

УДК 514.18

## **МОДЕЛЬ МАКСИМАЛЬНОГО ПОКРИТТЯ ЗАДАНОЇ ОБЛАСТІ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ**

Соболь О.М., д.т.н.,

Кравців С.Я., к.т.н.,

Стельмах О.А., к.т.н.,

Ляшевська О.І., к.н.держ.упр.

*Національний університет цивільного захисту України*

*(Харків, Україна)*

*Задача оптимального покриття заданої області (в нашому випадку – це неопуклий багатокутник з певним набором підобластей покриття) полягає у визначенні мінімальної кількості об'єктів покриття з урахуванням обмежень, які впливають на кількість даних об'єктів.*

*У двовимірному просторі покриття заданої області, як правило, здійснюється колами заданого радіусу, прямокутниками, багатокутниками, об'єктами зі змінними метричними характеристиками тощо.*

*В даній роботі було розроблено математичну модель покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками з урахуванням наступних обмежень: мінімум площі взаємного перетину об'єктів покриття; мінімум площі перетину об'єктів покриття та доповнення заданої області до двовимірного простору; параметри розміщення об'єктів покриття мають належати точкам у заданих підобластях із урахуванням пріоритетних підобластей; максимальне покриття заданих підобластей відповідними об'єктами; належність заданих підобластей об'єктам покриття; належність пріоритетних підобластей областям перетину заданої кількості об'єктів покриття; обмеження спеціального виду, що впливають на метричні характеристики об'єктів покриття.*

*Одержана модель дозволяє розробити обґрунтований метод геометричного моделювання максимального покриття та здійснити комп'ютерне моделювання покриття заданої області з урахуванням обмежень спеціального виду.*

*Подальші дослідження будуть направлені на розв'язання інших задач, що витікають із загальної постановки та на розробку методів геометричної оптимізації.*

*Ключові слова: максимальне покриття, обмеження*

спеціального виду, загальна модель, задана область, підобласті.

**Постановка проблеми.** На сьогодні задачі покриття заданої області є актуальними для вирішення задач покриття у різних галузях. Головним критерієм цих задач є мінімізація кількості об'єктів покриття, які полягають у розробці моделей та методів покриття.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В роботі [1] сформульовано загальну постановку задачі оптимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. Розроблено модель оптимального покриття та досліджено її особливості, а саме: цільова функція є алгоритмічною, тобто обчислюється в процесі розв'язання задачі; обмеження задачі складаються з нелінійних, дискретних та кусочно-лінійних виразів; визначено кількість обмежень моделі. Загальну модель та метод оптимального покриття неопуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами з метою розв'язання задачі мінімізації ризику для людини загинути внаслідок виникнення небезпечних подій розроблено в роботі [2]. Професор Яковлев С.В. запропонував модель та метод максимального покриття неопуклого багатокутника колами змінного радіусу [3]. В цій же статті запропоновано новий погляд на формалізацію задач розміщення нерівних кіл в колі як задачі математичного програмування. В результаті виділення комбінаторної структури задачі за допомогою додаткових змінних вдалося сформулювати додаткову систему обмежень, що описують множину переставлень радіусів кіл. Це дозволяє за рахунок змінних радіусів подолати область тяжіння локальних екстремумів задачі. Таким чином, метод змінних радіусів насамперед слід розглядати як спосіб поліпшення локальних розв'язків задачі.

Незважаючи на вищенаведені дослідження, актуальною задачею є розробка моделей та методів максимального покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду.

**Формулювання цілей статті.** В даній роботі необхідно здійснити постановку та розробити модель максимального покриття заданої області (неопуклий багатокутник з набором підобластей покриття) з урахуванням обмежень спеціального виду.

**Основна частина.** Розглянемо змістовну постановку задачі максимального покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками. Нехай у просторі  $R^2$  задано область  $S_0(m_0, u_0)$  (рис. 1), яка являє собою у загальному випадку неопуклий багатокутник з координатами вершин  $m_0 = \{x_{0,1}, y_{0,1}, \dots, x_{0,n_0}, y_{0,n_0}\}$  та зв'язана з глобальною (нерухомою) системою координат  $XOY$  (початок глобальної системи координат

співпадає з однією з вершин багатокутника, а  $u_0 = \{0,0\}$ ). Слід відзначити, що  $m_0$  – метричні характеристики, а  $u_0$  – параметри розміщення  $S_0(m_0, u_0)$ .

