям тиску, утвореним ударами по металевій мембрані. Більш прогресивний спосіб роздрібнення передбачає вплив акустичної хвилі безпосередньо на бульбашки. Це дозволяє шляхом зміни частоти тиску втручатись у процес подрібнення бульбашки, що впливає на якість газорідної суміші. В роботах Петрова О.Г. та його учнів запропоновано резонансну модель подрібнення газової бульбашки в рідині у нестационарному полі тиску. Резонансне дроблення бульбашки в рідині здійснюється за рахунок перекачування енергії між радіальною і деформаційною модами коливань. При цьому спостерігається цікавий ефект – за відносно невеликої амплітуди змінного тиску акустичної хвилі у рідині розвивається досить велика амплітуда деформаційних коливань – завдяки якій і здійснюється дроблення бульбашки.

В даній монографії цей феномен досліджується за допомогою математичного апарату хитної пружини, яка ілюструє обмін енергіями між маятниковими і пружинними коливаннями.

Для гасіння легкозаймистих рідин у вертикальних резервуарах застосовується підпрошаркова технологія пожежогасіння. Вона передбачає подачу вогнегасної суміші безпосередньо у глибинні шари рідини. Для цього застосовується плівкоутворювальний фторсинтетичний піноутво-

рювач. Піна не абсорбує на поверхні своїх бульбашок із легкозаймистою рідиною під час проходження через її шар і утворює на поверхні газонепроникну плівку. Такі властивості забезпечують умови ліквідації пожежі. Актуальними будуть питання підготовки фторсинтетичного піноутворювача, зокрема, для його ефективнішого використання виникає проблема роздрібнення бульбашок.

В роботі [110] для підпрошаркового способу пожежогасіння запропоновано механічний метод роздрібнення бульбашок імпульсами акустичного тиску, які формувалися ударами по металевій мембрані. Прогресивніший спосіб роздрібнення полягає у безпосередньому впливі на газові бульбашки у рідині акустичною хвилею. В роботах [111–113] запропоновано резонансну модель подрібнення газової бульбашки в рідині. Резонансне дроблення бульбашки здійснюється за рахунок перекачування енергії між радіальною і деформаційними модами коливань. Показано, що за умов відносно невеликої амплітуди коливань тиску акустичної хвилі у рідині розвивається досить велика амплітуда деформаційних коливань для дроблення – завдяки якій і здійснюється дроблення бульбашки.

У бульбашки відбувається обмін енергіями між радіальними і деформаційними коливаннями. Цей факт у нашій монографії досліджується за допомогою математичного апарату хитної пружини, де аналогічно здійснюється обмін енергіями між поперечними (маятниковими) і поздовжніми (пружинними) коливаннями. В результаті поставлено задачу розробити практичний спосіб геометричного моделювання роздрібнення газової бульбашки.

Далі розробимо інженерний спосіб унаочнення процесу роздрібнення сферичної газової бульбашки з використанням хитної пружини як аналогу цього процесу.

Використаємо спосіб, описаний в роботі [116], для визначення періодичної траєкторії вантажу хитної пружини (рис. 4.7) з рухомою точкою кріплення. Закон руху точки задамо функцією $y=f(t)$.

Також задані: маса m вантажу, жорсткість k пружини, початкова довжина h пружини у ненавантаженому стані, а також початкові умови виникнення коливань. Як узагальнені координати оберемо значення кута $u(t)$, який вісь хитної пружини утворює з вертикальною віссю Oy , а також величину $v(t)$, пов'язану зі зміною довжини пружини в часі. Тоді координати точкового вантажу обчислимо так:

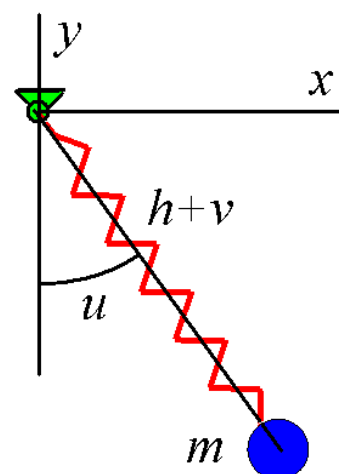


Рис. 4.7. Схема хитної пружини

$$x = (h + v)\sin u; y = -(h + v)\cos u \quad (4.2)$$

Лагранжیان задамо як різницю кінетичної й потенційної енергій:

$$L = 0,5m \left(\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + v^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right) - 0,5k(v - h)^2 - m \left(9,81 + \frac{d^2 f}{dt^2} \right) v \cos u. \quad (4.3)$$

В результаті маємо систему рівнянь Лагранжа другого роду:

$$2m \frac{d^2 v}{dt^2} + m \frac{d^2 f}{dt^2} \cos u - 2mv \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + k(v - h) + 9,81m \cos u = 0 \quad (4.4)$$

$$-2v \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d^2 f}{dt^2} \sin u - 4 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g \sin u = 0$$

Для прикладу розглянемо хитну пружину з параметрами: $m = 15$; $k = 202,8$; $h = 2,5$ і з початковими умовами: $u(0) = 2,5$; $du(0) = 0$; $v(0) = 0$; $dv(0) = 3$. Закон руху точки кріплення задамо функцією $y = 0,25\sin(t)$. Всі величини подано в умовних одиницях. Ці параметри обрано так, щоб хитна пружина була у стані резонансу [116]. Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (4.4) відносно функцій $u(t)$ і $v(t)$. Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини слід у виразі (4.2) віртуальних координат (x, y) підставити одержані розв'язки системи (4.4). В результаті знайдемо графіки відстаней від рухомої точки до відповідних координатних осей (рис. 4.8 і 4.9), а також наближене зображення траєкторії руху вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення (рис. 4.10).

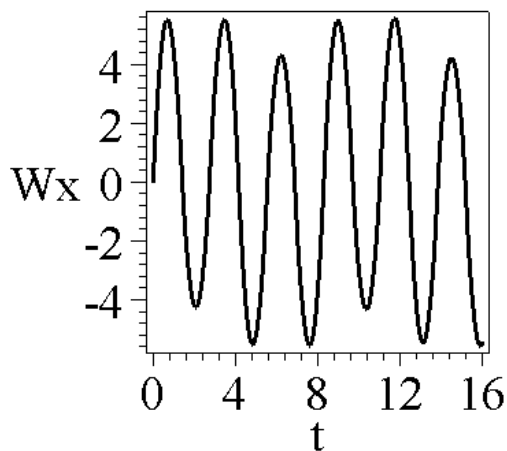


Рис. 4.8 — Графік відстаней до осі Oy

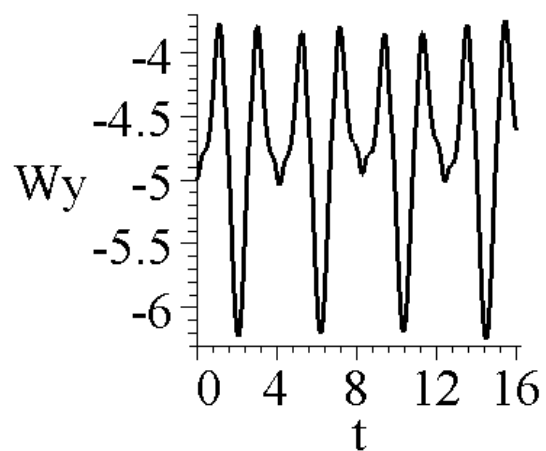


Рис. 4.9 — Графік відстаней до осі Ox

Графіки відстаней показують, що періоди горизонтальних коливань приблизно у два рази більше періодів вертикальних коливань. Це вказує на те, що хитна пружина буде у стані резонансу. Це підтверджує і періодична траєкторія руху її вантажу.

Об'єднаймо задачу про дроблення газової бульбашки з розглянутою вище задачею про хитну пружину.

У випадку виведення з рівноважного стану газової бульбашки виникають коливання, які можна розділити на два класи – радіальні, пов'язані зі зміною об'єму за незмінної (сферичної) форми, і деформаційні, зумовлені зміною геометричної форми.

Для побудови аналогії процесу дроблення газової бульбашки з коливанням хитної пружини необхідно встановити зв'язок між їх компонентами. А саме – радіальній моді коливань бульбашки відповідає координата точкового вантажу пружини по вертикалі, а деформаційній моді – координата по горизонталі. Вібрації точки підвісу пружинного маятника відповідає змінний тиск у рідині, який генерується поза рідиною з метою дроблення бульбашки.

У резонансному випадку радіальна і деформаційна моди коливань періодично міняються місцями, й енергія однієї моди переходить в іншу, чим і зумовлена цікавість до феномену хитної пружини. При перетіканні енергії радіальних коливань амплітуда резонансної деформаційної моди коливання бульбашки аномально різко зростає, що дає змогу роздрібнити бульбашку в рідині в разі порівняно малих енергетичних витрат на генерування змінного зовнішнього акустичного поля тисків. Тобто за відносно невеликої амплітуди тиску акустичної хвилі розвивається досить велика амплітуда деформаційних коливань, завдяки чому і відбувається дроблення газової бульбашки.

Позначимо радіальну і деформаційну моди коливань як r і d , відповідно. Тоді для побудови певних фаз процесу роздрібнення газової бульбашки можна використати рівняння

$$F = (f_1 + f_2 - f_0)d + |f_1 - f_2|d + f_0 = 0, \quad (4.5)$$

де $f_0 = 4r^2 - x^2 - y^2 - z^2$; $f_1 = r^2 - (x-1)^2 - y^2 - z^2$; $f_2 = r^2 - (x+1)^2 - y^2 - z^2$.

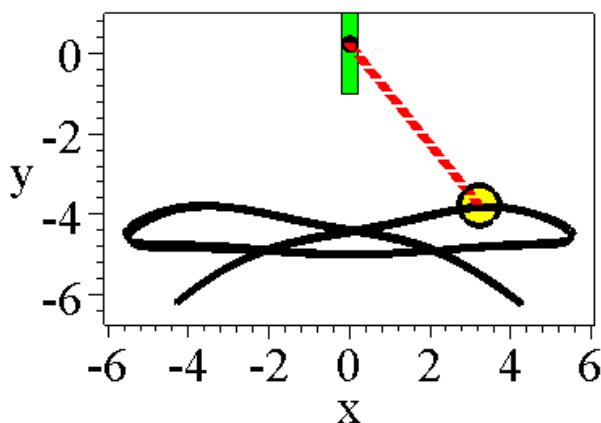


Рис. 4.10 – Траєкторія вантажу хитної пружини з рухомою точкою підвісу

Адже мода коливань описує цілий клас перетворень. У нашому випадку – всі можливі радіальні коливання, а також всі можливі деформаційні коливання.

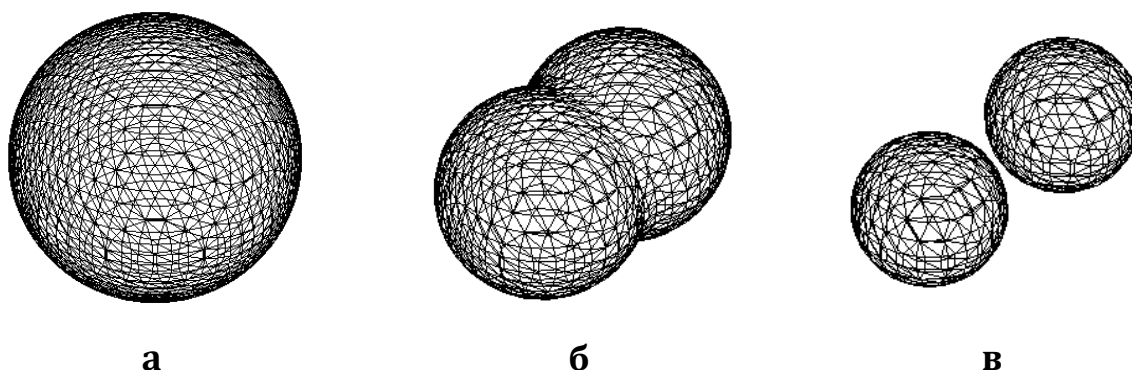


Рис. 4.11 – Геометрична модель фаз роздрібнення бульбашки ($r=0,5$):

а) початкова ($d=0$); б) проміжна ($d=0,5$); в) заключна ($d=1$)

Резонансний стан хитної пружини дозволяє визначити значення радіальної і деформаційної мод коливань. На рис. 4.11 наведено зображення певних фаз процесу роздрібнення для $r = 0,5$ і $d = 1$. Процес роздрібнення можна продемонструвати з використанням комп'ютерної анімації.

Отже, процес роздрібнення сферичної газової бульбашки можна пов'язати з коливаннями хитної пружини як його аналогу.

