“Метод стационарной фазы для поверхности с краем и амплитудной функции с краевой сингулярностью” (совместно с Сухаревским О.И. и Важинским С.Э.) СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ ХВУ, выпуск 19, с, 1998 г.

**УДК 821.398.87**

Доктор физико-математических наук Сухаревский И.В.
Доктор технических наук Сухаревский О.И.
Важинский С.Э.

# МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ И АМПЛИТУДНОЙ ФУНКЦИИ С КРАЕВОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ.

*Даны формулы для асимптотических представлений высокочастотных полей, порождаемых заданным распределением токов на незамкнутой поверхности. Предложен метод получения краевой асимптотики в практически важном случае амплитудной функции с сингулярностью на контуре (соответствующей краевым условиям Майкснера).*

## ВВЕДЕНИЕ

Интегральные представления высокочастотных электромагнитных полей содержат поверхностные интегралы вида

$$I = \iint\limits_{S} e^{jk\Phi(x_1,x_2,x_3)} F(x_1,x_2,x_3)\cdot dS \qquad (1)$$

при k>>1. Если поверхность S незамкнута (например, если речь идет о дифракции на ограниченном экране или же об излучении апертурой антенны ), то асимптотика интеграла I состоит из вкладов, вносимых поверхностными точками стационарной фазы и краевым контуром L . В случае, когда S есть участок плоскости, а Ф и F-достаточно гладкие функции, этот вопрос рассмотрен ранее ([1],[2]), причем примененный метод позволил выделить вклад стационарной точки лишь эллиптического типа.

В настоящей статье

а) рассмотрен интеграл по *неплоской*, в общем случае, поверхности S при гладких фазовой и амплитудной функциях Ф, F и получено (строго) асимптотическое представление интеграла (1) в виде суммы вкладов от L и от изолированной точки стационарной фазы *любого* типа ;

б) получен вклад краевого контура $L$ плоской области $S$ в случае, когда (как это имеет место в практически важных классах задач теории дифракции и теории излучающих систем) амплитудная функция

$$F = \frac{F_0(x_1, x_2)}{\delta^p(x_1, x_2)}, \qquad (0 < p < 1), \tag{2}$$

где $F_0$ непрерывна в $S \cup L$, а $\delta(x_1, x_2)$ есть расстояние точки $M(x_1, x_2) \in S$ от контура $L$. Следует отметить, что метод работы [1], опирающийся на интегральные теоремы векторного анализа, в такой ситуации непригоден.

## 1. АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛА (1) ПРИ ОТСУТСТВИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТОЧЕК СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ И КРАЕВЫХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ - уравнение поверхности $S$ с краем $L$. Функции $f$, $\Phi$, $F$ будем считать достаточно гладкими на поверхности $S$ и вблизи нее. Введем орт нормали

$$\vec{n} = \vec{n}(\vec{x}) = \vec{n}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\vec{\nabla} f}{\left|\vec{\nabla} f\right|} \tag{3}$$

и тангенциальные дифференциальные операторы

$$\vec{D} = -n\frac{\partial}{\partial n} + \vec{\nabla}, \vec{D}^{\perp} = \vec{n} \times \vec{D}.$$

В силу интегральной теоремы Стокса,

$$jk\iint\limits_S e^{jk\Phi} F dS = \oint\limits_L e^{jk\Phi} F \frac{(\vec{\tau}\vec{D}^{\perp}\Phi)}{\left|\vec{D}\Phi\right|^2} dS - \iint\limits_S e^{jk\Phi} \vec{D}^{\perp}\left(F\frac{\vec{D}^{\perp}\Phi}{\left|\vec{D}\Phi\right|^2}\right) dS, \tag{4}$$

где $\vec{\tau}$ - орт касательной к $L$.