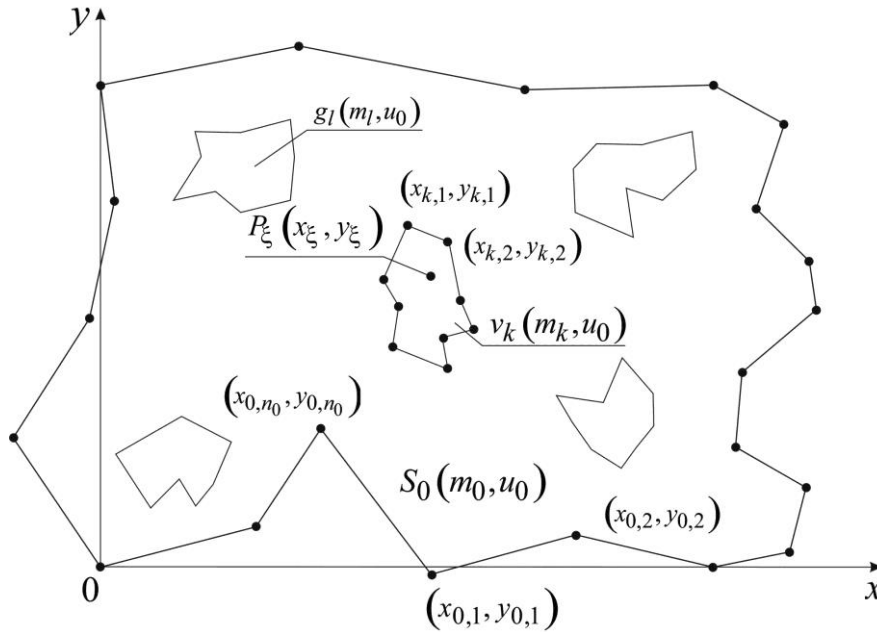


Рис.1. Область  $S_0(m_0, u_0)$  та підобласті  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k = 1, \dots, N_k$ ,  
і  $g_l(m_l, u_0)$ ,  $l = 1, \dots, N_l$

Область  $S_0(m_0, u_0)$  має підобласті  $v_k(m_k, u_0) \in V$ ,  $k = 1, \dots, N_k$ , які належать множині  $V$ . Підобласті  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k = 1, \dots, N_k$ , також являють собою неопуклі багатокутники, які задані координатами вершин  $m_k = \{x_{k,1}, y_{k,1}, \dots, x_{k,n_k}, y_{k,n_k}\}$  у глобальній системі координат. Даним підобластям мають належати параметри розміщення локальних (рухомих) систем координат  $X_{c,i}O_{c,i}Y_{c,i}$  об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i = 1, \dots, N$  відносно глобальної системи координат. Об'єкти покриття в загальному випадку являють собою неопуклі багатокутники, які визначаються координатами вершин  $m_{c,i} = \{x_{c,i,1}, y_{c,i,1}, \dots, x_{c,i,n_{c,i}}, y_{c,i,n_{c,i}}\}$  у локальних системах координат та параметрами розміщення даних систем координат  $u_{c,i} = \{x_{c,i}, y_{c,i}\}$ . Слід відзначити, що метричні характеристики  $m_{c,i}$  та параметри розміщення локальних систем координат об'єктів покриття  $u_{c,i}$  є змінними (на відміну від заданих області та підобластей, для яких метричні характеристики та параметри розміщення є

постійними).

Нехай  $g_l(m_l, u_0) \in G$ ,  $l=1, \dots, N_l$ ,  $G \subset V$  – підобласті, які мають пріоритет стосовно покриття та розміщення локальних систем координат об'єктів  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ . Також в області  $S_0(m_0, u_0)$  у глобальній системі координат задано точки  $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$ ,  $j=1, \dots, N_d$ , які мають належати областям перетину заданої кількості  $M$  об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ .

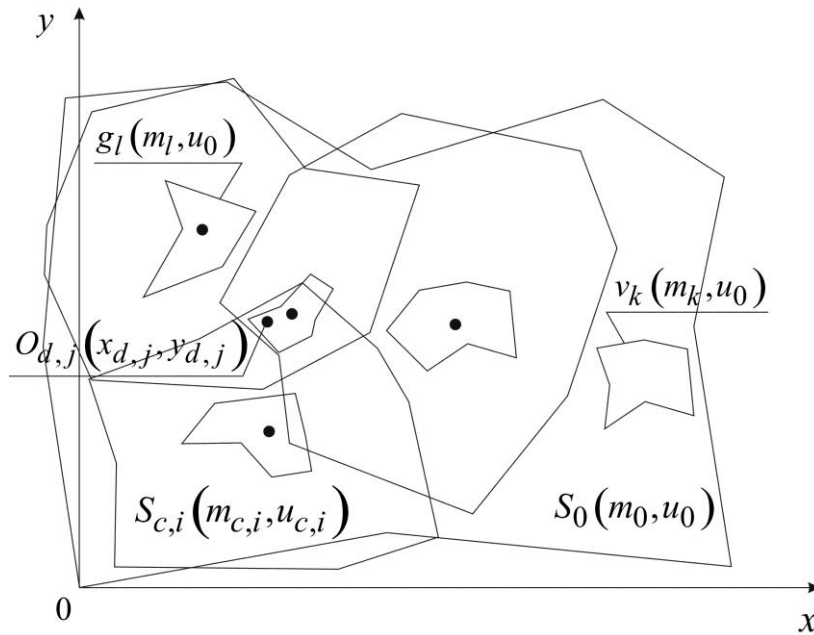


Рис. 2. Максимальне покриття підобластей  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k=1, \dots, N_k$  та повне покриття підобластей  $g_l(m_l, u_0)$ ,  $l=1, \dots, N_l$ , і точок  $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$ ,  $j=1, \dots, N_d$

Необхідно здійснити покриття області  $S_0(m_0, u_0)$  об'єктами  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$  (рис. 2), таким чином, щоб їх кількість була мінімальною та виконувалися наступні обмеження:

– мінімум площі взаємного перетину об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ ;

– мінімум площі перетину об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ , та  $cS_0(m_{cS_0}, u_{cS_0})$  – доповнення області  $S_0(m_0, u_0)$  до простору  $R^2$ ;

– параметри розміщення локальних систем координат об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ , мають належати точкам  $P_\xi(x_\xi, y_\xi)$ ,  $\xi=1, \dots, N_\xi$ ,  $N_\xi \geq N_k$ , у підобластях  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k=1, \dots, N_k$ , з урахуванням пріоритетної належності підобластям  $g_l(m_l, u_0)$ ,  $l=1, \dots, N_l$ .

– максимальне покриття підобластей  $v_k(m_k, u_0)$ ,  $k=1, \dots, N_k$ , об'єктами  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ ;

– належність підобластей  $g_l(m_l, u_0)$ ,  $l=1, \dots, N_l$ , об'єктам покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ ;

– належність точок  $O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j})$ ,  $j=1, \dots, N_d$ , областям перетину заданої кількості  $M$  об'єктів покриття  $S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i})$ ,  $i=1, \dots, N$ ;

– обмеження спеціального виду, що впливають на метричні характеристики об'єктів покриття  $m_{c,i}$ ,  $i=1, \dots, N$ .

Тоді модель максимального покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками має наступний вигляд:

$$\min_W N(m_{c,1}, u_{c,1}, \dots, m_{c,N}, u_{c,N}); \quad (1)$$

де  $W$ :

$$S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i}) \cap S_{c,h}(m_{c,h}, u_{c,h}) \rightarrow \emptyset; \quad (2)$$

$$i=1, \dots, N-1; h=i+1, \dots, N;$$

$$S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i}) \cap cS_0(m_{cS_0}, u_{cS_0}) \rightarrow \emptyset; \quad (3)$$

$$i=1, \dots, N; S_0 \cup cS_0 = R^2;$$

$$u_{c,i} \in P_\xi(x_\xi, y_\xi); i=1, \dots, N; \xi \in \{1, \dots, N_\xi\}; N_\xi \geq N_k; \quad (4)$$

$$\left( \bigcup_{k=1}^{N_k} v_k(m_k, u_0) \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i}) \right) \rightarrow \bigcup_{k=1}^{N_k} v_k(m_k, u_0); \quad (5)$$

$$\left( \bigcup_{l=1}^{N_l} g_l(m_l, u_0) \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^N S_{c,i}(m_{c,i}, u_{c,i}) \right) = \bigcup_{l=1}^{N_l} g_l(m_l, u_0); \quad (6)$$

$$O_{d,j}(x_{d,j}, y_{d,j}) \in \bigcap_{\mu}^M S_{c,\mu}(m_{c,\mu}, u_{c,\mu}), \quad j=1, \dots, N_d; \quad (7)$$

$$\mu \in \{1, \dots, N\};$$

$$m_{c,i} = f(t); \quad i=1, \dots, N; \quad (8)$$

де  $t$  – параметр, що впливає на метричні характеристики об'єктів покриття  $m_{c,i}$ ,  $i=1, \dots, N$ .

**Висновки.** В даній роботі було розроблено модель максимального покриття заданої області неопуклими багатокутниками зі змінними метричними характеристиками з урахуванням наступних обмежень:

- мінімум площі взаємного перетину об'єктів покриття;
- мінімум площі перетину об'єктів покриття та доповнення заданої області до двовимірного простору;
- параметри розміщення об'єктів покриття мають належати точкам у заданих підобластях із урахуванням пріоритетних підобластей;
- максимальне покриття підобластей покриття об'єктами покриття;
- належність заданих підобластей об'єктам покриття;
- належність пріоритетних підобластей областям перетину заданої кількості об'єктів покриття;
- обмеження спеціального виду, що впливають на метричні характеристики об'єктів покриття.