4.4 Розрахунок відбивача пожежного сповіщувача диму з наносенсорним чутливим датчиком

Розглянуто спосіб розрахунку відбивачів пожежних сповіщувачів диму, профіль чутливих елементів яких визначається фокальною лінією неточкового приймача променів.

Для протипожежного захисту майна часто застосовують фотоелектричні сповіщувачі диму [117], з оптичної частини яких виходить промінь і допомагає визначити кількість диму в повітрі (рис. 4.12).



Рис. 4.12 – Схема детекторного сповіщувача диму

Сучасні розробки сповіщувачів диму використовують наноконпозиційні матеріали, що визначають основу нового типу хімічних сенсорів «електронний ніс» [118]. Принцип дії наносенсорних чутливих датчиків оснований на зміні електропровідності наноконпозиційної плівки під дією парів речовини (рис. 4.13).

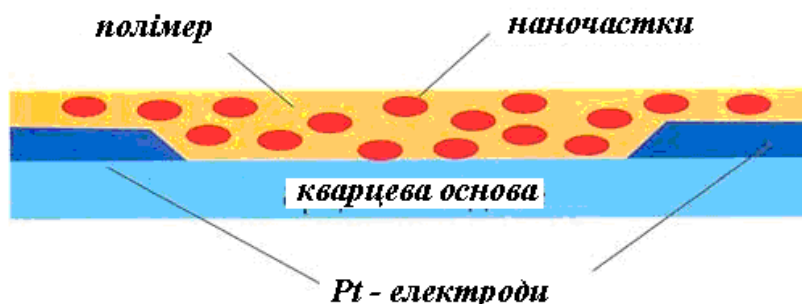


Рис. 4.13 – Схема чутливої частини сповіщувача диму

Для підвищення ефективності дії сповіщувачів диму з наноконпозиційними матеріалами доцільно доповнити їх конструкції пристроями для концентрування часток диму на чутливій поверхні наносенсорного датчика.

На рис. 4.14 наведено можливу схему наносенсорного сповіщувача диму. Принцип його дії полягає у наступному. Частка диму (розміром 5–10 мкм [119, 120]) розганяється в електричному полі, створеному різницею потенціалів між кільцем і відбивачем (діаметр кільця – 50–70 мкм).

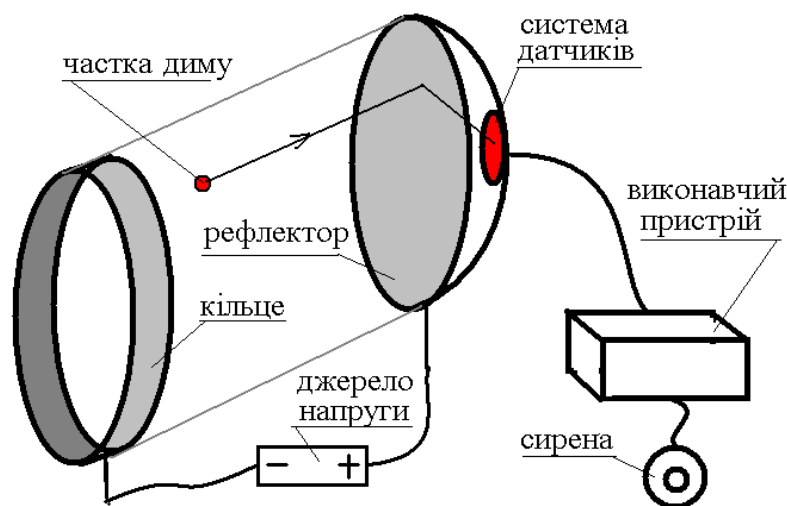


Рис. 4.14 – Запропонована схема наносенсорного сповіщувача диму

Після механічного відбиття частка потрапляє до системи датчиків і реєструється виконавчим пристроєм. Звідси впливає актуальність геометричної проблеми – розрахувати форму відбивача так, щоб спрямований на неї паралельний потік часток диму сконцентрувався на активній

поверхні датчика наперед обраної форми. Враховуючи, що відбивачем планується обирати поверхню обертання, то далі розглядається хід променів (тобто траєкторій руху частки) в осьовому перерізі цієї поверхні.

Ще раз наголосимо, що для підвищення ефективності дії сповіщувачів диму з наноконпозиційними матеріалами доцільно доповнити їх конструкції пристроями (відбивачами) для концентрування часток диму на чутливій поверхні наносенсорного датчика. У випадку рухомого відбивача, на який діють вібрації, його геометрична форма може змінюватися. Це позначиться на якості фокусування.

Для усунення цього недоліку пропонується така гіпотеза. У випадку рухомого відбивача стабільність форми його профілю для наносенсорного чутливого датчика можна погодити з періодами вертикальних і горизонтальних коливань хитної пружини. Наприклад, резонанс 3:1 можна забезпечити при $h = 0,1$; $m = 0,18$ і $k = 150$. Тоді періоди мають значення

$$T_y = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} = 0,2177 \quad \text{і} \quad T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,6344,$$

відношення яких дорівнює

2,9146, що наближено визначає резонанс 3:1. На рис. 4.15 наведено хитну пружину, траєкторія вантажу якої окреслює профіль відбивача, стійкого до такого резонансу.

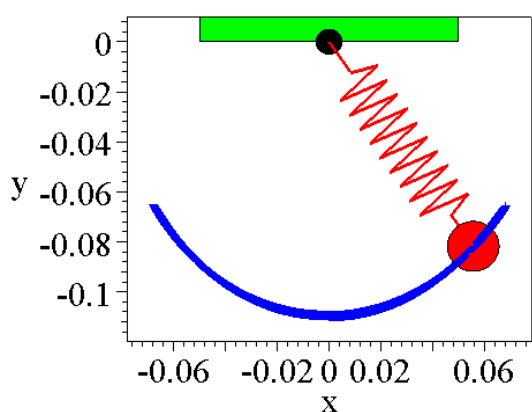


Рис. 4.15 — Форма відбивача для резонансу 3:1

мені «розташуються» паралельно у напрямку осі Ox .

При цьому кожній точці фокальної лінії повинна відповідати точка на квазіпараболі. Для цього шукану відбивальну криву необхідно описати рівнянням $y = f(x)$. Позначимо через $S(x_s, y_s)$ точку джерела променів, через $Q(x_Q, y_Q)$ – точку уявного джерела променів, що відповідає точці $M(x, y)$ падіння променя, а через $T(x_T, y_T)$ – деяку точку на відбитому промені.

Для складання диференціального рівняння відносно функції $f(x)$ було використано рівняння ортотоміки [124]:

У роботах [121, 122] наведено метод розрахунку відбивача шляхом складання диференціальних рівнянь, розв'язком яких буде опис відбивача з неточковими фокусами.

Оберемо на площині Oxy дугу фокальної лінії $x_s = X(t)$; $y_s = Y(t)$ (наприклад, фрагмент дуги еліпса), де параметр t змінюється у межах $t_1 \leq t \leq t_2$. Нехай джерелом променів є кожна з точок $\{S\}$ фокальної лінії. У роботі [123] наведено спосіб визначення форми такої кривої (квазіпараболи), для якої відбиті від неї промені «розташуються» паралельно у напрямку осі Ox .

$$x_Q(x) = \frac{(2x - x_S)F^2 - 2(f - y_S)F + x_S}{1 + F^2}; \quad (4.6)$$

$$y_Q(x) = \frac{y_S F^2 - 2(x - x_S)F - y_S + 2f}{1 + F^2},$$

де $F = \frac{df}{dx}$.

Розглянемо відрізок QT прямої, що проходить через точку падіння променя $M(x, f(x))$, їй відповідну точку $Q(x_Q, y_Q)$ на ортотоміці та точку $T(x_T, y_T)$ на відбитому промені. Маємо рівняння відрізка QT :

$$(x_T - x_Q)(f(x) - y_Q) - (y_T - y_Q)(x - x_Q) = 0 \quad (4.7)$$

де значення x_Q і y_Q задано виразами (4.6). Вилучимо з (4.7) похідну:

$$\frac{df}{dx} = \frac{U + \sqrt{W}}{V}, \quad (4.8)$$

де

$$\begin{aligned} U &= x^2 - f^2 - x x_T + y_T f + x_T x_S - y_T y_S + y_S f - x x_S; \\ V &= x_T f + x_S f - y_T x_S + x y_S - 2x f - x_T y_S + x y_T; \\ W &= ((y_T - f)^2 + (y_T - x)^2)((x - x_S)^2 + (f - y_S)^2). \end{aligned}$$

Вираз (4.8) буде саме тим диференціальним рівнянням, що допоможе знайти функцію $y = f(x)$. Новим у монографії є програмна реалізація розв'язання диференціального рівняння (4.8).

Наведемо спосіб розрахунку відбивачів пожежних сповіщувачів диму, профіль чутливих елементів яких визначається фокальною лінією неточкового приймача променів.

З диференціального рівняння (4.8) можна знайти функцію $y = f(x)$, графік якої збігається із профілем відбивача, для якого промінь, що вийшов із точки $S(x_S, y_S)$, після відбиття від знайденого графіка має досягти точки $T(x_T, y_T)$. Оскільки формула є «симетричною» відносно координат точок S і T , то має місце і «обернене» твердження: промінь, який вийшов із точки $T(x_T, y_T)$, після відбиття від знайденого графіка досягне точки $S(x_S, y_S)$.

У роботах [125–131] запропоновано визначення квазіпараболи – як кривої, яка за оптичними властивостями є подібною традиційній параболі, але фокус якої буде не точковим, а розосередженим уздовж фокальної лінії. Для складання диференціального рівняння квазіпараболи необ-

хідно у рівнянні (4.8) врахувати, що при $x_T = 0 ; y_T \rightarrow \infty$. В результаті граничного переходу одержимо рівняння:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x) - y_S + \sqrt{(x - x_S)^2 + (f(x) - y_S)^2}}{x - x_S}. \quad (4.9)$$

За умови $t_1 \leq t \leq t_2$ кожній точці $A(x, f(x))$ квазіпараболи відповідати-муть точки фокальної лінії:

$$x_S = \varphi\left(t_2 - \frac{(t_2 - t_1)(b - x)}{b - a}\right); y_S = \psi\left(t_2 - \frac{(t_2 - t_1)(b - x)}{b - a}\right). \quad (4.10)$$

Для «прив'язки» точки $S(x_S, y_S)$ до дуги «фокальної» лінії достатньо врахувати її опис $x_S = \varphi(t); y_S = \psi(t)$, де t змінюється у межах $t_1 \leq t \leq t_2$, а також те, що при цьому головним керуючим параметром буде x з інтервалу $[a \leq x \leq b]$. Поставити змінній x у відповідність точки дуги фокальної лінії можна за формулою: $t = t_2 - \frac{(t_2 - t_1)(b - x)}{b - a}$. Тоді коли змінна x «пробігатиме» точки інтервалу $[a...b]$, то точка $S(x_S, y_S)$ «пробігатиме» відповідні точки дуги фокальної кривої. Якщо джерело променів розташоване у точці $T(x_T; y_T)$, то з рівняння (4.8) можна знайти опис $y = f(x)$ відбивальної кривої, яка б проходила через точку $K(x_K; y_K)$ так, щоб відбиті від неї промені перетнули всі точки кривої (4.10), за умови $a \leq x \leq b$. Координати точки $K(x_K; y_K)$ визначатимуть початкові умови розв'язання рівняння (4.9).

Як приклад розглянемо на площині Oxy фокальну криву з рівнянням $x = x_0 + c \cos t; y = y_0 + d \sin t$, де параметр t змінюється у межах $t_1 \leq t \leq t_2$. Прив'язку до фокальної кривої здійснимо виразами: $x_S = x_0 + c \cos(t); y_S = y_0 + d \sin(t)$, де $t = t_2 - \frac{(t_2 - t_1)(b - x)}{b - a}$. В наведених прикладах вважається, що падаючі промені будуть паралельними і спрямованими «назустріч» осі Ox (на рисунках не показано). У формулах збережено синтаксис мови Maple.

Приклад 1. Нехай профіль чутливого елемента має вигляд відрізка. На рис. 4.16 наведено варіант розрахунків для параметрів: $a = -66; b = 45; x_K = 40; y = 100; t_2 = 0; c = 0,1; d = -60; x_0 = -40; y_0 = 0$. Зображено відбивальну криву на полі ізоклін (а), а також сім'ю променів, що нею відбиті на чутливий датчик (б).