Соотношению (4), таким образом, можно придать следующий вид:

$$I_0 = \frac{1}{jk} K_0 - \frac{1}{jk} I_1, \tag{5}$$

причем

$$I_0 = \iint\limits_S e^{jk\Phi} F dS; \; I_1 = \iint\limits_S e^{jk\Phi} T F dS; k_0 = \oint\limits_L e^{jk\Phi} F \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu}}{\left|\vec{D}\Phi\right|^2} dS;$$

$\vec{\nu} = \vec{\tau} \times \vec{n}$, а

$\mathcal{T}\mathrm{F} = \vec{\mathrm{D}}^{\perp}\left(\mathrm{F}\dfrac{\vec{\mathrm{D}}^{\perp}\Phi}{\left|\vec{\mathrm{D}}\Phi\right|^{2}}\right)$ есть некоторый оператор, действующий на функцию F. Окончательно,

$$\iint\limits_{S} e^{jk\Phi}\mathrm{F}dS = \oint\limits_{L} e^{jk\Phi}\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}}{\left|\vec{\mathrm{D}}\Phi\right|^{2}}\mathrm{F}_m ds + o\left(\frac{1}{k^m}\right), \tag{6}$$

где

$$\mathrm{F}_m = \mathrm{F}_m(x_1, x_2, x_3) = \sum_{S=0}^{m-1}\frac{(-1)^S}{(jk)^{S+1}}\mathcal{T}^S\mathrm{F} \tag{7}$$

## 2 ВВЕДЕНИЕ «НЕЙТРАЛИЗАТОРОВ», ЛОКАЛИЗАЦИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ВКЛАДОВ

Пусть везде на SUL $\vec{\nabla}f \neq 0$, а $\vec{\mathrm{D}}\Phi = 0$ в одной лишь точке $M_0(\vec{x}_0) = M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, расположенной на S на расстоянии R>0 от L.

После перехода к декартовой системе координат $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ с началом в точке $M_0(\vec{x}_0)$, и осью $M_0\xi_3$,имеющей направление орта нормали $\vec{n}_0(\vec{x}_0)$, получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \mathrm{F}(x_1, x_2, x_3) = \hat{\mathrm{F}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \ \Phi(x_1, x_2, x_3) = \hat{\Phi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Поверхность же S имеет локально (при $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2} < R_0$, где $R_0$ достаточно малое, причем $R_0 < R$) уравнение вида $\xi_3 = g(\xi_1, \xi_2)$ и в точке $M_0$ $g = 0$; $g_{\xi 1}, g_{\xi 2} = 0$.

Введем функцию $\nu(\rho)$ («нейтрализатор»), бесконечно гладкую на полуоси $0 \le \rho < +\infty$, причем

$$\nu(\rho) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ 0 \le \rho \le \varepsilon_0 \\ 0 \ \text{ при } \ \rho \ge \varepsilon_1 \end{cases},$$

где $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < R_0$, и произведем «разбиение единицы» $1 = \nu(\rho) + [1 - \nu(\rho)]$ в интеграле I:

$$I = \iint\limits_{S} Њ^{jk\Phi}\mathrm{F}dS = J_1 + J_0,$$

$$J_1 = \iint\limits_{S_1} \text{Њ}^{jk\varPhi} F_1 dS; S_1 = S \bigcap \left\{ \left| \vec{x} \; - \vec{x}_0 \right| \le \varepsilon_1 \right\}, F_1 = F \cdot \nu \; ;$$

$$J_0 = \iint\limits_{S_0} \text{Њ}^{jk\varPhi} F_0 dS; S_0 = S \bigcap \left\{ \left| \vec{x} \; - \vec{x}_0 \right| \ge \varepsilon_0 \right\}, F_0 = F \cdot (1 - \nu) \; ;$$

В силу результатов п.1,

$$J_0 = \oint\limits_L e^{jk\varPhi} \frac{\frac{\partial \varPhi}{\partial \nu}}{\left| \vec{D} \varPhi \right|^2} F_m dS + o\left( \frac{1}{k^m} \right), \tag{9}$$

где $F_m$ выражается формулой (7).