Одержана модель дозволяє розробити обґрунтований метод геометричного моделювання максимального покриття та здійснити комп'ютерне моделювання покриття заданої області з урахуванням обмежень спеціального виду.

Подальші дослідження будуть направлені на розв'язання інших задач, що витікають із загальної постановки, та на розробку методів геометричної оптимізації.

### **Література**

1. Соболь О.М., Кравців С.Я. Модель покриття заданих областей з урахуванням обмежень спеціального виду. *Сучасні проблеми моделювання: наукове фахове видання*. Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2019. Вип. 14. С. 171–178. URL :

- <http://magazine.mdpu.org.ua/index.php/spm/article/view/2552>
2. Комяк В.М., Соболев О.М., Кравців С.Я. Модель та метод оптимального покриття неопуклими багатокутниками заданої області з дискретними елементами. *Науковий вісник Таврійського державного агротехнічного університету*. Мелітополь : ТДАТУ, 2018. Вип. 8, Т.1. С. 11–22. URL : <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7962>.
  3. Яковлев С. В., Карташов О. В., Коробчинський К. П. Метод змінних радіусів в задачі розміщення нерівних кіл. *Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання*: зб. тез доп. міжнар. наук.-практ. конф., м. Івано-Франківськ, 11–16 верес. 2017 р., Івано-Франківськ. 2017. С. 319–322. URL: <http://itcm.comp-sc.if.ua/2017/Yakovlev.pdf>.

## **МОДЕЛЬ МАКСИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ ЗАДАНОЙ ОБЛАСТИ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

Соболев А.Н., Кравців С.Я., Стельмах О.А., Ляшевская Е.И.

*Задача оптимального покрытия заданной области (в нашем случае - это невыпуклые многоугольник с определенным набором подобластей покрытия) заключается в определении минимального количества объектов покрытия с учетом ограничений, которые влияют на количество данных объектов.*

*В двумерном пространстве покрытия заданной области, как правило, осуществляется кругами заданного радиуса, прямоугольниками, многоугольниками, объектами с переменными метрическими характеристиками и тому подобное.*

*В данной работе была разработана математическая модель покрытия заданной области невыпуклые многоугольниками с переменными метрическими характеристиками с учетом следующих ограничений: минимум площади взаимного пересечения объектов покрытия; минимум площади сечения объектов покрытия и дополнения заданной области в двумерного пространства; параметры размещения объектов покрытия должны принадлежать точкам в заданных подобластях с учетом приоритетных подобластей; максимальное покрытие заданных подобластей соответствующими объектами; принадлежность заданных подобластей объектам покрытия; принадлежность приоритетных подобластей областям пересечения заданного количества объектов покрытия; ограничения специального вида, влияющие на метрические характеристики объектов покрытия.*

*Полученная модель позволяет разработать обоснованный*

*метод геометрического моделирования максимального покрытия и осуществить компьютерное моделирование покрытия заданной области с учетом ограничений специального вида.*

*Дальнейшие исследования будут направлены на решение других задач, вытекающих из общей постановки и на разработку методов геометрической оптимизации.*

*Ключевые слова: максимальное покрытие, ограничения специального вида, общая модель, заданная область, подобласти.*

### **MODEL OF THE MAXIMUM COVERAGE OF A PARTICULAR AREA TAKING INTO ACCOUNT OF SPECIAL-LOOK RESTRICTIONS**

Sobol O., Kravtsiv S., Stelmakh O., Lyashevskaya O.

*The task of optimal coverage of a given area (in our case, it is a convex polygon with a certain set of sub-areas of coverage) is to determine the minimum number of coverage objects, taking into account the constraints that affect the amount of data objects.*

*In two-dimensional space, the coverage of a given area is usually made by circles of a given radius, rectangles, polygons, objects with variable metric characteristics, and the like.*

*In this paper, we have developed a mathematical model for covering a given area by convex polygons with variable metric characteristics, taking into account the following limitations: minimum cross-sectional area of the coverage objects; minimum area of intersection of coverage objects and addition of a given area to two-dimensional space; the placement parameters of the coverage objects must be points in the specified subregions, taking into account the priority subregions; the maximum coverage of the specified subregions of the corresponding objects; the relevance of the specified subregions to the coverage objects; the prioritization of subregions for the intersection of a given number of coverage objects; special-type restrictions that affect the metric characteristics of coverage objects.*

*The resulting model allows us to develop a valid method of geometric modeling of maximum coverage and to perform computer simulation of the coverage of a given area, taking into account the limitations of the special type.*

*Further research will be directed to solving other problems arising from the general formulation and to developing methods of geometric optimization.*

*Keywords: maximum coverage, special type restriction, general model, given area, subregions.*