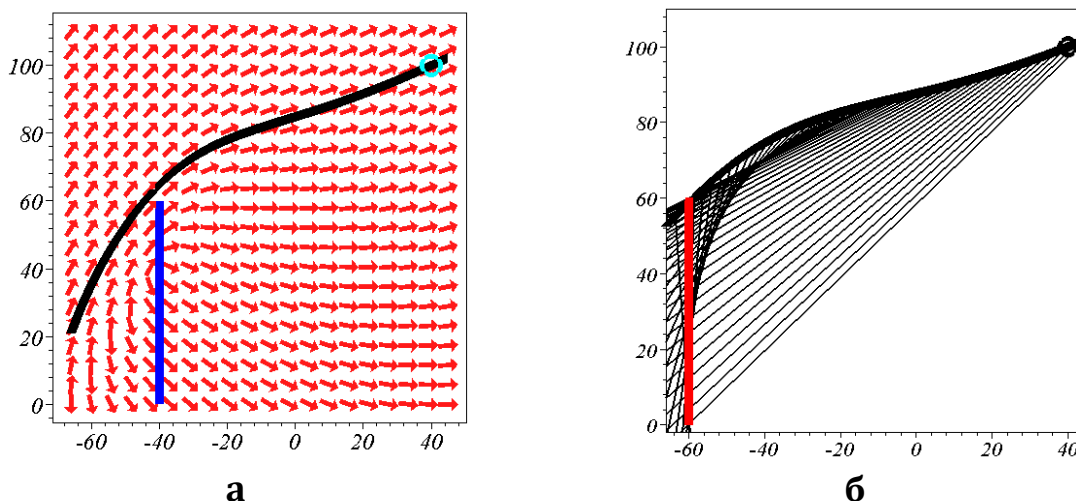


Рис. 4.16 — Поле ізоклін і відбивальна крива (а) та сім'я відбитих від неї променів (б)

Графіки одержано в результаті розв'язання диференціального рівняння. У формулах збережено синтаксис мови Maple:

$$\frac{d}{dx} f(x) = (-40 + 0.1 \cos(-1.273 + 0.02829 x) - x + (x^2 - 2x(-40 + 0.1 \cos(-1.273 + 0.02829 x)) + 120. \sin(-1.273 + 0.02829 x) f(x) + 3600. \sin(-1.273 + 0.02829 x)^2 + f(x)^2 + (-40 + 0.1 \cos(-1.273 + 0.02829 x))^2)^{(1/2)} / (60. \sin(-1.273 + 0.02829 x) + f(x))$$

з початковою умовою $f(40) = 100$.

Приклад 2. Нехай профіль чутливого елемента має вигляд півкола. На рис. 4.17 наведено варіант розрахунків для параметрів: $a = -66$; $b = 44$; $x_k = 40$; $y_k = 100$; $t_1 = -\pi$; $t_2 = 0$; $c = 40$; $d = -40$; $x_0 = -40$; $y_0 = 0$. Зображено відбивальну криву на полі ізоклін (а), а також промені (б), що нею відбиті на півколо (чутливий датчик).

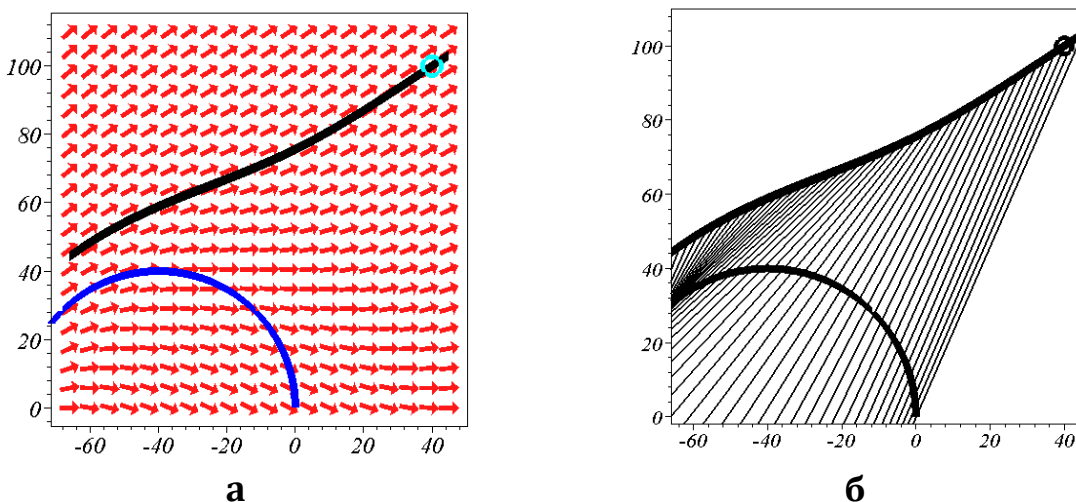


Рис. 4.17 — Поле ізоклін і відбивальна крива (а) та сім'я відбитих від неї променів (б)

Графіки одержано в результаті розв'язання диференціального рівняння. У формулах збережено синтаксис мови Maple:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) = & (-40 + 60 \cdot \cos(-1.273 + 0.02829 x) - x + (x^2 \\ & - 2 x (-40 + 60 \cdot \cos(-1.273 + 0.02829 x)) \\ & + 120 \cdot \sin(-1.273 + 0.02829 x) f(x) + 3600 \cdot \sin(-1.273 + 0.02829 x)^2 \\ & + f(x)^2 + (-40 + 60 \cdot \cos(-1.273 + 0.02829 x))^2)^{(1/2)} / (\\ & 60 \cdot \sin(-1.273 + 0.02829 x) + f(x)) \end{aligned}$$

з початковою умовою $f(40) = 100$.

Приклад 3. Нехай профіль активного елемента має вигляд «півкаплі». На рис. 4.18 наведено варіант розрахунків для параметрів: $a = -40$; $b = 45$; $x_k = 40$; $y_k = 100$; $t_1 = -\pi$; $t_2 = 0$; $c = -40$; $d = 40$; $x_0 = 20$; $y_0 = 0$. Зображено відбивальну криву на полі ізоклін (а), а також сім'ю променів (б), що відбиті на чутливий датчик.

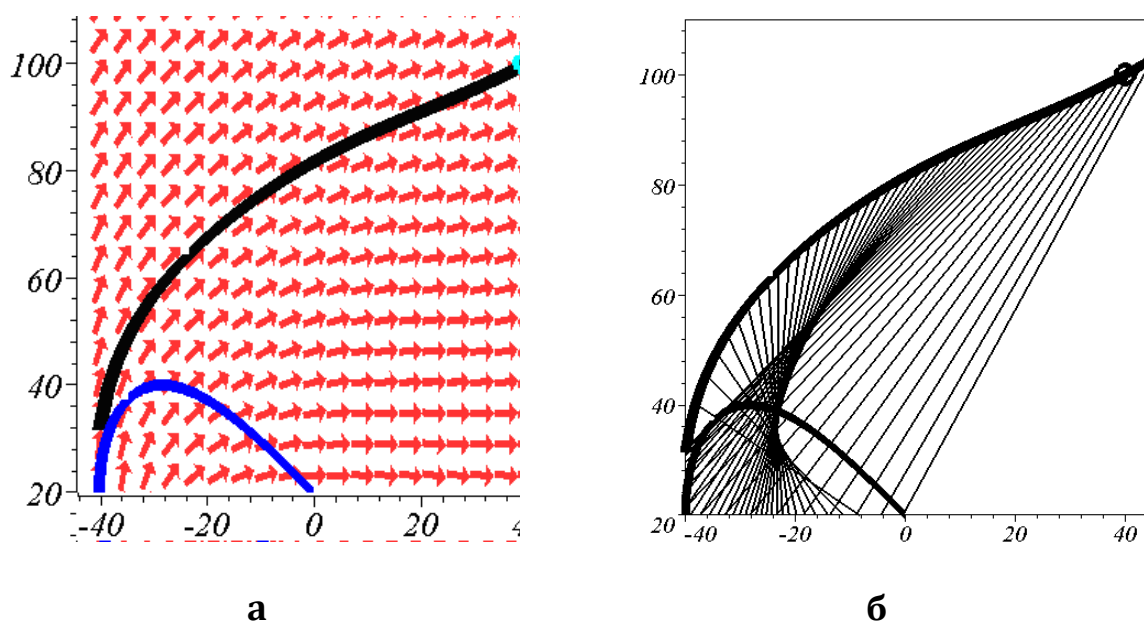


Рис. 4.18 – Поле ізоклін і відбивальна крива (а) та сім'я відбитих від неї променів (б)

Графіки одержано в результаті розв'язання диференціального рівняння. У формулах збережено синтаксис мови Maple.

$$\frac{d}{dx} f(x) = (40 \cdot \sin(-1.662 + 0.03694 x) - x + (x^2 - 80 \cdot x \sin(-1.662 + 0.03694 x) - 2(20 - 40 \cdot \cos(-1.662 + 0.03694 x) \sin(-1.662 + 0.03694 x)) f(x) + (20 - 40 \cdot \cos(-1.662 + 0.03694 x) \sin(-1.662 + 0.03694 x))^2 + f(x)^2 + 1600 \cdot \sin(-1.662 + 0.03694 x)^2)^{(1/2)} / (-20 + 40 \cdot \cos(-1.662 + 0.03694 x) \sin(-1.662 + 0.03694 x) + f(x))$$

з початковою умовою $f(40) = 100$.

Для пояснення розглянемо на площині Oxy фокальну криву з рівнянням $x = x_0 + c \cos t$; $y = y_0 + d \sin t$, де параметр t змінюється у межах $t_1 \leq t \leq t_2$. Прив'язку до фокальної кривої здійснимо виразами: $x_s = x_0 + c \cos(t)$; $y_s = y_0 + d \sin(t)$, де $t = t_2 - \frac{(t_2 - t_1)(b - x)}{b - a}$. У прикладах вважається, що падаючі промені будуть паралельними, і спрямованими «назустріч» осі Ox .

Нехай профіль чутливого елемента має вигляд півкола. Наведено варіант розрахунків для параметрів: $a = -66$; $b = 44$; $x_k = 40$; $y_k = 100$; $t_1 = -\pi$; $t_2 = 0$; $c = 40$; $d = -40$; $x_0 = -40$; $y_0 = 0$. На рис. 4.19 наведено зображення відбивальної поверхні та чутливого сферичного елемента.

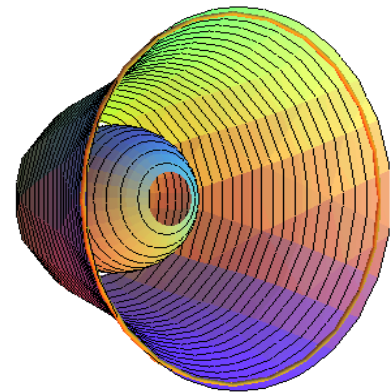


Рис. 4.19 – Зображення визначених поверхонь

Було складено програму побудови просторових зображень відбивальних поверхонь. На рис. 4.20 зображено відбивальну криву на полі ізоклін, а на рис. 4.21 – промені, що нею відбиті на півколо (чутливий датчик).

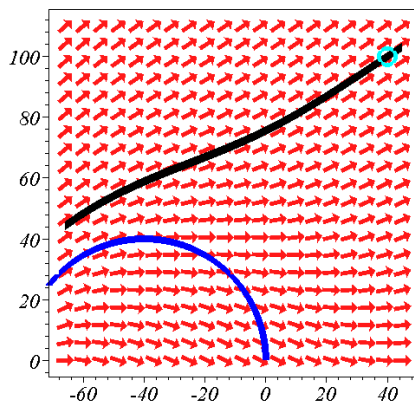


Рис. 4.20 – Поле ізоклін і відбивальна крива

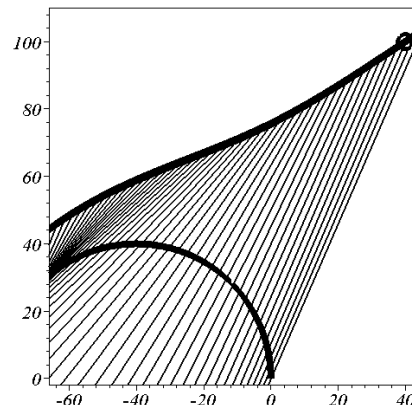


Рис. 4.21 – Сім'я відбитих від кривої променів

Рівняння (4.8) можна використати при розрахунку відбивачів пожежних сповіщувачів диму, чутливий профіль із наноконпозиційного матеріалу якого визначається фокальною лінією неточкового приймача променів. На рис. 4.22 наведено інші варіанти відбивачів та приймачів потоку променів. Зображено форми відбивачів із чутливими датчиками різноманітних конфігурацій. Джерело променів позначено точкою.