В предположении невырожденности точки стационарной фазы $M_0$ двойной интеграл в (1) допускает (М.В. Федорюк, [3], [4]) асимптотическое разложение вида:

$$J_1 \approx k^{-1} \exp[jk\varPhi(M_0)] \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} a_m k^{-m} \; ; \tag{10}$$

при этом в главном асимптотическом приближении

$$J_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \exp[jk\varPhi(M_0)] \cdot \left[ \frac{\text{Њ›}p\left( \frac{\pi j}{4} \operatorname{sgn} \widetilde{\varPhi} \right)}{\sqrt{\left| \det \widetilde{\varPhi} \right|}} F(M_0) + O\left( \frac{1}{k} \right) \right], \tag{11}$$

где $\widetilde{\varPhi} = \left\| \begin{matrix} \vec{\varPhi}_{\xi_1^2} & \vec{\varPhi}_{\xi_1 \xi_2} \\ \vec{\varPhi}_{\xi_1 \xi_2} & \vec{\varPhi}_{\xi_1^2} \end{matrix} \right\|$

при $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\widetilde{\varPhi}(\xi_1, \xi_2) = \widehat{\varPhi}(\xi_1, \xi_2, g(\xi_1, \xi_2))$,

а $\operatorname{sgn} \widetilde{\varPhi} = \mu^+ - \mu^-$ - разность между количествами положительных и отрицательных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2$ матрицы $\widetilde{\varPhi}$.

Примененный выше метод «нейтрализаторов» позволяет, опираясь на результаты, приведенные в [4], [5], [3],получать и асимптотические вклады изолированных точек стационарной фазы в различных случаях вырождения.

## 3 АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ С КРАЕВОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

К интегралам такого типа, которые будут здесь рассмотрены, приводит решение ряда задач электродинамики.

Пусть, например, отыскивается полное дифрагированное поле $\vec{H}(\vec{x})$ от первичной волны $\vec{H}_0(\vec{x})$, падающей на плоский, идеально проводящий, бесконечно тонкий экран S ,ограниченный контуром L. В таком случае из векторизованной формулы Грина следует ([6]) известное интегральное представление вектора $\vec{H}(\vec{x}_0)$ в любой точке $\vec{x}_0$, не расположенной на экране:

$$\vec{H}(\vec{x}_0)=\vec{H}_0(\vec{x}_0)+\iint_S\left[\vec{\nabla}g\cdot\vec{g}(\vec{x})\right]dS, \tag{13}$$

где $\vec{g}$ - плотность поверхностного тока, $g = g(\vec{x}_0,\vec{x})=\dfrac{e^{jkr}}{4\pi r}$; $r=|\vec{x}_0-\vec{x}|$.

Поэтому рассеянное поле имеет вид :

$$\vec{H}(\vec{x}_0)-\vec{H}_0(\vec{x}_0)=\iint_S e^{jk\Phi}\cdot\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{x})dS, \tag{14}$$

при фазовой функции $\Phi = \Phi(\vec{x}_0,\vec{x}) = r$.

Здесь действует ([6]) физически необходимое условие Майкснера - «условие на ребре», обеспечивающее конечность энергии в окрестности излома поверхности, вследствие чего у амплитудной функции $\vec{F}$ допустима на бесконечно тонком краю сингулярность: $\vec{F}=\dfrac{\vec{F}_0}{\sqrt{\delta}}$ где $\vec{F}_0$ непрерывна в окрестности краевого контура, а $\delta=\delta(x_1,x_2)$расстояние точки области S от края.