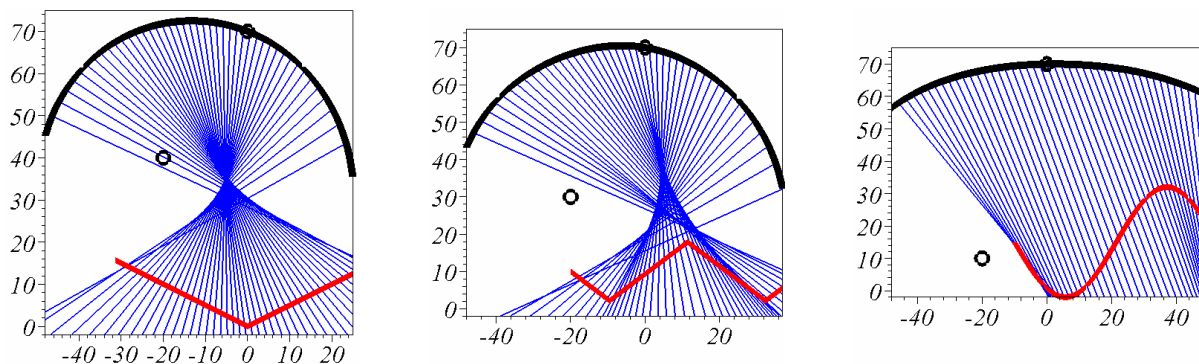


Рис. 4.22 – Форми відбивачів з чутливими датчиками різноманітних конфігурацій

На завершення наведемо форми сліду вантажу хитної пружини для різних випадків резонансу. Це дозволить визначати близькі форми відбивальних кривих залежно від періодів коливань T_x і T_y .

Резонанс у випадку 4:1 (рис. 4.23) відбувається при значеннях параметрів (збережено синтаксис мови Maple):

```

h = 0.1; m = 0.2; k = 315;
Ty = evalf(2*Pi*sqrt(m/k));
Tx = evalf(2*Pi*sqrt(h/g)); Tx/Ty;
Ty := 0.1583213882
Tx := 0.6343739852
4.006874829

```

```

v0 = 0.1; Dv0 = 0; u0 = 0; Du0 = 11.23.

```

Резонанс у випадку 9:2 (рис. 4.24) відбувається за значень параметрів (збережено синтаксис мови Maple):

```

h = 0.1; m = 0.09; k = 180;
Ty = evalf(2*Pi*sqrt(m/k));
Tx = evalf(2*Pi*sqrt(h/g)); Tx/Ty;
Ty := 0.1404962946
Tx := 0.6343739852
4.515236413

```

```

v0 = 0.1; Dv0 = 0; u0 = 0; Du0 = 12;

```

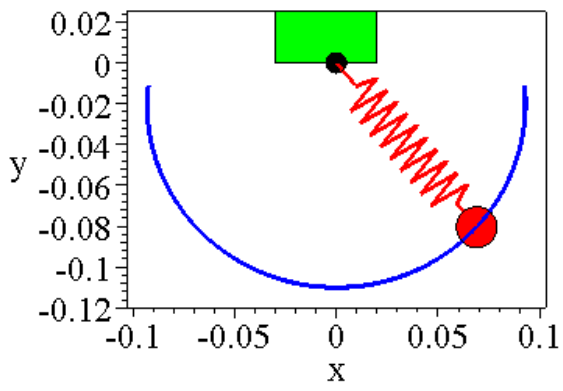


Рис.4.23 — До резонансу 4:1

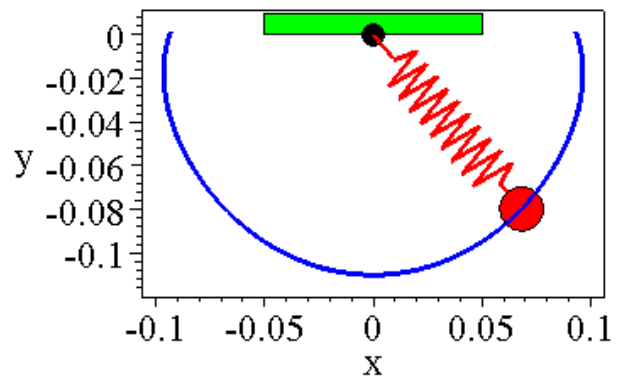


Рис.4.24 — До резонансу 9:2

ВИСНОВКИ

Робота присвячена розробці методу геометричного моделювання резонансу хитної пружини на основі побудови траєкторії руху її вантажу з урахуванням як основних її параметрів, так і початкових умов виникнення коливань, що дозволило проілюструвати розв'язки деяких задач у галузі аварійно-рятувальної тематики.

Значення для науки полягає у створенні основ для системного та обґрунтованого застосування інструментальних засобів сучасної прикладної геометрії під час моделювання руху вантажу хитної пружини як парадигми розв'язання кола задач, для яких характерним є процес перетікання енергії в компонентах динамічної системи.

Значення для практики полягає у створенні передумов розвитку геометричних технологій формування розв'язків з використанням моделі хитної пружини під час дослідження: атмосферного балансу планети, коливання молекули вуглекислого газу, моделювання вібрації гелікоптера. Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати при розрахунку різноманітних конструкцій будівельної механіки – висячих мостів, вантово-балкових систем, канатних доріг, ліній електропередачі, різноманітних антен тросових системи для утримання об'єктів, гнучких шлангів тощо.

При цьому отримано результати, що мають науково-практичну цінність, а саме:

1. Здійснено аналіз літературних джерел, який дозволив зробити висновок про те, що на цей час не існує методів побудови періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини з урахуванням не лише головних її параметрів, але і початкових умов ініціювання коливань. Це являлось стримувальним чинником розвитку методів розв'язання задач, для яких характерним є процес перетікання енергії в компонентах динамічної системи.

2. З використанням методу проєкційного фокусування інтегральної кривої з фазового простору на фазову площину для системи рівнянь Лагранжа другого роду розроблено універсальний спосіб побудови періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини. Аналіз зміни одержаної фазової кривої залежно від керуючого параметра дозволяє побудувати періодичну траєкторію руху вантажу хитної пружини та її різновидів.

3. Побудовані фазові траєкторії функцій узагальнених координат хитної пружини дозволили надати оцінки діапазону змін їх величин та швидкостей руху вантажу. Перехід від параметрів хитної пружини до параметрів конкретної задачі дозволить адекватно описати досліджуваний процес.

4. Одержані геометричні форми періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини запропоновано характеризувати за допомогою від-

ношення горизонтальних і вертикальних періодів коливань вантажу. Це дозволяє визначити споріднені геометричні форми траєкторій руху, тобто однакові траєкторії для різних комбінацій головних параметрів хитної пружини.

5. Складено таблицю геометричних форм періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружин, які відповідають значенням її жорсткості k та маси m . Це дозволило розв'язати у певному розумінні обернену задачу синтезу періодичних траєкторій вантажу хитної пружини.

6. Описано процес руху вантажу хитної пружини за допомогою системи диференціальних рівнянь із компонентами, в які входять значення частот вертикальних і горизонтальних переміщень точки на пружині. Це дозволило визначити множину траєкторій руху вантажу хитної пружини, яка відповідатиме заданим відношенням вертикальних і горизонтальних частот коливань вантажу (для прикладу – 2:1, 7:3, 9:4 і 11:2).

7. Одержано наближене розв'язання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду з компонентами, в які входять значення частот вертикальних і горизонтальних переміщень точки на пружині. Це дозволило інтерпретувати процес коливання вантажу хитної пружини з врахуванням перетікання горизонтальних коливань у вертикальні й навпаки, що характерно для резонансного стану хитної пружини.

8. Розроблено алгоритмічно-програмне забезпечення, за допомогою якого проведено комп'ютерне моделювання на прикладах практичних задач у сфері цивільного захисту. У тому числі для моделювання вітрового навантаження на вантажних канатних дорогах, для передбачення можливих амплітуд коливання дротів або тросів, на які діють пориви вітру, а також для розрахунків подрібнення газових бульбашок у рідині за рахунок коливальних імпульсів тиску.

Подальший розвиток одержаних результатів доцільно спрямувати на розробку моделей та методів, коли шуканий розв'язок поставленої задачі можна пов'язати з періодичною траєкторією руху вантажу хитної пружини. І серед множини таких траєкторій необхідно перевагу надати на траєкторії найменшої довжини. Адже, згідно із загальним принципом «мінімальної енергії» логічно вважати, що саме випадок із найкоротшим періодом траєкторії буде цікавим у процесі реалізації конкретного впровадження.

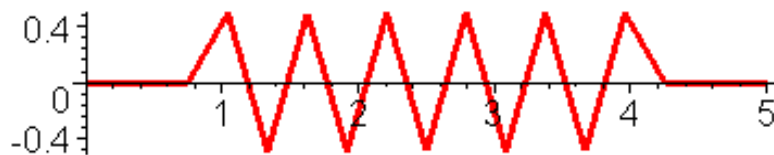
ДОДАТКИ

Додаток А

КОДИ КОМП'ЮТЕРНОЇ ПРОГРАМИ

1. Програма побудови періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини

```
> spring:=proc(x1,x2,n,c, h)
  local p1,p2,p3,p4,pn_1,pn,p;
  p1:=[x1,0];
  p2:=[x1+c,0];
  p3:=[x2-c,0];
  p4:=[x2,0];
  p:=i->[x1+c+(x2-x1-2*c)/n*i,(-1)^(i+1)*h];
  plot([p1,p2,seq(p(i),
i=1..n-1),p3,p4],scaling=CONSTRAINED,thickness=3);
  end;
> pru := spring(0, 5, 12, 0.75, 0.5, scaling=CONSTRAINED): pru;
```



```
g := 9.81:
T := 7.6:
N := 150:
h := 1:
m := 3.69:
> k := 30:
v0 := 1:
Dv0 := 0:
u0 := 0:
Du0 := 1.5:
h := evalf(3*m*g/k);
eps := sqrt(m*g/k/h);

> ODE1 := diff(u(t), t, t) = -(2*diff(v(t), t)* diff(u(t),t) +
g*sin(u(t)))/(h+v(t));
```


**ODE2 := diff(v(t), t, t) = (h + v(t))*diff(u(t),t)^2 -
k*v(t)/m + g*cos(u(t));**

$$ODE1 := \frac{d^2}{dt^2} u(t) = - \frac{2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + 9.81 \sin(u(t))}{3.619890000 + v(t)}$$

ODE2 :=

$$\frac{d^2}{dt^2} v(t) = (3.619890000 + v(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - 8.130081301v(t) + 9.81 \cos(u(t))$$

> initial := {u(0)=u0, D(u)(0)=Du0, v(0)=v0, D(v)(0)=Dv0};

**> sol := dsolve({ODE1, ODE2} union initial, numeric,
method=rkf45, output=listprocedure);**

> solu := subs(sol, u(t));

dsolu := subs(sol, diff(u(t),t));

solv := subs(sol, v(t));

dsolv := subs(sol, diff(v(t),t));

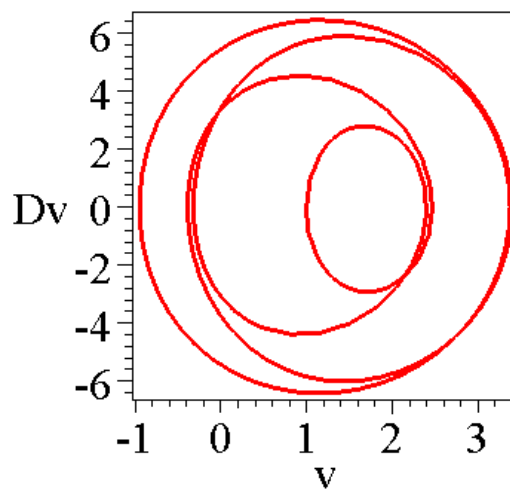
> unassign('t'):t:

Gu1 := plot([solv(t), dsolv(t),t=0..T], color=red, labels = [v, Dv],

font = [TIMES, ROMAN, 18], titlefont = [TIMES, ROMAN, 18],

labelfont = [TIMES, ROMAN, 18], thickness=3, axes=BOXED):

Gu1;



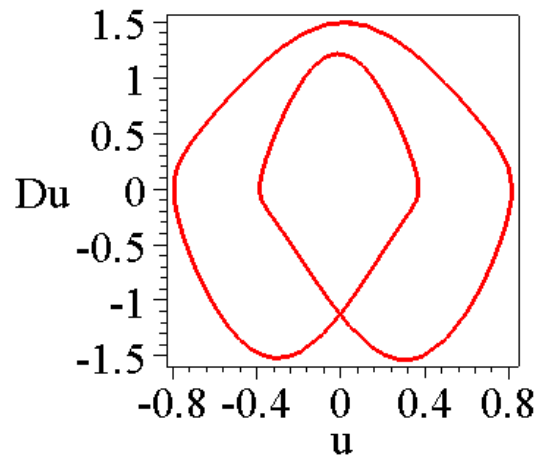
> unassign('t'):t:

Gu1 := plot([solu(t), dsolu(t),t=0..T], color=red, labels = [u, Du],

font = [TIMES, ROMAN, 18], titlefont = [TIMES, ROMAN, 18],

labelfont = [TIMES, ROMAN, 18], thickness=3, axes=BOXED):

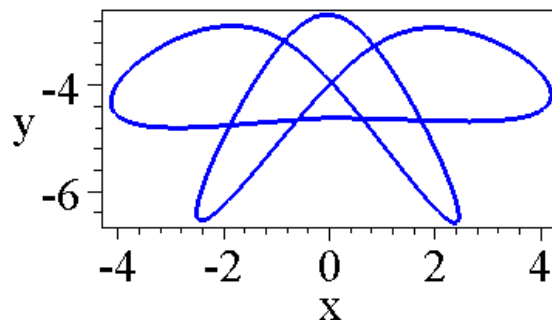
Gu1;



```

> for i from 0 to N do
uu := solu(T*i/N);
vv := solv(T*i/N);
X[i] := (h+vv)*sin(uu(t));
Y[i] := (h+vv)*cos(uu(t));
end do:
Sled := display(curve([seq([X[i], -Y[i]], i = 0 .. N)], color = blue,
thickness = 3)):
sled := display(Sled, labels = [x, y], font = [TIMES, ROMAN, 18],
titlefont = [TIMES, ROMAN, 18], scaling=CONSTRAINED,
labelfont = [TIMES, ROMAN, 18], axes=BOXED): sled;

```



```

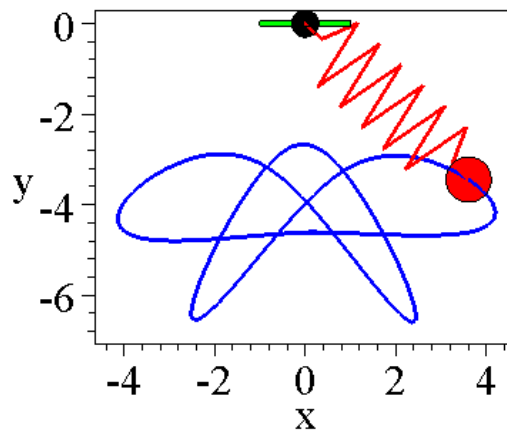
> unassign('t'): t:
for i from 0 to N do
uu := solu(T*i/N);
vv := solv(T*i/N);
x1 := (h+vv)*sin(uu(t));
y1 := -(h+vv)*cos(uu(t));
str:=cat(" t = ",convert(evalf(T*i/N, 3),string)):
cart := rectangle([-1, -0.05], [1, 0.05], color=green):
#pend1 := line([0,0], [x1, y1],color=blue, thickness=4):

```

```

pru := spring(0, sqrt(x1^2 + y1^2), 12, 0.5, 0.8, scaling=CONSTRAINED):
pend1 := rotate(pru, uu+3*Pi/2):
kol0 := disk([0, 0], 0.3, color=black):
kol1 := disk([x1, y1], 0.5, color=red):
Gr[i] := display(kol0, kol1, cart, pend1, sled, labels = [x, y],
titlefont = [TIMES, ROMAN, 18], scaling=CONSTRAINED,
labelfont = [TIMES, ROMAN, 18], title=str);
unassign('t'): t:
end do:
display(seq(Gr[i], i = 0..N), scaling=CONSTRAINED, axes=BOXED,
font = [TIMES, ROMAN, 18], insequence=true);

```



2. Програма побудови графіків функцій для визначення на- стання резонансу

```

g := 9.81:
Ta := -12: Tb := 12:
T := Tb-Ta:
N := 1500:
h := 0.5:
m := 1.911314983:
k := 150:
Ty := 0.7092516765 := evalf(2*Pi*sqrt(m/k));
Tx := 1.418503354 := evalf(2*Pi*sqrt(h/g));
Tx/Ty;
2.000000001
> L := 1.5:
> ODE1 := diff(x(t),t,t) = -Wx^2*x(t) + 2*x(t)*y(t)*h*Wy^2/2/L^2;
> ODE2 := diff(y(t),t,t) = -Wy^2*y(t) + x(t)^2*h*Wy^2/2/L^2;

```

$$ODE1 := \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -19.62000000x(t) + 17.44000002x(t)y(t)$$

$$ODE2 := \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -78.48000007y(t) + 8.720000010x(t)^2$$

```

> x0 := 0.25: Dx0 := 0: y0 := 0: #Dy0 := 0:
> Dy0min := 0.1: Dy0max := 6:
S := 20:
> for j from 0 to S do
> Dy0 := Dy0min + j*(Dy0max - Dy0min)/S:
str:=cat( " Dy0 = ",convert(evalf(Dy0, 5),string) ):
> initial := {x(0)=x0, D(x)(0)=Dx0, y(0)=y0, D(y)(0)=Dy0}:
> sol := dsolve({ODE1, ODE2} union initial, numeric,
method=rkf45, output=listprocedure);
> solx := subs(sol, x(t)):
dsolx := subs(sol, diff(x(t),t)):
soly := subs(sol, y(t)):
dsoly := subs(sol, diff(y(t),t)):
> #plot([solx(t), soly(t), t=0..5], color=[red, blue]);
> for i from 0 to N do
w := Ta + i*(Tb-Ta)/N;
X[i] := solx(w);
Y[i] := soly(w);
end do:
> AU := display(curve([seq([Ta + i*(Tb-Ta)/N, X[i]], i = 0 .. N)],
color = blue, thickness = 1), titlefont = [TIMES, ROMAN, 12],title=str):
AV := display(curve([seq([Ta + i*(Tb-Ta)/N, Y[i]], i = 0 .. N)],
color = red, thickness = 1), titlefont = [TIMES, ROMAN, 12],title=str):
Gr[j] := display(AU, AV);

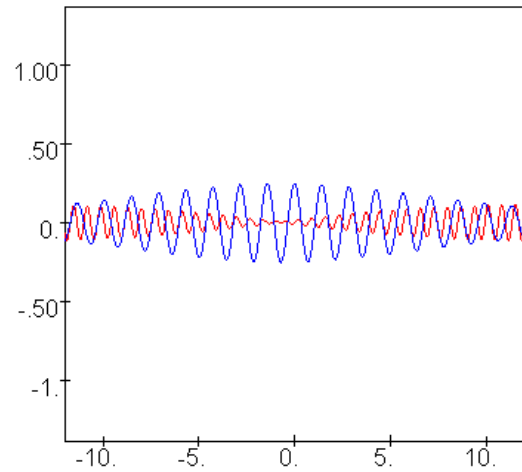
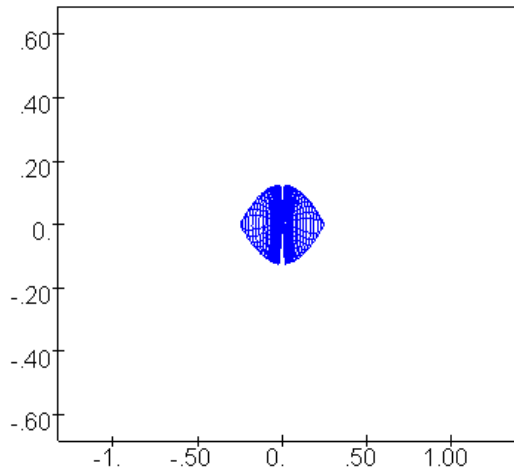
for i from 0 to N do
xx := solx(T*i/N):
yy := soly(T*i/N):
X[i] := xx;
Y[i] := yy:
#X[i] := h*(1+yy)*sin(xx(t));
#Y[i] := h*(1+yy)*cos(xx(t)):
end do:
Sled[j] := display(curve([seq([X[i], Y[i]], i = 0 .. N)], color = blue,
thickness = 1), titlefont = [TIMES, ROMAN, 24]): #, title=str):
end do:
> RR := array(1 .. 1, 1 .. 2);
> RR[1, 1] := display(seq(Sled[j],j = 0..S),axes=BOXED,insequence=true):
> RR[1, 2] := display(seq(Gr[j], j = 0..S), #color = [red, blue],

```

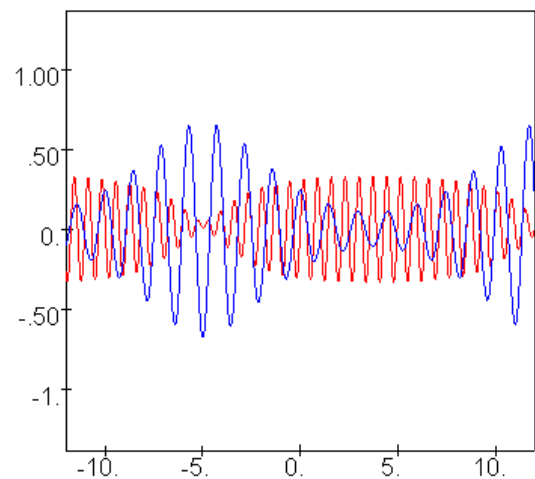
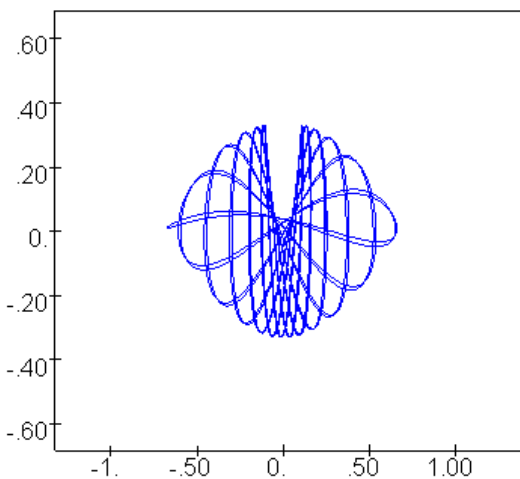
```
axes=BOXED,insequence=true):  
> display(RR);
```

В результаті одержимо кадри анімації залежно від параметра Dy0:

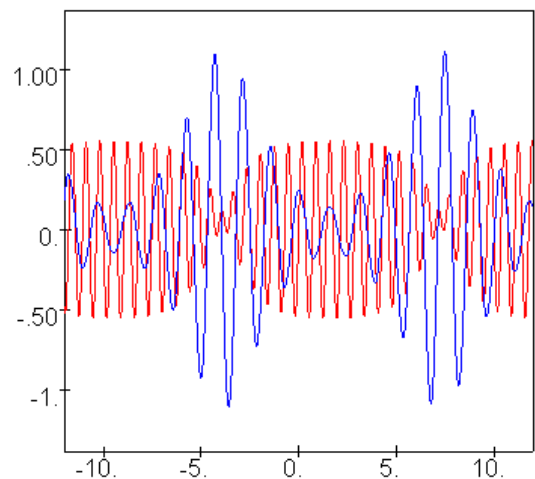
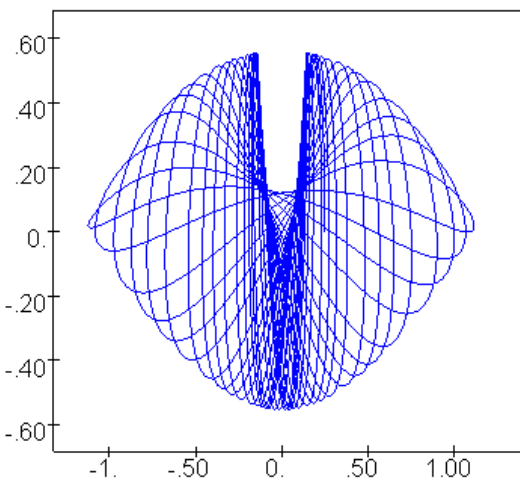
Dy0 = .1



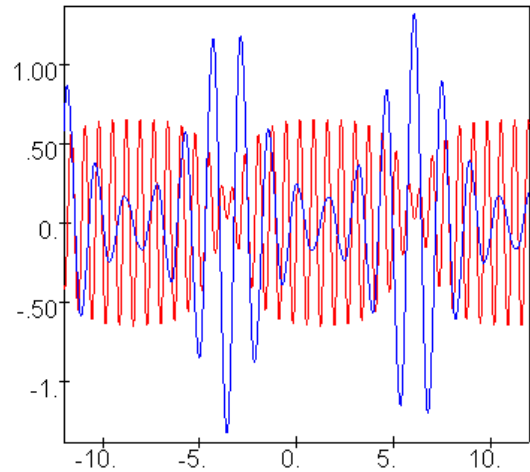
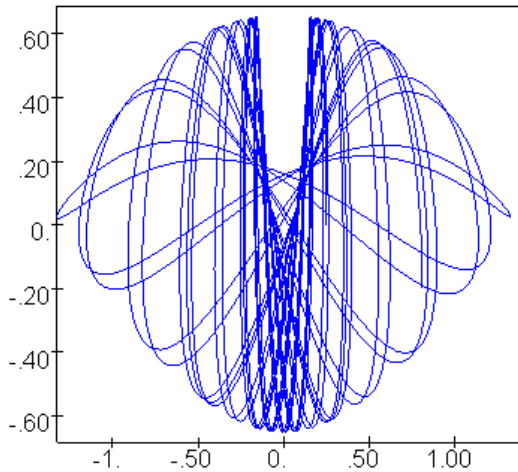
Dy0 = 2.7550