Метод получения коротковолновых асимптотик при наличии «краевых сингулярностей» излагается ниже применительно к интегралу P по плоской строго выпуклой области S с достаточно гладкими граничным контуром L и функцией $F_0$:

$$P=\iint_S e^{jkr}\cdot\frac{F_0(\vec{x})}{\sqrt{\delta(\vec{x})}}dS \tag{15}$$

(причем $r=\sqrt{\left(x_1^0-x_1\right)^2+\left(x_2^0-x_2\right)^2+h^2}$, $h=x_3^0\neq 0$, а точка $M_0\left(x_1^0,x_2^0,0\right)\in S$ и удалена от L на положительное расстояние $R_1$). Кроме того, приведена асимптотика соответствующей комплексной диаграммы направленности

$$Q=\iint_S e^{-jk\left(\vec{R}^0\cdot\vec{x}\right)}\cdot\frac{F_0(\vec{x})}{\sqrt{\delta(\vec{x})}}dS\ , \tag{16}$$

где $\vec{R}^0 = (0, -\cos\psi, \sin\psi)$. Исследовать интеграл P удобно, задав L уравнением в полярных координатах $(\rho, \theta)$ с полюсом в точке $M_0$ :

$$\rho = \omega(\theta), (0 \le \theta < 2\pi) \tag{17}$$

В таком случае, как это нетрудно обосновать, амплитудную функцию в P можно представить отношением вида $\dfrac{F_1(\rho,\theta)}{\sqrt{\omega(\theta) - \rho}}$ с числителем, не имеющим особенностей. Следовательно,

$$т = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\omega(\theta)} e^{jk\sqrt{\rho^2+h^2}} \cdot \frac{F_1(\rho,\theta)\rho d\rho}{\sqrt{\omega(\theta) - \rho}}. \tag{18}$$

Преобразуем интеграл к новой переменной интегрирования $r = \sqrt{\rho^2 + h^2}$,

$$т = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\Omega} e^{jkr} \cdot (\Omega - r)^{-\frac{1}{2}} Grdr, \tag{19}$$

где

$$\Omega = \Omega(\theta) = \sqrt{\omega^2(\theta) + h^2}, \; G = G(r,\theta) = F_1\left(\sqrt{r^2 - h^2}, \theta\right) \cdot \left[\frac{\omega(\theta) + \sqrt{r^2 - h^2}}{\Omega(\theta) + r}\right]^{\frac{1}{2}},$$

и введем при $h \le r \le \Omega(\theta)$ бесконечно дифференцируемые по r (при каждом $\theta$) «нейтрализаторы» $\nu_0(r,\theta), \nu_1(r,\theta)$ такие, что $\nu_1 \equiv 1 - \nu_0$ и

$$\nu_0(r,\theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } h \le r \le \varepsilon_1, \\ 0, & \text{если } \xi_0 \le r \le \Omega(\theta), \end{cases} \qquad (h < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \min_{0<\theta<2\pi} \Omega(\theta)).$$

Соответственно «разбиению единицы» $1 = \nu_0(r,\theta) + \nu_1(r,\theta)$ получаем: $P = P_0 + P_1$. Вклад точки стационарной фазы $\rho = 0 \quad (r = h)$:

$$m_0 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varepsilon_0} e^{jkr} \cdot (\Omega - r)^{-\frac{1}{2}} G \nu_0 r dr \quad . \tag{20}$$

Так как функция $G_0(r,\theta) = (\Omega - r)^{\frac{1}{2}} G\nu_0 r$ при каждом $\theta$ непрерывна по $r \in [h, \varepsilon_0]$ вместе со своими производными, и все они равны нулю при $r = \varepsilon_0$, то интегрирование по частям приводит к формуле:

$$\text{т}_0 = \sum_{m=1}^{N} \frac{(-1)^m e^{jkh}}{(jk)^m} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{m-1} G_0(h,\theta)}{\partial r^{m-1}} d\theta + O\left(\frac{1}{k^{N+1}}\right) \tag{21}$$

В главном приближении

$$\text{т}_0 = -\frac{he^{jkh}}{jk} F_1(M_0) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\omega(\theta)}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{22}$$

Переходим к асимптотике интеграла

$$\text{т}_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varepsilon_1}^{\Omega} e^{jkr} \cdot (\Omega - r)^{-\frac{1}{2}} G\nu_1 r dr\ . \tag{23}$$