Dy0 = 4.8200

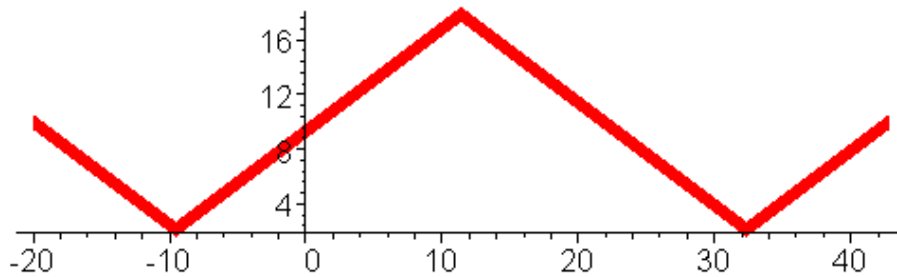


Dy0 = 5.7050



3. Програма побудови відбивальної кривої залежно від форми кривої-приймача і положення точки джерела променів

```
> xs := -20.:   ys := 30.:  
xk := 0.:     yk := 70.:  
a := -48.:    b := 37.:  
> t1 := 3.14:  t2 := 0: # межі зміни параметра  
c := 20.:     d := -5.:  
x0 := -20:    y0 := 10:  
> data := array(1..12):  
data[1] := xk: data[2] := yk:  
data[3] := a:  data[4] := b:  
data[5] := t1: data[6] := t2:  
data[7] := xs: data[8] := ys:  
data[9] := c:  data[10] := d:  
data[11] := x0: data[12] := y0:  
> t := t2 - (t2 - t1)*(b - x)/(b - a):  
> X := x0 + c*t:  
> Y := y0 + d*arcsin(sin(3*t)):  
> rub := plot([X, Y, x=a..b], color=red, thickness=8):  
> plot([X, Y, x=a..b], color=red, thickness=8, scaling=CONSTRAINED);
```

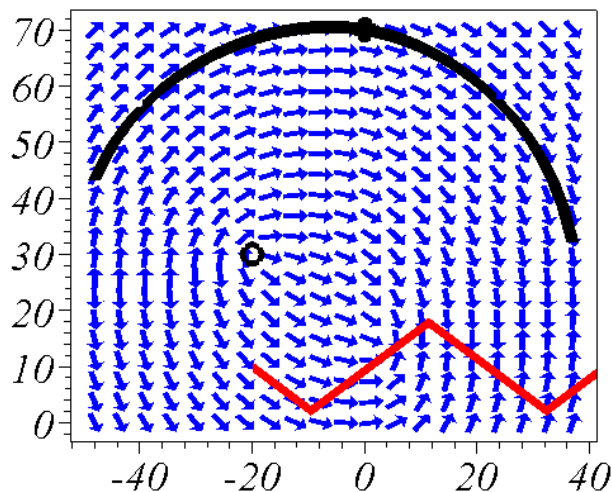


```

> S := circle([xs, ys], (b-a)/50, thickness=5):
K := circle([xk, yk], (b-a)/50, thickness=5):
> fd := fopen ('e:\\mydata1.txt', WRITE):
> writedata(fd, data):  fclose(fd):
> U := -f(x)^2+x^2-x*xs+f(x)*ys+xs*X-Y*ys+Y*f(x)-x*X:
V := f(x)*xs+f(x)*X-ys*X+Y*x-2*f(x)*x-Y*xs+ys*x:
W := (-2*x*xs+ys^2+x^2+xs^2+f(x)^2-2*ys*f(x))*
      (x^2-2*X*x-2*f(x)*Y+Y^2+f(x)^2+X^2):
ura := diff(f(x),x) = (U + sqrt(W))/V:

> pole := DEplot(ura, f(x), x=a..b, f=0..70, arrows=LARGE, color=blue):
> ic1 := f(xk) = yk:
F1 := dsolve({ura, ic1}, {f(x)}, type=numeric,
             output=listprocedure);
for i from a to b do zz[i] := rhs(F1(i)[2]): od:
> data := array( [seq([i, zz[i] ], i=a..b)]):
> fd := fopen ('e:\\mydata2.txt', WRITE):
> writedata(fd, data, [float, float]):  fclose(fd):
> cur := plots[odeplot](F1,[x, f(x)], a..b, color=black,
                       thickness=10):
  ➤ display( K, rub, S, pole, cur, axes=BOXED, scaling=CONSTRAINED,
            axesfont=[TIMES,ITALIC,20]);

```

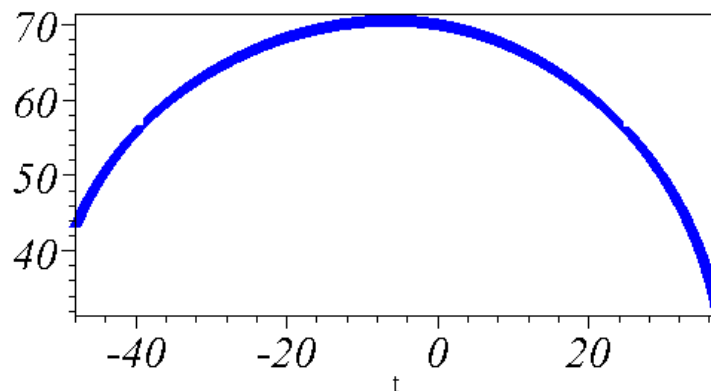


```

> data := readdata('e:\\mydata1.txt'):
> xk := data[1]:  yk := data[2]:
a := data[3]:  b := data[4]:
t1 := data[5]:  t2 := data[6]:
xs := data[7]:  ys := data[8]:
c := data[9]:  d := data[10]:
x0 := data[11]:  y0 := data[12]:

> t := t2 - (t2 - t1)*(b - x)/(b - a):
> X := x0 + c*t:
> Y := y0 + d*arcsin(sin(3*t)):
> rub := plot([X, Y, x=a..b], color=red, thickness=8):
> S := circle([xs, ys], (b-a)/50, thickness=5, scaling=CONSTRAINED):
K := circle([xk, yk],(b-a)/50, thickness=5, scaling=CONSTRAINED):
> z := readdata('e:\\mydata2.txt', 2):
> pnts := [seq(i, i=a..b)], [seq(z[i, 2], i=1..b-a+1)]:
> unassign('t'): t:
> sp := spline(pnts, t, cubic):
> y := codegen[makeproc](sp, t):
spl := plot(y(t), t = a..b, thickness=10,
           color=black, scaling=CONSTRAINED):
plot(y(t), t = a..b, thickness=8,
     color=blue, scaling=CONSTRAINED,
     axes=BOXED, axesfont=[TIMES,ITALIC,18]);

```



```

> unassign('t'): t:
> dy := unapply (D(y)(t),t):
  x := (t) -> t:
> dx := diff(x(t),t):  dy := diff(y(t),t):
> xort := 2*( dy*(x*dy-dx*y) + dx*(xs*dx+ys*dy))/(dx^2+dy^2)-xs:
> yort := 2*(-dx*(x*dy-dx*y) + dy*(xs*dx+ys*dy))/(dx^2+dy^2)-ys:

```



```

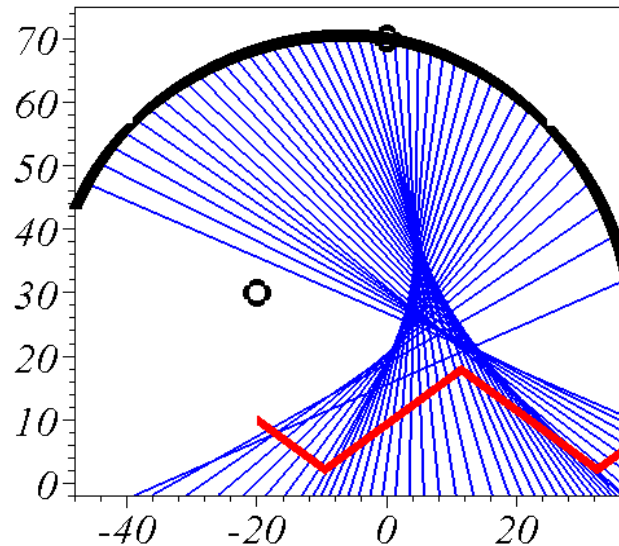
> ort := plot([xort(t),yort(t),t=a..b], color=blue,
  axesfont=[TIMES,ITALIC,20],thickness=5, scaling=CONSTRAINED ):
> display( K, spl, S, rub, scaling=CONSTRAINED,
  axes=BOXED, axesfont=[TIMES,ITALIC,18]);

```

```

> unassign('t'): t:
> for i from 1 to 45 do t:= a + (b-a)*i/45.001:
> xlin := w -> x(t) + w*(x(t) - xort(t)):
> ylin := w -> y(t) + w*(y(t) - yort(t)):
> luch := plot([xlin(w), ylin(w),w=0..5], color=blue,
  thickness=2, scaling=CONSTRAINED ):
> Gr[i] := display(luch);
> end do:
> display(rub, K, S, spl, seq(Gr[i], i=1..45),
  axes=BOXED,axesfont=[TIMES,ITALIC,20], view=[a..b, -2..75]);

```



СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. De Sousa M.C., Marcus F.A., Caldas I.L., Viana R.L. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm // *Physica A*. Vol. 509, 1 November, 2018. P.1110–1119.
2. Власов В.Н. Величайшая Революция в Механике 4. (2014) URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/2114-vls.pdf>.
3. Булдакова Д. А., Кирюшин А. В. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники. Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ». 2015 Том 6. № 2. С. 238–243.
4. Lynch P. The swinging spring: a simple model for atmospheric balance. *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics: Vol. II: Geometric Methods and Models*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. 50 p.
5. Алдошин Г. Т., Яковлев С. П. Аналитическая модель колебаний молекулы углекислого газа. Резонанс Ферми // *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 1. С. 42–53.
6. Peng Zhang, Liang Ren, Hongnan Li, Ziguang Jia, Tao Jiang. Control of Wind-Induced Vibration of Transmission Tower-Line System by Using a Spring Pendulum // *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Article ID 671632. P. 1–10.
7. Castillo-Rivera S., Tomas-Rodriguez M. Helicopter flap/lag energy exchange study, *Nonlinear Dynam.* 2017. Issue 88, P. 1–23.
8. Богданов К.Ю. Хищник и жертва – URL: <http://bio.fizteh.ru/student/files/biology/biopharticles/bioph15-arpfelurcdc.pdf>.
9. Gendelman O.V., Transition of energy to a nonlinear localized mode in a highly asymmetric system of two oscillators, *Nonlinear Dynam.* 2001. Issue 25, P. 237–253.
10. Алдошин Г. Т. Замечания к методу линеаризации нелинейных уравнений с двумя степенями свободы // «Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе»: Труды международной научно-практической конференции. Т. 1. 2009. С. 227.
11. Бубнович Э.В., Молдагананова А. Г. К вопросу об исследовании резонансов при вынужденных взаимосвязанных колебаниях гибкой нити. URL: <http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдагананова%20.pdf>.
12. Петров, А. Г. О вынужденных колебаниях качающейся пружины при резонансе // *Доклады Академии наук*. 2015 г. Т. 464 № 5. С. 553–557.
13. Петров А. Г., Шундерюк М. М. О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 2. С. 27–40.
14. Bayly P. V., Virgin L. N. An Empirical Study of the Stability of Periodic Motion in the Forced Spring-Pendulum. // *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*. Vol. 443, Issue 1918 (Nov. 8, 1993), P. 391–408.

15. Duka B., Duka R. On the elastic pendulum, parametric resonance and "pumping" swings. European Journal of Physics. Accepted Manuscript online 15 November 2018.
16. Breitenberger E., Mueller RD. The elastic pendulum: A nonlinear paradigm. // Journal of Mathematical Physics 1981. Issue 22, P.1196–1210.
17. Dullin H., Giacobbe A., Cushman R. Monodromy in the resonant swing spring // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2004, Vol. 190, Issues 1–2, 15 March P.15–37.
18. Ryland II H. G., Meirovitch L. Stability boundaries of a swinging spring with oscillating. // Journal of Sound and Vibration. 1977, Vol. 51, Issue 4, 22 April P.547–560.
19. Holm D.D., Lynch P. Stepwise Precession of the Resonant Swinging Spring. SIAM J. Applied dynamical systems. 2002.Vol. 1, Issue 1, P. 44–64.
20. Lynch Peter, Houghton Conor. Pulsation and precession of the resonant swinging spring.// Physica D: Nonlinear Phenomena. 2004, Vol. 190, Issues 1–2, 15 March P.38–62.
21. Клименко А. А., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика пружинного маятника // Динамические системы. 2009. Вып. 27. С. 51–65.
22. Broucke R, Ваха P.A. Periodic solutions of a spring-pendulum system // Celestial mechanics. September 1973, Vol. 8, Issue 2, P. 261–267.
23. Hitzl D.L. The swinging spring invariant curves formed by quasi-periodic solution. III // Astron and Astrophys. 1975, Issue 41, P.187–198.
24. Моделирование движения двойного маятника в Декартовой системе координат URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/new-in-9/advanced-hybrid-and-differential-algebraic-equations/double-pendulum.html>.
25. The Spring Pendulum (Optional) URL: <http://homepage.math.uiowa.edu/~stroyan/CTLC3rdEd/ProjectsOldCD/estroyan/cd/46/index.htm>.
26. Gavin H.P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints // CEE 541. Structural Dynamics. Department of Civil and Environmental Engineering Duke University. 2014. 23 p.
27. Van der Weele J.P., de Kleine E. The order-chaos-order sequence in the spring pendulum // Physica A 228. 1996. P. 245–272.
28. Chen Y.F. Scientific computing and visualization. Spring pendulum system, top.4. (2011).
29. URL: <http://ocw.nctu.edu.tw/upload/classbfs1209054703145981.pdf>
30. Алдошин Г. Т., Яковлев С. П. Динамика качающейся пружины с подвижным подвесом // Вестник СПбГУ. 2012. Сер. 1. Вып. 4. С. 45-52.
31. Development of a method for computer simulation of a swinging spring load movement path / Kutsenko L., Semkiv O., Kalynovskyi A., Zapolskiy L., Shoman O., Virchenko G. et. al. // Eastern-European Journal of Enterprise

Technologies. 2019. Vol. 1, Issue 7 (97). P. 60–73. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154191>.

32. Synthesis and classification of periodic motion trajectories of the swinging spring load / Kutsenko L., Vanin V., Shoman O., Zapolskiy L., Yablonskiy P., Vasyliiev S. et. al. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. Vol. 2, Issue 7 (98). P. 26–37. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.161769>.

33. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm / De Sousa M. C., Marcus F. A., Caldas I. L., Viana R. L. // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. Vol. 509. P. 1110–1119. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.06.089>.

34. De Sousa M. C. de S., Marcus F. A. M., Caldas I. L. C. Energy distribution in a spring pendulum // Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Science and Complexity. 2016. doi: <https://doi.org/10.20906/cps/nsc2016-0022>.

35. Energy Distribution in Spring Pendulums / De Sousa M. C., Marcus F. A., Caldas I. L., Viana R. L. // 2017. URL: https://www.researchgate.net/publication/316187700_Energy_Distribution_in_Spring_Pendulums.

36. Ganis L. The Swinging Spring: Regular and Chaotic Motion. 2013. URL: http://depts.washington.edu/amath/wordpress/wp-content/uploads/2014/01/leah_ganis_pres.pdf.

37. Sanders J. A., Verhulst F., Murdock J. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. Springer, 2007. 434 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-48918-6>.

38. Колебания типа «голландский шаг» возникают, когда попеременная устойчивость самолёта велика, по сравнению с путевой устойчивостью. URL: <http://studepedia.org/index.php?vol=3&post=13634>.

39. Li-Juan Z., Hua-Biao Z., Xin-Ye L. Periodic solution and its stability of spring pendulum with horizontal base motion // Acta Physica Sinica. 2018. Vol. 67, Issue 24. doi: <http://doi.org/10.7498/aps.67.20181676>.

40. Lynch P., Houghton C. Pulsation and precession of the resonant swinging spring // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2004. Vol. 190, Issue 1–2. P. 38–62. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.09.043>.

41. Kartashova E. Nonlinear resonance analysis. Theory, Computation, Applications. Cambridge University Press, 2010. 241 p. doi: <https://doi.org/10.1017/cbo9780511779046>.

42. Kuznetsov S. V. The Motion of the Elastic Pendulum // Regular and Chaotic Dynamics. 1999. Vol. 4, Issue 3. P. 3–12. doi: <https://doi.org/10.1070/rd1999v004n03abeh000110>.

43. Cross R. Experimental investigation of an elastic pendulum // European Journal of Physics. 2017. Vol. 38, Issue 6. P. 065004. doi: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa8649>.

44. Lynch P. Resonant motions of the three-dimensional elastic pendulum // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2002. Vol. 37, Issue 2. P. 345–367. doi: [https://doi.org/10.1016/s0020-7462\(00\)00121-9](https://doi.org/10.1016/s0020-7462(00)00121-9).
45. Lynch P. On resonant Rossby-Haurwitz triads // Tellus A. 2009. Vol. 61, Issue 3. P. 438–445. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1600-0870.2009.00395.x>.
46. Cross-camera tracking and frequency analysis of a cheap Slinky Wilberforce pendulum / Devaux P., Piau V., Vignaud O., Grosse G., Olarte R., Nuttin A. // Emergent Scientist. 2019. Vol. 3. P. 1. doi: <https://doi.org/10.1051/emsci/2018006>.
47. Berg R. E., Marshall T. S. Wilberforce pendulum oscillations and normal modes // American Journal of Physics. 1991. Vol. 59, Issue 1. P. 32–38. doi: <https://doi.org/10.1119/1.16702>.
48. Köpf U. Wilberforce's pendulum revisited // American Journal of Physics. 1990. Vol. 58, Issue 9. P. 833–837. doi: <https://doi.org/10.1119/1.16376>.
49. Dobrushkin V. Spring Pendulum. URL: <http://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am34/Mathematica/ch3/pendulum.html>.
50. Иванов И. Колебания пружинного маятника. 2015. URL: https://elementy.ru/problems/1006/kolebaniya_pruzhinnogo_mayatnika.
51. Richterek L. Dynamicke modelovani modelovani v programu gnu octave. 2007. URL: <http://muj.optol.cz/richterek/lib/exe/fetch.php?media=texty:dynmod.pdf>.
52. Lepil O., Richterek L. Dynamicke modelovani. Slovanské gymnázium Olomouc, 2007. 161 p. URL: <https://www.researchgate.net/publication/40356351>.
53. Havránek A. Pružné kyvadlo – vysetrovani bifurkace metodami newtonovske mechaniky. URL: <https://web.vscht.cz/pokornp/h/PrzkvHerb2.doc>.
54. Dvořák L. Pružné kyvadlo: od teoretické mechaniky k pokusům a zase zpátky // Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 2006. Vol. 51, Issue 4. P. 312–327.
55. Havránek A., Čertík O. Pružné kyvadlo // Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 2006. Vol. 51, Issue 3. P. 198–216.
56. Калиниченко В. А., Аунг Наинг Со А. Н. С. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 12. doi: <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1138>.
57. De Sousa M.C., Marcus F.A., Caldas I.L., Viana R.L. Energy Distribution in Spring Pendulums (2017) URL: https://www.researchgate.net/publication/316187700_Energy_Distribution_in_Spring_Pendulums.

58. An Investigation of Head-Sea Parametric Rolling and its Influence on Container Lashing Systems / William N. France, Marc Levadou, Thomas W. Treakle, J. Randolph Paulling, R. Keith Michel, and Colin Moore / SNAME Annual Meeting 2001 Presentation, 24 p.
59. Christensen J. An improved calculation of the mass for the resonant spring pendulum / Am. J. Phys. 72 (6), June 2004. pp. 818–828.
60. Zhang Li-Juan, Zhang Hua-Biao, Li Xin-Ye. Periodic solution and its stability of spring pendulum with horizontal base motion / Acta Phys. Sin. Vol. 67, No. 24 (2018) 15 p.
61. Rod Cross Experimental investigation of an elastic pendulum / European Journal of Physics, Volume 38, Number 6 October 2017.
62. Awrejcewicz J., Sendkowski D., Kazmierczak M. Geometrical approach to the swinging pendulum dynamics / Computers & Structures Volume 84, Issues 24–25, September 2006, P. 1577–1583.
63. Зарипов М.Н., Петров А.Г. Нелинейные колебания качающейся пружины // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 3. С. 347–352.
64. Петров А.Г. Нелинейные колебания качающейся пружины при резонансе // Известия РАН. МТТ. 2006. № 5. С. 18–28.
65. The Spring Pendulum (Optional) URL: <http://homepage.math.uiowa.edu/~stroyan/CTLC3rdEd/ProjectsOldCD/estroyan/cd/46/index.htm>.
66. Hitzl, D. L., The swinging spring – families of periodic solutions and their stability. I, *Astronautics & Astrophysics* **40**, 1975, P.147–159.
67. Simulation of Nonlinear Spring Pendulum (2011) https://nl.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/33168-springpendulum?s_tid=srchtitle.
68. Эластичный маятник (2018) URL: http://www.sc.edu/es/sbweb/fisica3/oscilaciones/pendulo_elastico/pendulo_elastico.html.
69. Van der Weele J.P., de Kleine E. The order-chaos-order sequence in the spring pendulum // [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications](#) / Vol. 228 (1), 1996, P. 245-272.
70. The Swinging Spring: Regular and Chaotic Motion Leah Ganis May 30th, (2013) URL: http://depts.washington.edu/amath/wordpress/wp-content/uploads/2014/01/leah_ganis_pres.pdf.
71. DOBRUSHKIN V. SPRING PENDULUM. URL: <HTTP://WWW.CFM.BROWN.EDU/PEOPLE/DOBRUSH/AM34/MATHEMATICA/CH3/PENDULUM.HTML>
72. Семків О.М. Метод визначення особливих траєкторій коливань вантажу 2d-пружинного маятника// Вестник ХНАДУ, вып. 71, 2015. С. 36–44
73. Development of Projection Technique for Determining the Non-Chaotic Oscillation Trajectories in the Conservative Pendulum Systems / O.

Semkiv, O. Shoman, E. Sukharkova, A. Zhurilo, H. Fedchenko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Mathematics and Cybernetics – Applied Aspects. № 2, Issue 4 (86). 2017. P. 48–57.

74. Development of a method for a computer model of a trajectory for the movement of a load of swinging spring / L. Kutsenko, O. Semkiv, A. Kalynovskyi, L. Zapolskyi, O. Shoman, G. Virchenko, V. Martynov, M. Zhuravskij, V. Danylenko, N. Ismailova // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies: Applied mechanics. 2019. Issue 1, № 7 (97) . P. 60–73.

75. Алдошин Г. Т., Яковлев С. П. Динамика качающейся пружины с подвижным подвесом // Вестник СПбГУ. 2012. Сер. 1. Вып. 4. С. 45–52.

76. Donald L. Hitzl. The swinging spring – approximate analyses for low and very high energy, ii. Celestial mechanics, 1975, 12(3), 359–382.

77. Петров А.Г., Фомичев А.В. Задача о колебаниях газового пузыря в жидкости при резонансе частот деформационных и радиальных колебаний 1:2// Труды 50-й научной конференции МФТИ. 2007. Ч. 3, т. 1. С. 146–148.

78. Петров А.Г., Фомичев А.В. О нелинейных трехмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине при резонансе // Изв. РАН. МТТ.№5. 2008. С. 15–26.

79. Nenuwe N.O. Application of Lagrange equations to 2D double spring-pendulum in generalized coordinates / RUHUNA JOURNAL OF SCIENCE / Vol 10 (2). P. 120-134, Dec 2019.

80. Holovatska Y. Oscillations of the Resonant Elastic Pendulum / International Conference of Young Scientists / Мала академія наук України, 2019. P. 18-20.

81. Holovatska Y. Oscillations of an elastic pendulum: URL: <http://demonstrations.wolfram.com/OscillationsOfAnElasticPendulum/>.

82. Anisin B., Davidovic D., Babovic V. On the linear theory of the elastic pendulum, 1993, Eur. J. Phys. 14, 132.

83. Cross R. Experimental investigation of an elastic pendulum, 2017, Eur. J. Phys. 38.

84. Вановский В.В., Петров А.Г. Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости // ДАН. 2012. Т. 444, №4. С. 385–389.

85. Вановский В.В., Петров А.Г. Пружинная аналогия нелинейных колебаний пузырька в жидкости при резонансе // ПММ. 2017. Т. 81, №4. С. 445–461.

86. Петров А.Г. О повороте видимой плоскости колебаний качающейся пружины при резонансе 1: 1 : 2 //Изв. РАН. Механика твердого тела. 2017. №3. С. 18–30.

87. Петров А.Г. Криволинейное движение эллипсоидального пузыря// ПМТФ. 1971. № 3. С. 90–93.