Здесь, как и при асимптотическом разложении интеграла $P_0$, приводит к цели интегрирование по частям во внутреннем интеграле. Однако, вследствие сингулярности функции $(\Omega - r)^{\frac{1}{2}}$ в точке r=$\Omega$, дифференцировать ее под знаком интеграла недопустимо и, вместо $\frac{e^{jkr}}{jk}, \frac{e^{jkr}}{(jk)^2}$,.....,нужно применить последовательность первообразных специального вида от произведения $e^{jkr}(\Omega - r)^{-\frac{1}{2}} = U_0(r,\theta)$, а именно, последовательность функций

$$U_m(r,\theta) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_r^{+j\infty} (t-r)^{m-1} e^{jkt} (\Omega - t)^{-\frac{1}{2}} dt \tag{24}$$

(m = 1, 2, ...), обладающих следующими свойствами:

$$\frac{\partial U_m(r,\theta)}{\partial r} = U_{m-1}(r,\Omega),\ (m = 1, 2, ...);$$

$$U_m(\Omega,\Omega) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} e^{\frac{\pi j}{2}(m+\frac{1}{2})} \cdot \frac{\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{k^{m-\frac{1}{2}}} e^{jk\Omega});$$

$$|U_m(r,\Omega)| \le \frac{1}{(m-1)!} \frac{\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{k^{m-\frac{1}{2}}}, \quad (h \le r \le \Omega).)$$

Таким путем получается асимптотическое разложение:

$$P_1 = \sum_{m=1}^{N} \frac{(-1)^{m-1} e^{-\frac{\pi j}{2}\left(m-\frac{1}{2}\right)} \Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right)}{k^{m-\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} e^{jk\Omega} \Psi_{m-1}(\theta) d\theta + O\left(\frac{1}{k^{N+\frac{1}{2}}}\right), \tag{25}$$

где $$\Psi_{m-1}(\theta)=\frac{\partial^{m-1}\left|G(r,\theta)\cdot r\right|}{\partial r^{m-1}}\Big|r=\Omega(\theta)$$

В главном приближении: $$P_1=\frac{e^{-\frac{\pi j}{4}}\cdot\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}\int_0^{2\pi}e^{jk\Omega}F_1(\omega,\theta)\cdot\sqrt{\omega\Omega}d\theta+O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Что касается интеграла (16), то приведем лишь окончательный результат:

$$Q=\pi e^{j\bar{k}b}\left|\frac{1}{j\bar{k}}f(o,b)-\frac{1}{(j\bar{k})^2}\left(\frac{\partial f(o,b)}{\partial y}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 f(o,b)}{\partial x^2}\cdot B\right)\right|-$$
$$-\pi e^{j\bar{k}a}\left[\frac{1}{j\bar{k}}f(0,a)-\frac{1}{(j\bar{k})^2}\left(\frac{\partial f(0,a)}{\partial y}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 f(0,a)}{\partial x^2}\cdot A\right)\right]+O\left(\frac{1}{\bar{k}^3}\right)$$

где $(\bar{k}=k\cdot\cos\Psi)$, а B и A - некоторые константы.

Таким образом, полученное асимптотическое представление интеграла Q имеет дискретный характер, состоит из вкладов от окрестностей двух точек краевого контура - точек ( o, $a$ ), ( o , b ) . Такое явление хорошо известно в теории коротковолновой дифракции и связано с концепцией «блестящих точек» в радиолокации.

## Литература

1.Конторович М.И., Муравьев Ю.К. Вывод законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задачи дифракции ЖТФ, XX11, №3 ,1952.

2.Вакман Д.Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. «Сов. радио», М;1962.-247с.

3.Федорюк М.В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов. ЖВММФ, 2,№1,1962, 145-150 с.

4.Федорюк М.В. Метод перевала. «Наука», М.,1977. 363 с.

5.Повзнер А.Я., Сухаревский И.В. О нахождении асимптотики решений задач дифракции коротких волн . ЖВММФ, 1, №12, 224-245 с.

6.Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. «Мир»,1964. 427 с.

7.Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.,1962. 127 с.