88. Leah G. 2013. The Swinging Spring: Regular and Chaotic Motion. URL:<http://depts.washington.edu/>.

89. amath/wordpress/wp-content/uploads/2014/01/leah_ganis_pres.pdf.
90. 88. Lewin A, Chen P. 2015. Numerical analysis of dynamics of single and double spring pendulum systems.
91. URL:
<https://www.math.dartmouth.edu/~m53f15/proj/chenlewin.pdf>
92. Семків О.М. Метод визначення особливих траєкторій коливань вантажу 2-d – пружинного маятника // Вестник Харьковського нац. автомобільно-дорожного університету. Харьков: ХНАДУ, 2015. Вып. 71. С. 36–44.
93. Семків О.М. Визначення параметрів нехаотичних траєкторій коливань вантажу маятника з рухомим підвісом // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Випуск 93. 2015. С. 74–79.
94. Семків О.М. Визначення параметрів нехаотичних коливань вантажу маятника машини Атвуда // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Випуск 92. К. 2014. С. 113–118.
95. Семків О.М. Графічний комп'ютерний спосіб визначення нехаотичних траєкторій коливань маятникових систем // Вестник Харьковського нац. автомобільно-дорожного університету. 2016. Вып. 72. С. 94–101.
96. Семків О.М., В.Ф. Челомбитько Геометричне моделювання коливань просторового пружинного маятника // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. 2016. Вип. 6. С. 109–113.
97. Semkiv O.M. Computer graphics of the oscillaton trajectories of 2-d spring pendulum weight / O.M. Semkiv // ORT Publishing - European Applied Sciences: challenges and solutions: 5th International scientific conference. – Stuttgart (Germany), 2015. P. 63–70.
98. Семкив О.М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d- пружинного маятника // Материалы VII Междунар. конф. по научн. развитию в Евразии. Вена (Австрия), 2015. С.217–221.
99. Семків О.М. Геометричне моделювання коливань вантажів, зв'язаних пружинами // Науковий вісник Мелітопольського держ. пед. ун-ту ім. Богдана Хмельницького. Серія: Математика. Геометрія. Інформатика. 2014. С. 201–207.
100. Семків О.М. Морозова Г.В. Вивчення коливання пружинного маятника під візком на прикладі моделі підвіски вертольота. // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць . 2016. Вип. 5. С. 121–125.
101. Семків О.М., Семенова-Куліш В.В. Моделювання коливання маятника під візком на прикладі механічної моделі рідини у ємності // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. 2016. Вип. 5. С. 126–130.
102. Семків О.М. Сухарькова О.І. Наближене визначення критичних значень параметрів фазових траєкторій рівнянь маятникових коливань // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. Вип. 48. 2015. С. 204–

210.

103. Куценко, Л. М. Пікрасов М. М., Запольський Л. Л. Ілюстрації до статті «Геометричне моделювання періодичної траєкторії вантажу хитної пружини» (2018) URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7637>.

104. Куценко Л. М., Пікрасов М. М., Васильєв С. В. Ілюстрації до статті «Класифікація елементів сім'ї періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини» (2019) URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/8658>.

105. Куценко Л. М., Пікрасов М. М., Шевченко С. М. Ілюстрації до статті «Моделювання резонансу хитної пружини на основі синтезу траєкторії руху її вантажу». 2019. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/8950>.

106. Калиниченко В. А., Аунг Наинг Со А. Н. С. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 12. doi: <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1138>.

107. Иванова О. А. Математическое моделирование аэроупругих колебаний провода линии электропередачи. дис...канд. физ-мат. наук: 05.13.18, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2013. –142 с.

108. Соколов А. И. Нестационарные колебания и устойчивость провисающих проводов воздушных линий при ветровых и гололёдных нагрузках. дис...канд. техн. наук: 01.02.06, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2012. 117 с.

109. Иванова О.А. Численное моделирование движения провода ЛЭП под воздействием ветра // Вести МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2012. Спец. выпуск № 2 «Математическое моделирование в технике». С. 67–74.

110. Яковлев Л.В. Физическая сущность пляски проводов // Электрические станции, №10. 1971 – С. 45–49.

111. Ванько, В.И. Математическая модель пляски провода ЛЭП // Энергетика. (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). 1991. № 11. С. 36–42.

112. Peng Zhang, Liang Ren, Hongnan Li, Ziguang Jia, and Tao Jiang. Control of Wind-Induced Vibration of Transmission Tower-Line System by Using a Spring Pendulum /// Hindawi Publishing Corporation Math. Problems in Engineering. Volume 2015, Article ID 671632, P. 1–10.

113. Гасенко В.Г., Горелик Р.С., Тимкин Л.С. Метод формирования полидисперсной газожидкостной смеси // Международный научно-исследовательский журнал. № 10 (41), Ч. 4, Ноябрь, 2015. С. 14-20.

114. Вановский В.В., Петров А.Г. Условие резонансного дробления газового пузырька в акустической волне в жидкости // ДАН. 2016. Т. 469, № 2. С. 162–166.

115. Вановский В.В., Петров А.Г. Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости // ДАН. 2012. Т. 444, № 4. С. 385–385.

116. Вановский В.В., Петров А.Г. Колебания газового пузырька в жидкости при резонансе частот радиальной и произвольной осесимметричной моды колебаний 2:1 // ДАН. 2011. Т. 437, №3. С. 331–335.

117. Петров А. Г., Фомичев А. В. Колебания газового пузыря в жидкости при резонансе частот радиальных и деформационных колебаний 2:1 // Механика жидкости и газа. 2009. № 2. С. 102-115.

118. Вановский В.В., Петров А.Г. Пружинная аналогия нелинейных колебаний пузырька в жидкости при резонансе // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, № 4. С. 445–461.

119. Семків О.М., Шевченко С.М. Комп'ютерне моделювання траєкторії переміщення вантажу хитної пружини з рухомою точкою підвіски // Znanstvena misel journal, Slovenia, Vol.1, №40, 2020 - С. 54-66.

120. Детекторы дыму. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://www.asutpp.ru/datchiki/datchik-pozharnoj-signalizacii.html>.

121. Яблоков М. Комбинированный пожарный извещатель для сверххранного обнаружения очагов возгорания. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://house-control.org.ua/article/3500/m--yablokov--kombinirovannyy-pojarnyy-izveshatel-dlya-sverhrannego-obnaruzeniya-ochagov-vozgoraniya>.

122. Зайцев А. Размеры частиц дыма и корректность проведения огневых испытаний пожарных извещателей. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://avtoritet.net/library/press/245/9061/articles/10458>.

123. Зайцев А. В. Чувствительность пожарных извещателей к различным типам дыма // А.В.Зайцев / Алгоритм безопасности. 2012, №№ 3, 4, 5.

124. Сітабдієва О.Л. Геометричне моделювання квазіеліпсоїдів з неточковими фокусами // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: 2005. Вип. 9. С. 122–127.

125. Куценко Л.М., Сухобоков А.Ф. Квазіпарабола з неточковими фокусом як основа відбивача освітлювального приладу // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Вип. 75. Київ: 2005. С.58–64.

126. Підгорний О.Л., Л.М.Куценко Опис подери, ортотоміки і катакаустики як елементів відбивальної системи // Труды / Таврическая гос. агротехн. академия. 1999. Вып. 4, том 10. С. 14 - 18.

127. Ушаков Л.В. Проектування відбивача освітлювального приладу на основі квазіпараболи з неточковим фокусом // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ. 2006. Вип. 76. С. 137–142.

128. Сітабдієва О.Л. Визначення форми відбивальної поверхні, яка б спиралася на задану лінію // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків. 2004. Вип. 4. С. 95–101.

129. Сітабдієва О.Л. Про рівняння відбивальної поверхні, яка б спиралася на задану лінію // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків. 2004. Вип. 5. С. 94–100.

130. Сітабдієва О.Л. Геометрична форма відбивальної поверхні, яка б спиралася на задану просторову лінію // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ. 2004. Вип. 74. С. 275 – 281.
131. Сітабдієва О.Л. Геометричне моделювання квазіеліпсоїдів з неточковими фокусами // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків. 2005. Вип. 9. С. 122-127.
132. Сітабдієва О.Л. Квазіеліпси з фокусом у вигляді відрізка // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків. 2005. Вип. 10. С. 95–103.
133. Сітабдієва О.Л. Квазіеліпсоїди з фокусом у вигляді конуса // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків. 2005. Вип. 11. С. 117-125.
134. Сітабдієва О.Л. Метод опису квазіеліпсів з розосередженими фокусами // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь. 2005. Вип. 4. Т. 29. С. 73–78.
135. Павленко О. М., Верещага В. М. Згущення дискретно поданої кривої із застосуванням супровідних трикутників // Сучасні проблеми моделювання. 2016. №. 6. С. 30–37.
136. Spirintsev D. V., Naydysh A. V. Methods geometric modeling and visualization of digital elevation models // Системні технології. 2007. № 5 (52). С. 3–9.
137. Найдиш А. В., Балюба І. Г., Верещага В. М., Спирінцев Д. В. Проблеми підвищення точності у варіативному дискретному геометричному моделюванні // Сучасні проблеми моделювання. 2019. №. 14. С. 148–155.
138. Пилипака С. Ф., Несвідомін В.М., Бабка В.М., Клендій М.Б. Рух частинки по стаціонарній гвинтовій поверхні із заданою кривою осьового перерізу // Прикладні питання математичного моделювання. 2018. № 2. С. 123–132. DOI: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2018-2-123-132>.
139. Несвідомін В. М. Комп'ютерні технології дослідження руху частинки по шорстких нерухомих поверхнях на прикладі вертикального конуса // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету. 2012. №. 2, Т. 5. С. 227–232.
140. Ботвіновська С. І., Ковальов С.М. Аналіз методів дискретного моделювання криволінійних геометричних обводів // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ. 2018. Вип. 94. С. 141–150.
141. Ботвіновська С. І., Золотова А. В. Керування формою дискретно представленої поверхні за рахунок включення заданих вузлів. Сучасні проблеми моделювання. Мелітополь, 2018. № 12. С. 32–43. URL: <https://mdpu.org.ua/new/uk/novosti-universiteta/4365-2018-06-05-13-43-08.html>.
142. Ванін В. В., Вірченко Г. А. Визначення та основні положення структурно-параметричного геометричного моделювання // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків. 2009. Вип. 23. С. 42–48.

143. Юрчук В. П. Спряжені поверхні в геометричних моделях формотворення робочих органів коренезбиральних машин: автореф. дис. ... докт. техн. наук : 05.01.01. Київ. 2002. 37 с.

144. Підкоритов А. М., Юрчук В. П. Визначення аналітичних умов спряжень гелікоїдних поверхонь // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь, 1999. Вип. 4, Т. 6. С. 30–33.

145. Аушева Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без'є // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ. 2011. Вип. 88. С. 57–61.

146. Аушева Н. М. Моделювання ізотропних кривих на основі кватерніонів з колінеарною векторною частиною // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ. 2010. Вип. 86. С. 137–140.

147. Корчинський В. М. Геометричні характеристики інформативності цифрових багатоспектральних зображень // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків. 2009. Вип. 24. С. 176–181.

148. Гнатушенко В. В., Сущевський Д. В. Геометрична векторна модель візуалізації змін об'єктів штучного походження // Системні технології. Дніпропетровськ. 2011. Вип. 1 (72). Т. 1. С. 53–59.

149. Gnatushenko V., Gnatushenko Vict., Kalinina N. Methods of the space structure analysis of metal materials under their digital. Materials and Metallurgy (SHMD 2010): 9 th International Symposium of Croatian Metallurgical Society. Croatia, Šibenik, 20–24 June 2010 year. Šibenik, 2010. P. 197.

150. Реута О. В. Геометричні моделі аналізу та інтерпретації форм проєкційних зображень : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01. Київ, 2001. 18 с.

151. Tuluchenko G., Virchenko G., Getun G. Martynov V., Tymofieiev M. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Kharkiv, 2018. Т. 2. №. 4 (92). С. 50–62.

152. Борисенко В. Д., Устенко С. А., Спіцин В. Є. Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням лінійного елемента кривини // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ. 2006. Вип. 76. С. 43–49.

153. Устенко С. А. Побудова обводів спинки та коритця профілів лопаток осьових турбін. Вісник НУК. Миколаїв, 2010. № 2. URL : <http://eir.nuos.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/123456789/1766/Ustenko.pdf?sequence=1>.

154. Подкорытов А. Н., Панчук К. Л. Аналитический метод определения профиля зуба червячной фрезы // Прикладная геометрия в машиностроении. Омск. 1974. С. 32–37.

155. Пугачов Є. В., Савчук Л. С. Моделювання природної освітленості прямим світлом від небозводу на поверхнях панорами. Сучасні проблеми моделювання 6. 2016. С. 96–103.